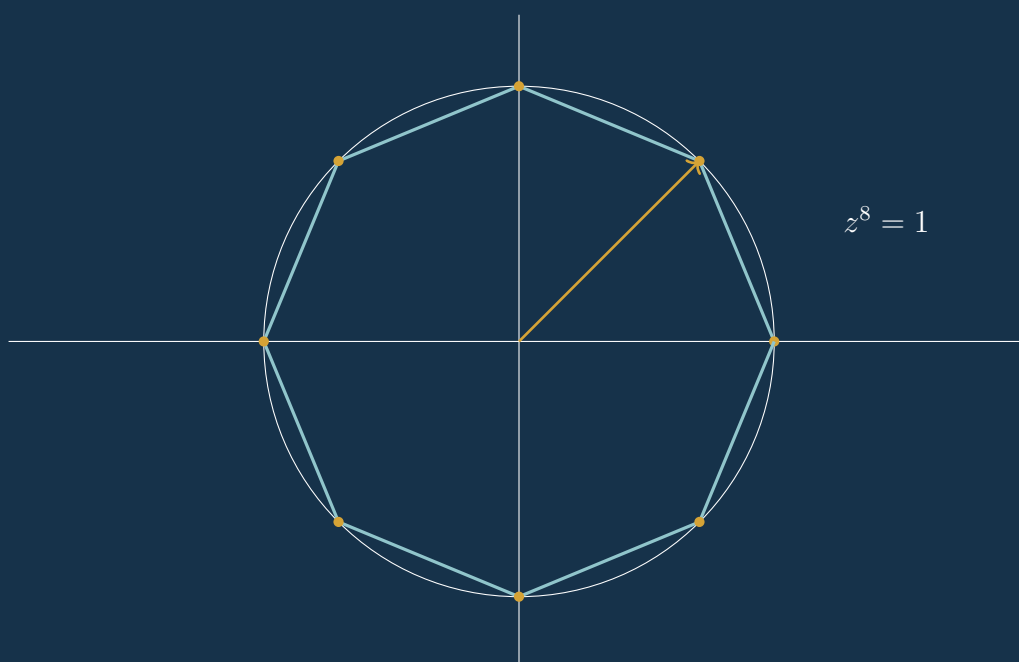


Nombres complexes & équations

Géométrie, second degré
et polynômes réciproques



Cours détaillés • Problèmes guidés
Démonstrations • 12 exercices corrigés

Maths Olympiad

Comprendre la structure avant de calculer

PARCOURS DE LECTURE

Sommaire

Un objectif commun

Passer d'une expression à son sens : une somme devient un cycle, un module devient une distance, un quotient devient un angle et une équation symétrique devient une équation du second degré.

Partie	Idées principales	Page
1. Le langage des complexes	Conjugué, module et arguments	3
2. Racines de l'unité	Cycles, filtres et sommes pondérées	6
3. Distances et cercles	Polygones, extrema et arguments	10
4. Tangentes et intersections	Équations géométriques et exclusions	14
5. Complexes et parabole	Paramétrage, tangentes et cordes	18
6. Un triangle sur un cercle	Seconde intersection d'une hauteur	22
7. Équations et racines	Continuité et produits sans résolution	23
8. Polynômes réciproques	Substitution et multiplicité des racines	27
9. Entraînement	12 exercices de difficulté progressive	31
10. Corrigés détaillés	Calculs, preuves et contrôles	33
11. Fiche de synthèse	Méthodes et conditions à retenir	40

Prérequis

Calcul algébrique, trigonométrie en radians, polynômes du second degré et notions de continuité. Les résultats utiles sur les complexes et la parabole sont rappelés et démontrés au fil du parcours.

Mode d'emploi

Reproduire chaque figure, cacher une solution et annoncer l'outil avant de calculer. Pour les exercices, les niveaux 1, 2 et 3 indiquent une difficulté croissante, et non une durée imposée.

ASTUCE / Trois questions à garder en tête

L'expression est-elle définie ? Quelle structure reconnaît-on ? Les cas d'égalité ou les points exclus ont-ils été examinés ?

01 / LES OUTILS

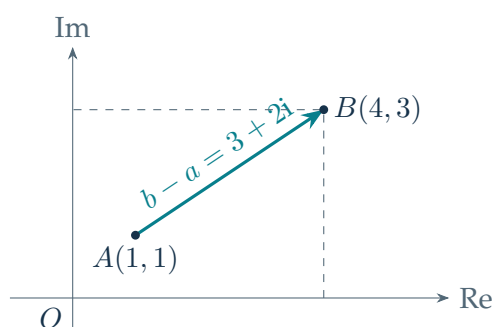
Un nombre, un point, un vecteur

Un nombre complexe s'écrit de manière unique $z = x + iy$, où $x, y \in \mathbb{R}$ et $i^2 = -1$. Sa partie réelle est x et sa partie imaginaire est y : la partie imaginaire est donc un *réel*.

THÉORÈME / Trois lectures compatibles

Dans un repère orthonormé, $z = x + iy$ est l'afixe du point $M(x, y)$ et du vecteur $\overrightarrow{OM}$. Si A et B ont pour affixes a et b , alors

$$\text{aff}(\overrightarrow{AB}) = b - a, \quad AB = |b - a|.$$



Calculer en restant attentif au sens

Pour $a = 1 + i$ et $b = 4 + 3i$, on obtient $b - a = 3 + 2i$ et $AB = \sqrt{13}$. Échanger a et b change le sens du vecteur, mais pas la distance : $|a - b| = |b - a|$.

Le milieu et les barycentres simples

Le milieu de $[AB]$ a pour affixe $(a+b)/2$. Plus généralement, pour $t \in \mathbb{R}$, le point d'affixe $(1-t)a + tb$ décrit la droite (AB) si $a \neq b$. Il appartient au segment $[AB]$ exactement lorsque $0 \leq t \leq 1$.

PIÈGE / Une égalité complexe impose deux égalités réelles

$x + iy = u + iv$ équivaut à $x = u$ et $y = v$. On ne compare pas des nombres complexes avec $<$ ou $>$ comme on compare des réels.

02 / CONJUGUÉ ET MODULE

Des identités qui évitent les calculs lourds

Le conjugué de $z = x + iy$ est $\bar{z} = x - iy$. Géométriquement, la conjugaison est la symétrie par rapport à l'axe réel.

THÉORÈME / Identités fondamentales

$$z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z, \quad z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z, \quad z\bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2.$$

Pour $z \neq 0$, $1/z = \bar{z}/|z|^2$. Ainsi, sur le cercle $|z| = R > 0$, on a $\bar{z} = R^2/z$.

Développer un carré de distance

Pour tous $z, a \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} |z - a|^2 &= (z - a)(\bar{z} - \bar{a}) \\ &= |z|^2 + |a|^2 - z\bar{a} - \bar{z}a \\ &= |z|^2 + |a|^2 - 2 \operatorname{Re}(z\bar{a}). \end{aligned}$$

Cette identité transforme une somme de distances au carré en une somme de nombres complexes, souvent beaucoup plus simple.

Résoudre $|z| = z$

Le membre de gauche est réel et positif ou nul. L'égalité impose donc $\operatorname{Im} z = 0$ et $\operatorname{Re} z \geq 0$. Réciproquement, tout réel positif ou nul convient. Ainsi

$$|z| = z \iff z \in [0, +\infty[.$$

Reconnaître les axes par conjugaison

$$z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}, \quad z \in i\mathbb{R} \iff z = -\bar{z}.$$

La seconde équivalence inclut $z = 0$. Cette précision devient essentielle si l'on utilise ensuite un argument, car l'argument de zéro n'existe pas.

ASTUCE / Sur un cercle centré à l'origine

Remplacer les conjugués par R^2/z permet de simplifier de nombreux quotients sans développer toutes les parties réelles et imaginaires.

03 / ANGLES

Lire la géométrie dans un quotient

Pour $z \neq 0$, un argument de z est un angle θ tel que $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$. Tous ses arguments sont $\theta + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

THÉORÈME / Convention et quotient

On choisit l'argument principal $\text{Arg } z \in]-\pi, \pi]$. Pour $u, v \neq 0$,

$$\arg(u/v) \equiv \arg u - \arg v \pmod{2\pi}.$$

La différence des arguments principaux doit éventuellement être ramenée dans $] -\pi, \pi]$.

Trois tests particulièrement utiles

Si A, B, M ont pour affixes a, b, z , avec $b \neq a$:

- A, B, M sont alignés si et seulement si $(z - a)/(b - a) \in \mathbb{R}$;
- les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux si et seulement si $\text{Re}((z - a)\overline{(b - a)}) = 0$;
- pour $z \neq a$, l'orthogonalité équivaut à $\text{Arg}((z - a)/(b - a)) \in \{-\pi/2, \pi/2\}$.

Pourquoi le produit conjugué apparaît-il ?

Écrire $u = x + iy$ et $v = s + it$ donne

$$\text{Re}(u\bar{v}) = xs + yt,$$

qui est exactement le produit scalaire des vecteurs (x, y) et (s, t) . De plus, $u/v = u\bar{v}/|v|^2$; le dénominateur est un réel strictement positif.

PIÈGE / Le sens et l'alignement sont deux informations différentes

Un quotient réel *positif* correspond au même sens ; un quotient réel négatif au sens opposé. Dire seulement « le quotient est réel » ne permet pas de conclure que son argument principal vaut 0.

Contrôle rapide

Pour $u = 1 + i$ et $v = 1 - i$, on a $u/v = i$. Les vecteurs sont orthogonaux. Pour $u = -2v$, le quotient vaut -2 : ils sont colinéaires et de sens opposés.

04 / PÉRIODICITÉ

Les racines de l'unité

THÉORÈME / Résoudre $z^n = 1$

Pour $n \geq 1$, les solutions sont

$$\zeta_k = e^{2ik\pi/n} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

Elles sont distinctes et de module 1. Pour $n \geq 3$, elles forment les sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle unité.

Démonstration

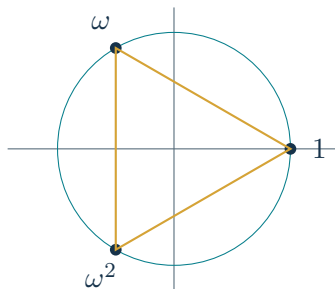
Si $z^n = 1$, alors $|z|^n = 1$, donc $|z| = 1$. En écrivant $z = e^{i\theta}$, l'équation devient $n\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$. Les n angles proposés donnent toutes les valeurs distinctes modulo 2π .

Le cas cubique

Posons $\omega = e^{2i\pi/3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Alors

$$\omega^3 = 1, \quad 1 + \omega + \omega^2 = 0, \quad \bar{\omega} = \omega^2.$$

Les puissances se répètent tous les trois rangs : $\omega^{3q} = 1, \omega^{3q+1} = \omega, \omega^{3q+2} = \omega^2$.



ASTUCE / Réduire l'exposant avant de calculer

Dans ω^{2026} , le reste de 2026 modulo 3 vaut 1, donc la valeur est ω . Pour i^m , on travaille de la même manière modulo 4.

05 / SOMMES

Le filtre des racines de l'unité

Soit $n \geq 2$ et $\zeta = e^{2i\pi/n}$. On veut calculer une somme de puissances sans évaluer chaque terme trigonométrique.

THÉORÈME / Une somme qui ne prend que deux valeurs

Pour tout entier m ,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \zeta^{km} = \begin{cases} n & \text{si } n \mid m, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En retirant le terme $k = 0$, on obtient $n - 1$ si $n \mid m$, et -1 sinon.

Preuve par la somme géométrique

Si $n \mid m$, tous les termes valent 1. Sinon, $q = \zeta^m \neq 1$ et $q^n = 1$, donc

$$1 + q + \cdots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q} = 0.$$

Exemple : une somme pondérée

Avec $\zeta = e^{2i\pi/11}$, calculer

$$U = \sum_{p=1}^{55} (4p + 3) \sum_{j=1}^{10} \zeta^{jp}.$$

La somme intérieure vaut $-1 + 11\mathbf{1}_{11|p}$. Ainsi

$$\begin{aligned} U &= - \sum_{p=1}^{55} (4p + 3) + 11 \sum_{k=1}^5 (44k + 3) \\ &= -(4 \cdot 1540 + 165) + 11(44 \cdot 15 + 15) \\ &= -6325 + 7425 = \boxed{1100}. \end{aligned}$$

PIÈGE / Une exception que l'on ne peut pas ignorer

La somme $\sum_{j=1}^{10} \zeta^{jp}$ ne vaut pas toujours -1 . Pour $p = 11$, elle vaut 10. Avant d'utiliser le filtre, tester si l'exposant est multiple de l'ordre de la racine.

Conséquence trigonométrique

En prenant les parties réelle et imaginaire de $\sum \zeta^k = 0$, on obtient $\sum \cos(2k\pi/n) = 0$ et $\sum \sin(2k\pi/n) = 0$, avec $k = 0, \dots, n-1$.

06 / PROBLÈME GUIDÉ

Une somme double devenue réelle

Énoncé

Pour $n \geq 1$ et $\omega = e^{2i\pi/3}$, poser

$$Z_n = \sum_{r=1}^n r \left(\sum_{p=1}^r \omega^{p-1} \right) - 155\omega.$$

Déterminer tous les entiers n tels que $|Z_n| = Z_n$.

1. Lire le cycle intérieur

La somme $A_r = 1 + \omega + \dots + \omega^{r-1}$ vaut 1, $1 + \omega$ ou 0 selon que r est congru à 1, 2 ou 0 modulo 3. Donc

$$Z_n = A + (B - 155)\omega,$$

où $A = \sum_{1 \leq r \leq n, 3 \nmid r} r$ et $B = \sum_{1 \leq r \leq n, r \equiv 2 (3)} r$ sont des réels.

2. Annuler la partie imaginaire

Comme $\text{Im } \omega \neq 0$, il faut et il suffit que $B = 155$ pour que Z_n soit réel. Si k est le nombre de termes de B , alors

$$B = 2 + 5 + \dots + (3k - 1) = \frac{k(3k + 1)}{2}.$$

L'égalité $B = 155$ devient $(k - 10)(3k + 31) = 0$. Comme $k \geq 0$, on obtient $k = 10$.

3. Retrouver le rang final

Le dixième terme de cette progression est 29 et le suivant est 32. Il y a exactement dix termes si $29 \leq n < 32$.

$$n \in \{29, 30, 31\}, \quad 29 + 30 + 31 = 90.$$

Pour ces valeurs, $Z_n = A > 0$: la condition de signe est donc également satisfaite. Plus précisément, $Z_{29} = Z_{30} = 300$ et $Z_{31} = 331$.

ASTUCE / Ne pas confondre deux indices

k compte les termes d'une sous-somme ; n est la borne de la somme initiale. Les retrouver séparément évite de perdre les valeurs 29 et 31.

07 / PROBLÈME GUIDÉ

Une somme de puissances pondérées

Énoncé

Poser

$$A = \sum_{j=1}^{10} \left(\sin \frac{2j\pi}{11} - i \cos \frac{2j\pi}{11} \right), \quad S = \sum_{p=1}^{55} (4p + 3)A^p.$$

Calculer S sans développer cinquante-cinq puissances.

1. Remettre le sinus et le cosinus dans l'ordre habituel

On a $\sin \theta - i \cos \theta = -ie^{i\theta}$. La somme des dix racines onzièmes différentes de 1 vaut -1 , donc $A = (-i)(-1) = i$.

2. Séparer les deux sommes

$$S = 4T + 3G, \quad T = \sum_{p=1}^{55} pi^p, \quad G = \sum_{p=1}^{55} i^p.$$

Les treize premiers blocs de quatre termes de G s'annulent. Il reste $i^{53} + i^{54} + i^{55} = i - 1 - i = -1$.

3. Décaler pour faire disparaître les coefficients

En soustrayant iT de T , les coefficients intermédiaires deviennent tous égaux à 1 :

$$(1 - i)T = \sum_{p=1}^{55} i^p - 55i^{56} = -1 - 55 = -56.$$

Ainsi $T = -56/(1 - i) = -28(1 + i)$ et

$$S = -115 - 112i.$$

PIÈGE / Les parenthèses changent le problème

Ici, on calcule A avant d'élever à la puissance p . En général, $(\sum z_j)^p \neq \sum z_j^p$. Le filtre de la page précédente répond à un autre type de somme.

ASTUCE / Somme arithmético-géométrique

Pour une somme $\sum pq^p$, multiplier par q et soustraire élimine le facteur p dans les termes intermédiaires. Écrire explicitement le premier et le dernier terme limite les erreurs de bord.

08 / GÉOMÉTRIE

Les distances dans un polygone régulier

THÉORÈME / Une identité valable pour tout point

Si $a_0, \dots, a_{n-1}$ sont les racines de $z^n = 1$, avec $n \geq 2$, alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

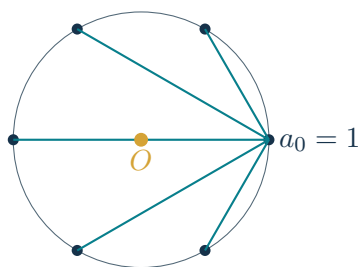
$$\sum_{k=0}^{n-1} |z - a_k|^2 = n(|z|^2 + 1).$$

Démonstration

Développer les carrés à l'aide du conjugué donne

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} |z - a_k|^2 &= n|z|^2 + \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|^2 - 2 \operatorname{Re} \left(z \sum_{k=0}^{n-1} \overline{a_k} \right) \\ &= n|z|^2 + n, \end{aligned}$$

car $|a_k| = 1$ et $\sum a_k = 0$.


Application à un sommet

En prenant $z = a_0 = 1$, la somme des carrés des distances aux autres sommets vaut $2n$. Le terme $|a_0 - a_0|^2 = 0$ peut être inclus sans modifier le résultat.

Deux conséquences

Pour un hexagone inscrit dans un cercle de rayon 1, la somme vaut 12. Pour un polygone régulier inscrit dans un cercle de centre c et de rayon R , la même preuve donne

$$\sum |z - a_k|^2 = n(|z - c|^2 + R^2).$$

Le minimum est nR^2 , atteint uniquement au centre.

ASTUCE / La symétrie fait disparaître les termes croisés

La bonne opération est d'additionner les carrés développés. Calculer séparément les longueurs de toutes les cordes serait beaucoup plus long.

09 / DISTANCES

Le point le plus proche et le plus éloigné

Considérons le cercle $\Gamma : |z - c| = r$, avec $r > 0$, et un point fixe d'affixe a . Notons $d = |c - a|$.

THÉORÈME / Deux extrema exacts

Quand z décrit le cercle,

$$\min |z - a| = |d - r|, \quad \max |z - a| = d + r.$$

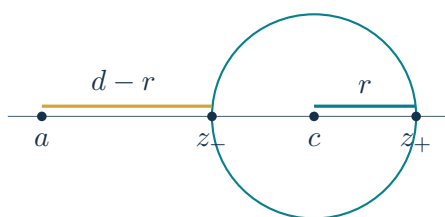
Si $d > 0$, les deux extrema sont atteints sur la droite qui relie a au centre c .

Preuve par les inégalités triangulaires

L'inégalité triangulaire donne $|z - a| \leq |z - c| + |c - a| = r + d$. En l'appliquant dans les deux sens, on obtient $|z - a| \geq d - r$ et $|z - a| \geq r - d$, donc $|z - a| \geq |d - r|$. Pour montrer que les bornes sont atteintes, supposons $d > 0$ et posons $u = (c - a)/d$, de module 1. Alors les points

$$z_- = c - ru, \quad z_+ = c + ru$$

appartiennent au cercle et vérifient $z_- - a = (d - r)u$, $z_+ - a = (d + r)u$. Les modules sont bien les valeurs annoncées.



PIÈGE / Un cercle n'est pas un disque

Si le point a est à l'intérieur du cercle, la distance minimale au *cercle* vaut $r - d$, pas 0. La distance au disque fermé serait nulle. Si $a = c$, toutes les distances au cercle valent r .

Application immédiate

Sur $|z - (2 + 3i)| = r$, la distance au point $-1 - i$ varie entre $|5 - r|$ et $5 + r$, car $|(2 + 3i) - (-1 - i)| = |3 + 4i| = 5$.

10 / PROBLÈME GUIDÉ

Quand les vecteurs changent de sens

Énoncé

Sur le cercle $|z - (2 + 3i)| = r$, avec $r > 0$, soient z_- et z_+ les affixes des points les plus proche et le plus éloigné de $a = -1 - i$. Pour quelles valeurs de r a-t-on

$$\operatorname{Arg} \left(\frac{z_- - a}{z_+ - (2 + 3i)} \right) = 0 ?$$

1. Construire un vecteur unitaire

Le vecteur allant de a au centre $c = 2 + 3i$ est $c - a = 3 + 4i$. Sa longueur vaut 5. Posons donc $u = (3 + 4i)/5$. Les formules de la page précédente donnent

$$z_- = c - ru, \quad z_+ = c + ru.$$

Le dénominateur vaut ru , qui n'est pas nul puisque $r > 0$.

2. Réduire le quotient à un réel

Comme $c - a = 5u$, on obtient

$$\frac{z_- - a}{z_+ - c} = \frac{(5 - r)u}{ru} = \frac{5 - r}{r}.$$

L'argument principal d'un réel non nul vaut 0 s'il est positif et π s'il est négatif. Ainsi

$$0 < r < 5.$$

3. Examiner les deux autres situations

Pour $r = 5$, le point a se trouve sur le cercle et $z_- = a$: le quotient est nul, donc son argument n'est pas défini. Pour $r > 5$, a est à l'intérieur du cercle et le vecteur $z_- - a$ s'inverse ; le quotient devient négatif.

ASTUCE / Un schéma peut annoncer le changement de signe

Tracer la droite passant par le point fixe et le centre. Quand le rayon dépasse la distance entre ces deux points, le point le plus proche passe de l'autre côté du point fixe.

PIÈGE / Ne pas simplifier une condition d'angle en simple alignement

L'alignement reste vrai pour toutes les valeurs de r . La condition « argument nul » impose en plus un même sens et un vecteur non nul.

11 / ARGUMENT PRINCIPAL

Atteindre l'angle maximal

On conserve le cercle $|z - (2 + 3i)| = r$, avec $r > 0$. Avec la convention $\text{Arg } z \in]-\pi, \pi]$, la plus grande valeur possible est π .

Question

Pour quelles valeurs de r existe-t-il un point du cercle dont l'argument principal est exactement π ?

Une condition géométrique précise

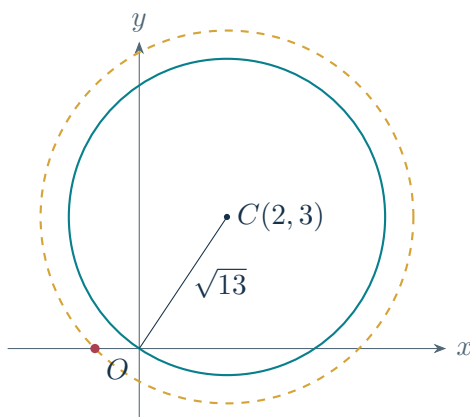
Il faut rencontrer le demi-axe réel *strictement négatif*. Écrire $z = x \in \mathbb{R}$, $x < 0$, dans l'équation du cercle donne

$$(x - 2)^2 + 9 = r^2.$$

S'il existe des intersections avec l'axe réel, la plus à gauche est $x = 2 - \sqrt{r^2 - 9}$. Elle est négative exactement lorsque

$$\sqrt{r^2 - 9} > 2 \iff r^2 > 13.$$

$$r > \sqrt{13}.$$



PIÈGE / L'égalité ne convient pas

Pour $r = \sqrt{13}$, l'intersection gauche est l'origine. Or $\text{Arg } 0$ n'existe pas. Il faut donc une inégalité stricte. Le seuil est $\sqrt{13}$, et non 13.

Maximum et borne supérieure

Pour $0 < r < \sqrt{13}$, si $\varphi = \text{Arg}(2 + 3i)$, le maximum vaut $\varphi + \arcsin(r/\sqrt{13})$. À $r = \sqrt{13}$, la borne supérieure devient $\varphi + \pi/2$, mais elle n'est pas atteinte : elle correspond à la tangente au cercle à l'origine.

12 / GÉOMÉTRIE

Démontrer l'équation d'une tangente

Soit le cercle $|z| = R$, avec $R > 0$, et un point A d'affixe a sur ce cercle. Le rayon OA est orthogonal à la tangente en A .

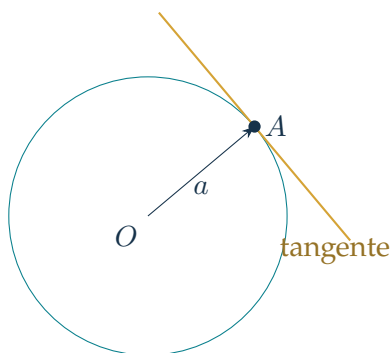
THÉORÈME / Trois écritures de la même droite

La tangente en a est donnée par chacune des relations

$$\operatorname{Re}((z - a)\bar{a}) = 0, \quad \operatorname{Re}(z\bar{a}) = R^2, \quad z\bar{a} + \bar{z}a = 2R^2.$$

Démonstration

Le vecteur $\overrightarrow{AM}$ a pour affixe $z - a$ et le vecteur $\overrightarrow{OA}$ a pour affixe a . Leur produit scalaire est nul exactement lorsque $\operatorname{Re}((z - a)\bar{a}) = 0$. Puis $a\bar{a} = R^2$ donne les deux autres écritures.


Exemple numérique

Pour le cercle $|z| = 5$ et $a = 3 + 4i$, écrire $z = x + iy$ donne $\operatorname{Re}(z\bar{a}) = 3x + 4y$. La tangente est donc

$$3x + 4y = 25.$$

Le point $(3, 4)$ vérifie bien l'équation ; un vecteur directeur est $(-4, 3)$, orthogonal au rayon $(3, 4)$.

ASTUCE / Cercle décentré

Pour $|z - c| = R$ et $|a - c| = R$, remplacer z et a par $z - c$ et $a - c$: la tangente devient $\operatorname{Re}((z - c)\overline{(a - c)}) = R^2$.

13 / ÉQUIVALENCES

Une droite, plusieurs formulations

Reprenons le cercle $|z| = R > 0$ et un point de contact a . Puisque $a \neq 0$, on peut diviser par a .

THÉORÈME / Forme paramétrique de la tangente

$$\frac{z-a}{a} \in i\mathbb{R} \iff z = a(1+it), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Cette écriture inclut le point de contact, obtenu pour $t = 0$.

Passer par la conjugaison

Un nombre w est imaginaire pur, zéro compris, si $w + \bar{w} = 0$. Ainsi

$$\frac{z-a}{a} + \frac{\bar{z}-\bar{a}}{\bar{a}} = 0$$

est encore l'équation de la tangente. Multiplier par $a\bar{a}$ conduit à $z\bar{a} + \bar{z}a = 2R^2$.

Que change un signe moins ?

La condition

$$\frac{z-a}{a} - \frac{\bar{z}-\bar{a}}{\bar{a}} = 0$$

impose que $(z-a)/a$ soit réel. Elle décrit la droite passant par O et A , c'est-à-dire la droite du rayon, et non la tangente.

PIÈGE / La formulation par argument retire un point

$$\text{Arg}\left(\frac{z-a}{a}\right) \in \{-\pi/2, \pi/2\}$$

décrit la tangente *privée de* A . Pour obtenir toute la tangente, il faut ajouter $z = a$, ou utiliser directement une condition de partie réelle nulle.

Vérifier une paramétrisation

Pour $a = 3 + 4i$, la formule $z = (3 + 4i)(1 + it)$ donne $x = 3 - 4t$, $y = 4 + 3t$. Alors $3x + 4y = 9 - 12t + 16 + 12t = 25$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

ASTUCE / Pour comparer deux équations

Transformer chacune en une condition géométrique simple, puis comparer leurs domaines. Deux formules presque identiques peuvent décrire des ensembles qui diffèrent d'un point.

14 / SYSTÈMES

Compter les intersections avant de résoudre

Un système associant un module et un angle impose à un même point de se trouver sur deux lieux géométriques. Le nombre de solutions se lit souvent comme un nombre d'intersections.

Un modèle réel simple

Étudier les points (x, y) qui vérifient

$$\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{9}, \quad x = k,$$

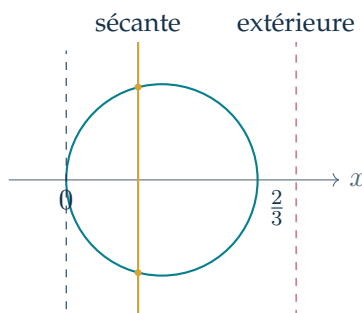
où $k \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

Substitution et signe

On obtient

$$y^2 = \frac{1}{9} - \left(k - \frac{1}{3}\right)^2 = k \left(\frac{2}{3} - k\right).$$

Il y a donc deux solutions si $0 < k < 2/3$, une si $k = 0$ ou $k = 2/3$, et aucune sinon.



La méthode distance-centre

La distance du centre $(1/3, 0)$ à la droite $x = k$ vaut $|k - 1/3|$. La comparer au rayon $1/3$ donne exactement les trois situations précédentes : sécante, tangente ou extérieure.

PIÈGE / Le système initial peut interdire un point d'intersection

Le décompte ci-dessus concerne les deux équations écrites dans l'encadré. Si la droite provient d'un argument ou d'un quotient, il faut encore retirer les points où cette expression n'est pas définie.

15 / PROBLÈME GUIDÉ

La normalisation révèle le bon intervalle

Énoncé

Soient $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq b$, et $k \in \mathbb{R}$. Déterminer le nombre de solutions z de

$$|3z - a - 2b| = |a - b|, \quad \text{Arg} \left(\frac{a - b}{z - [ka + (1 - k)b]} \right) \in \{-\pi/2, \pi/2\}.$$

1. Choisir des coordonnées adaptées

Posons $w = (z - b)/(a - b)$. Cette transformation est bijective ; elle envoie b sur 0 et a sur 1. La première équation devient

$$|3w - 1| = 1 \iff \left| w - \frac{1}{3} \right| = \frac{1}{3}.$$

Comme $ka + (1 - k)b = b + k(a - b)$, le quotient de la seconde équation est $1/(w - k)$.

2. Traduire la condition d'angle

L'argument vaut $\pm\pi/2$ exactement lorsque $w - k$ est imaginaire pur *non nul*. Écrivons $w = k + iy$, avec $y \neq 0$. Le cercle donne

$$y^2 = k \left(\frac{2}{3} - k \right).$$

Pour que y soit réel et non nul, il faut et il suffit que $0 < k < 2/3$.

Deux solutions pour $0 < k < \frac{2}{3}$; aucune sinon.

3. Écrire les solutions, si on les demande

$$z = b + (a - b) \left(k \pm i \sqrt{k \left(\frac{2}{3} - k \right)} \right).$$

PIÈGE / Pourquoi n'y a-t-il pas de solution aux bornes ?

Pour $k = 0$ ou $k = 2/3$, la droite géométrique est tangente au cercle. Mais son unique point d'intersection vérifie $w = k$, donc le dénominateur du quotient est nul. Le système original n'a aucune solution à ces deux bornes.

ASTUCE / Normaliser n'est pas supposer un cas particulier

La variable w conserve l'information et simplifie simultanément les deux contraintes. Une transformation bijective donne une équivalence exacte des systèmes.

16 / CHANGER DE REGARD

Un module peut décrire une parabole

Lieu à identifier

Déterminer l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que

$$\operatorname{Re} z - 2 = |z - 7 + 2i|.$$

1. Écrire une équation cartésienne

Posons $z = x + iy$. Le membre de droite est positif ou nul, donc $x \geq 2$. En élevant au carré,

$$(x - 2)^2 = (x - 7)^2 + (y + 2)^2$$

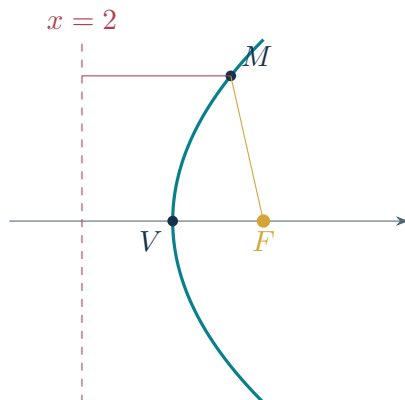
et, après simplification,

$$(y + 2)^2 = 10 \left(x - \frac{9}{2} \right).$$

Réciproquement, cette équation impose $x \geq 9/2$, donc $x - 2 > 0$: le retour à l'égalité de départ est justifié.

2. Lire la géométrie

Le sommet est $V(9/2, -2)$. Dans la forme $Y^2 = 4pX$, avec $X = x - 9/2$, $Y = y + 2$, on a $p = 5/2$. Le foyer est $F(7, -2)$ et la directrice est $x = 2$.



THÉORÈME / La définition apparaît déjà dans le module

$|z - (7 - 2i)|$ est la distance au foyer. Pour $x \geq 2$, $x - 2$ est la distance à la droite $x = 2$. La relation exprime donc l'égalité des distances au foyer et à la directrice.

17 / PARAMÉTRAGE

La parabole devient une variable réelle

Dans un repère adapté, considérons $Y^2 = 4pX$, avec $p > 0$.

THÉORÈME / Un paramétrage complet

Tous les points de cette parabole, et eux seuls, s'écrivent

$$P(t) = (pt^2, 2pt), \quad t \in \mathbb{R}.$$

La tangente au point $P(t)$ a pour équation $X - tY + pt^2 = 0$.

Pourquoi ce paramétrage est-il complet ?

Si $P = (X, Y)$ appartient à la parabole, poser $t = Y/(2p)$ donne $Y = 2pt$ et $X = Y^2/(4p) = pt^2$. Il n'y a donc ni perte ni ajout de points.

Démontrer l'équation de la tangente

Un vecteur tangent est $P'(t) = (2pt, 2p)$, jamais nul. Un vecteur normal est $(1, -t)$. La droite passant par $(pt^2, 2pt)$ et de normale $(1, -t)$ vérifie

$$X - pt^2 - t(Y - 2pt) = 0,$$

soit $X - tY + pt^2 = 0$. Pour $t = 0$, elle devient $X = 0$, la tangente verticale au sommet ; la formule reste valable.

Tangentes issues d'un point de la directrice

Un point $D = (-p, s)$ appartient à la tangente de paramètre t si

$$-p - ts + pt^2 = 0 \iff t^2 - \frac{s}{p}t - 1 = 0.$$

Cette équation a deux racines réelles distinctes t, u , car son discriminant vaut $(s/p)^2 + 4 > 0$. Leurs relations sont

$$t + u = \frac{s}{p}, \quad tu = -1.$$

ASTUCE / Travailler avec la somme et le produit

Les paramètres des points de contact n'ont pas besoin d'être calculés séparément. Les deux relations de Viète suffisent pour démontrer l'orthogonalité et étudier la corde qui les joint.

18 / DÉMONSTRATION

Pourquoi l'angle droit impose les tangentes

Soient $D = (-p, s)$ sur la directrice et deux points $P(t), P(u)$ de la parabole $Y^2 = 4pX$. Posons $d = s/p$.

Calculer le produit scalaire

Les deux vecteurs sont

$$\overrightarrow{DP(t)} = p(t^2 + 1, 2t - d), \quad \overrightarrow{DP(u)} = p(u^2 + 1, 2u - d).$$

Leur produit scalaire, divisé par p^2 , vaut

$$\begin{aligned} (t^2 + 1)(u^2 + 1) + (2t - d)(2u - d) \\ = (tu + 1)^2 + (t + u - d)^2. \end{aligned}$$

THÉORÈME / Une somme de carrés décisive

$$DP(t) \perp DP(u) \iff tu = -1 \text{ et } t + u = s/p.$$

Ces relations caractérisent exactement les deux paramètres des tangentes issues de D .

Une réciproque réellement démontrée

Une somme de carrés réels est nulle seulement lorsque chacun est nul. Les paramètres t, u satisfont donc l'équation $T^2 - (s/p)T - 1 = 0$, obtenue à la page précédente pour les tangentes. Ils sont distincts puisque $tu = -1$ interdit $t = u \in \mathbb{R}$.

Pourquoi la corde passe-t-elle par le foyer ?

La droite joignant $P(t)$ à $P(u)$ a pour équation

$$X - \frac{t+u}{2}Y + ptu = 0.$$

En remplaçant tu par -1 , elle devient $X - (t+u)Y/2 - p = 0$. Le foyer $(p, 0)$ appartient bien à cette droite.

ASTUCE / Le résultat géométrique complet

Depuis un point de la directrice, les deux tangentes à la parabole sont perpendiculaires, et leur corde de contact passe par le foyer.

PIÈGE / Une figure ne remplace pas la réciproque

Constater que deux tangentes donnent un angle droit ne prouve pas que tous les couples donnant un angle droit sont des tangentes. Ici, l'identité en somme de carrés établit précisément cette réciproque.

19 / PROBLÈME GUIDÉ

Une longueur minimale égale à 10

Énoncé

Les points P, Q sont sur $(y + 2)^2 = 10(x - 9/2)$. Le point D a pour affixe $2 + i\alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $DP \perp DQ$, déterminer la plus petite longueur possible de PQ .

1. Se placer dans le repère du sommet

En posant $X = x - 9/2$, $Y = y + 2$, on a $p = 5/2$ et $D = (-p, s)$ avec $s = \alpha + 2$. Les paramètres des points P, Q vérifient $t + u = s/p$ et $tu = -1$.

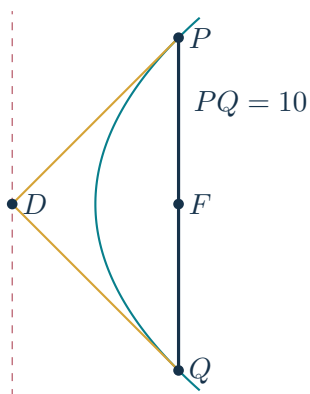
2. Calculer la longueur de la corde

$$\begin{aligned} PQ &= p\sqrt{(t^2 - u^2)^2 + 4(t - u)^2} \\ &= p|t - u|\sqrt{(t + u)^2 + 4}. \end{aligned}$$

Or $(t - u)^2 = (t + u)^2 - 4tu = (t + u)^2 + 4$. Par conséquent,

$$PQ = p((t + u)^2 + 4) = 4p + \frac{s^2}{p} = 10 + \frac{2}{5}(\alpha + 2)^2.$$

$$PQ_{\min} = 10, \quad \text{atteint pour } \alpha = -2.$$



À l'égalité, $P = (7, 3)$, $Q = (7, -7)$ et le foyer est leur milieu. Cette corde focale perpendiculaire à l'axe est la corde focale minimale.

20 / PROBLÈME GUIDÉ

La seconde intersection d'une hauteur

Soit un triangle non dégénéré ABC inscrit dans $|z| = R > 0$, d'affixes a, b, c . La droite passant par A et perpendiculaire à (BC) recoupe le cercle en P .

THÉORÈME / Affixe de la seconde intersection

Si cette droite n'est pas tangente au cercle en A , alors

$$p = -\frac{bc}{a}.$$

Si $a^2 = -bc$, la même formule donne $p = a$: l'intersection est double et il n'y a pas de second point distinct.

Démonstration

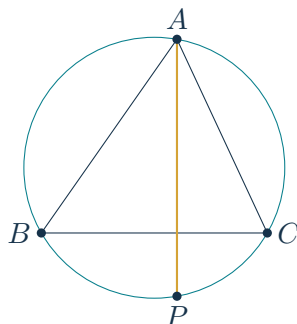
Sur le cercle, $\bar{a} = R^2/a$, et de même pour b, c, p . L'orthogonalité s'écrit

$$\frac{p-a}{c-b} + \frac{\bar{p}-\bar{a}}{\bar{c}-\bar{b}} = 0.$$

Après substitution des conjugués, le membre de gauche devient

$$\frac{p-a}{c-b} \left(1 + \frac{bc}{pa} \right).$$

Pour le second point distinct de A , le facteur $p-a$ n'est pas nul. On obtient donc $pa + bc = 0$. Réciproquement, $p = -bc/a$ a bien pour module R et satisfait l'orthogonalité.


ASTUCE / Reconnaître des réponses équivalentes

Puisque $|a| = |b| = |c|$, on a aussi $p = -\bar{a}c/\bar{b} = -\bar{a}b/\bar{c}$. Des formules différentes peuvent représenter le même point.

21 / ÉQUATIONS

Trouver une racine sans la calculer

Pour situer une racine, la formule du discriminant n'est pas toujours l'outil le plus efficace. Il suffit parfois d'examiner les signes d'un polynôme en deux points.

THÉORÈME / Théorème des valeurs intermédiaires

Si une fonction f est continue sur $[u, v]$ et $f(u)f(v) < 0$, elle possède au moins une racine dans $]u, v[$. Si le produit est seulement négatif ou nul, on garantit une racine dans $[u, v]$.

Trois équations liées

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$a\alpha^2 + b\alpha + c = 0, \quad -a\beta^2 + b\beta + c = 0.$$

Montrer que $f(x) = \frac{a}{2}x^2 + bx + c$ possède une racine entre α et β , extrémités comprises.

Évaluer en utilisant les équations déjà connues

Comme $b\alpha + c = -a\alpha^2$, on a $f(\alpha) = -a\alpha^2/2$. De même, $b\beta + c = a\beta^2$ donne $f(\beta) = 3a\beta^2/2$. Donc

$$f(\alpha)f(\beta) = -\frac{3a^2\alpha^2\beta^2}{4} \leq 0.$$

Le polynôme f est continu. Si $\alpha \neq \beta$, le théorème s'applique sur l'intervalle dont elles sont les extrémités. Si $\alpha = \beta$, les deux équations imposent $\alpha = \beta = 0$ et $c = 0$, ce qui donne directement une racine.

$$\boxed{\exists \gamma : f(\gamma) = 0, \quad \min(\alpha, \beta) \leq \gamma \leq \max(\alpha, \beta).}$$

ASTUCE / Le produit des signes évite quatre cas

Il n'est pas nécessaire de distinguer $a > 0$, $a < 0$, $\alpha < \beta$ et $\beta < \alpha$. Le produit $f(\alpha)f(\beta)$ contient toute l'information utile.

PIÈGE / Un carré peut être nul

$a \neq 0$ ne suffit pas à rendre les signes strictement opposés : il faut également $\alpha\beta \neq 0$. Dans ce cas seulement, on conclut que la racine garantie est strictement entre les deux nombres.

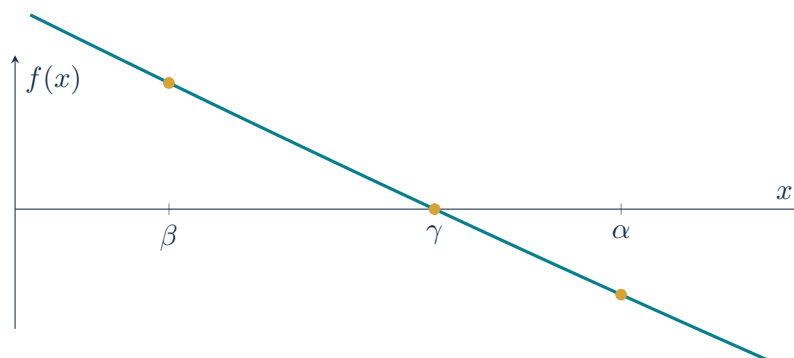
22 / CAS LIMITES

Distinguer « entre » et « strictement entre »

Un exemple où la racine est strictement intérieure

Prenons $a = 1$, $b = -5$, $c = 4$. Une racine de $x^2 - 5x + 4$ est $\alpha = 1$. Une racine de $-x^2 - 5x + 4$ est $\beta = (-5 + \sqrt{41})/2$. Les deux nombres sont non nuls. La fonction $f(x) = x^2/2 - 5x + 4$ possède donc une racine dans $] \beta, 1[$. En la calculant uniquement pour contrôler le résultat, on trouve

$$\beta \simeq 0,70156 < \gamma = 5 - \sqrt{17} \simeq 0,87689 < 1.$$



Un contre-exemple à une conclusion trop forte

Prenons $a = 1$, $b = -1$, $c = 0$, $\alpha = 0$ et $\beta = -1$. Ces choix vérifient bien les deux équations de la page précédente. Pourtant,

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - x = \frac{1}{2}x(x - 2)$$

n'a aucune racine dans $] -1, 0[$. La racine garantie dans $[-1, 0]$ est l'extrémité 0.

THÉORÈME / Conclusion exacte à retenir

L'existence d'une racine dans l'intervalle fermé est toujours garantie sous les hypothèses données.
L'existence dans l'intervalle ouvert est garantie dès que $\alpha\beta \neq 0$.

ASTUCE / Tester les cas nuls avant de conclure

Quand une preuve utilise le signe d'un carré, commencer par vérifier si ce carré peut être nul. Cette habitude évite de transformer une inégalité large en inégalité stricte.

23 / POLYNÔMES

Des produits sans calculer les racines

Soit un polynôme unitaire $P(x) = \prod_{j=1}^n (x - r_j)$, dont les racines complexes sont comptées avec leur multiplicité.

THÉORÈME / Évaluer le polynôme au bon endroit

$$\prod_{j=1}^n (r_j - u) = (-1)^n P(u), \quad \prod_{j=1}^n (r_j^2 - u^2) = P(u)P(-u).$$

La seconde identité vient de la première appliquée à u et $-u$: les deux facteurs $(-1)^n$ se compensent.

Problème guidé

Soient $r_1, \dots, r_5$ les racines de $P(x) = x^5 + x^2 + 1$, et $g(x) = x^2 - 2$. Calculer

$$E = \prod_{j=1}^5 g(r_j) - 30g\left(\prod_{j=1}^5 r_j\right).$$

1. Le produit des racines

Par les relations de Viète, $\prod r_j = (-1)^5 \cdot 1 = -1$. Par conséquent, $g(\prod r_j) = g(-1) = 1 - 2 = -1$.

2. Le produit des valeurs

Choisir $u = \sqrt{2}$ donne

$$\prod (r_j^2 - 2) = P(\sqrt{2})P(-\sqrt{2}).$$

Or $P(\sqrt{2}) = 4\sqrt{2} + 3$ et $P(-\sqrt{2}) = -4\sqrt{2} + 3$. On obtient $9 - 32 = -23$, puis

$$E = -23 - 30(-1) = 7.$$

PIÈGE / Produit d'images et image d'un produit

Les valeurs $\prod g(r_j)$ et $g(\prod r_j)$ sont différentes. Leurs écritures se ressemblent, mais les opérations n'ont pas le même ordre.

ASTUCE / Ne pas résoudre une équation inutilement

Les racines d'un polynôme de degré cinq peuvent être difficiles à écrire. Pour une expression symétrique, des évaluations de P et les relations de Viète suffisent souvent.

24 / AUTRE MÉTHODE

L'équation des racines transformées

On reprend $P(x) = x^5 + x^2 + 1$ et l'on cherche le produit des nombres $s_j = r_j^2 - 2$.

1. Éliminer l'ancienne variable

Pour une racine r , on a $r^5 = -(r^2 + 1)$. En élevant au carré, $r^{10} = (r^2 + 1)^2$. Si $y = r^2 - 2$, cette relation devient

$$(y + 2)^5 = (y + 3)^2.$$

Les nombres s_j sont donc racines du polynôme unitaire

$$Q(y) = (y + 2)^5 - (y + 3)^2.$$

2. Justifier qu'on a la bonne liste de racines

Une simple élévation au carré peut ajouter des solutions. Ici, on peut établir l'identité de factorisation directement. En posant formellement $t^2 = y + 2$,

$$\begin{aligned} -P(t)P(-t) &= t^{10} - (t^2 + 1)^2 \\ &= \prod_{j=1}^5 (t^2 - r_j^2) \\ &= \prod_{j=1}^5 (y - s_j). \end{aligned}$$

Le membre de gauche vaut exactement $Q(y)$. L'identité prouve que Q possède les racines transformées avec leurs multiplicités.

3. Ne calculer que ce qui est nécessaire

Pour obtenir le produit des racines de Q , seuls son degré, son coefficient dominant et son terme constant comptent. Ici,

$$Q(0) = 2^5 - 3^2 = 23, \quad \deg Q = 5,$$

donc

$$\prod_{j=1}^5 s_j = (-1)^5 Q(0) = -23.$$

ASTUCE / Choisir entre deux méthodes

Pour le seul produit, $P(\sqrt{2})P(-\sqrt{2})$ est le chemin le plus court. Construire Q devient utile si l'on cherche également la somme ou d'autres relations entre les racines transformées.

25 / SYMÉTRIE ALGÈBRE

Un quatrième degré cachant un second degré

Considérons le polynôme

$$P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Ses coefficients sont symétriques. On l'appelle un polynôme *réciroque* : $x^4 P(1/x) = P(x)$ pour $x \neq 0$.

THÉORÈME / La bonne substitution

0 n'est pas racine puisque $P(0) = 1$. Diviser par x^2 puis poser $t = x + 1/x$ donne

$$P(x) = 0 \iff t^2 + at + b - 2 = 0, \quad x^2 - tx + 1 = 0.$$

Démonstration détaillée

$$\frac{P(x)}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} + a \left(x + \frac{1}{x} \right) + b.$$

Comme $(x+1/x)^2 = x^2 + 2 + 1/x^2$, on a $x^2 + 1/x^2 = t^2 - 2$. L'équation devient donc $Q(t) = t^2 + at + b - 2 = 0$. Ensuite, multiplier $x + 1/x = t$ par x permet de revenir à la variable initiale.

Exemple entièrement factorisé

Pour $P(x) = x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1$, l'équation en t est

$$t^2 - 5t + 6 = (t - 2)(t - 3) = 0.$$

Si $t = 2$, on obtient $(x - 1)^2 = 0$. Si $t = 3$, les racines sont $(3 \pm \sqrt{5})/2$. Ainsi

$$P(x) = (x - 1)^2(x^2 - 3x + 1).$$

PIÈGE / Le vocabulaire compte

Un polynôme biquadratique ne contient que les puissances x^4, x^2 et une constante. Ici, les termes ax^3 et ax peuvent être présents : « réciroque » est le terme adapté.

ASTUCE / Un contrôle immédiat

Les racines viennent par paires réciroques : si $x \neq 0$ est racine, $1/x$ l'est aussi. Le produit de chaque paire issue de $x^2 - tx + 1$ vaut 1.

26 / RETOUR À LA VARIABLE

Revenir à la variable initiale

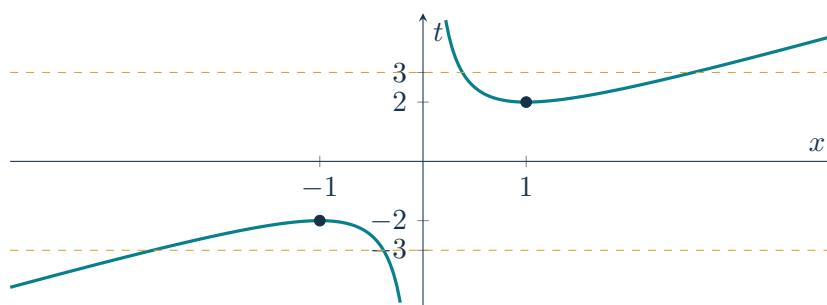
THÉORÈME / Image et nombre de solutions réelles

Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, le nombre $t = x + 1/x$ appartient à $] -\infty, -2] \cup [2, +\infty[$. Plus précisément :

Valeur de t	Solutions de $x^2 - tx + 1 = 0$
$t > 2$	deux positives distinctes
$t = 2$	$x = 1$, racine double
$-2 < t < 2$	aucune solution réelle
$t = -2$	$x = -1$, racine double
$t < -2$	deux négatives distinctes

Preuve courte

Le discriminant est $t^2 - 4$. Quand il est positif, le produit des deux racines vaut 1, donc elles ont le même signe ; leur somme t donne ce signe. Aux seuils $t = \pm 2$, les deux racines se confondent.



La dérivée confirme la figure

Pour $h(x) = x + 1/x$, $h'(x) = 1 - 1/x^2$. Sur les réels positifs, h décroît jusqu'à $h(1) = 2$, puis croît. Sur les réels négatifs, son maximum est $h(-1) = -2$.

PIÈGE / Une racine réelle en t ne donne pas forcément de racine réelle en x

Si $t = 0$, le retour donne $x^2 + 1 = 0$. Les solutions sont complexes, même si l'équation intermédiaire avait une racine réelle.

27 / RACINES DOUBLES

Deux mécanismes de multiplicité

Si les racines de $Q(t) = t^2 + at + b - 2$ sont t_1, t_2 , comptées avec multiplicité, alors

$$P(x) = (x^2 - t_1x + 1)(x^2 - t_2x + 1).$$

Cette factorisation permet de distinguer les sources de racines multiples.

THÉORÈME / Deux possibilités différentes

1. Un t_j simple vaut 2 ou -2 : le facteur correspondant est $(x - 1)^2$ ou $(x + 1)^2$.
2. Q possède une racine double t_0 : alors $P(x) = (x^2 - t_0x + 1)^2$.

Dans le second cas, si $|t_0| > 2$, deux racines réelles distinctes sont chacune doubles ; si $t_0 = \pm 2$, on obtient une racine quadruple en ± 1 .

Exemples à comparer

$$\begin{aligned} x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x + 1 &= (x^2 - 3x + 1)^2, \\ x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 &= (x - 1)^4. \end{aligned}$$

Dans le premier cas, $Q(t) = (t - 3)^2$ et les deux nombres $(3 \pm \sqrt{5})/2$ sont doubles. Dans le second, $Q(t) = (t - 2)^2$ et la seule racine est 1, de multiplicité quatre.

Compter les racines distinctes

Pour deux valeurs $t_1 \neq t_2$, les solutions en x obtenues sont disjointes : un même $x \neq 0$ ne peut pas donner deux valeurs différentes de $x + 1/x$.

ASTUCE / Quatre racines réelles distinctes

Il faut et il suffit que Q ait deux racines réelles distinctes, toutes les deux dans $] -\infty, -2[\cup]2, +\infty[$. Les valeurs ± 2 donneraient des racines répétées.

PIÈGE / « Deux racines égales positives » ne signifie pas toujours $x = 1$

Le premier exemple fournit des racines positives doubles différentes de 1. Il faut lire les autres contraintes de l'énoncé avant de choisir le mécanisme de multiplicité.

28 / PROBLÈME GUIDÉ

Une racine positive double et deux négatives

Énoncé

Déterminer les réels a, b pour lesquels

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$$

possède une racine positive double et deux racines négatives distinctes. Quelle est alors la plus petite valeur entière de a ?

1. Exploiter la symétrie réciproque

Une racine positive $r \neq 1$ imposerait aussi la racine positive $1/r$, de même multiplicité. Deux racines positives doubles occuperaient déjà les quatre places. Le scénario demandé impose donc une racine double en 1. Il faut alors que $t = 2$ soit racine de $Q(t) = t^2 + at + b - 2$:

$$4 + 2a + b - 2 = 0 \iff b = -2a - 2.$$

2. Placer la deuxième racine de Q

La somme de ses racines vaut $-a$, donc l'autre racine est $t_2 = -a - 2$. Pour obtenir deux racines négatives distinctes, il faut et il suffit que $t_2 < -2$, soit $a > 0$.

3. Vérifier la réciproque

Si $a > 0$ et $b = -2a - 2$, on dispose de la factorisation

$$P(x) = (x - 1)^2(x^2 + (a + 2)x + 1).$$

Le dernier facteur a un discriminant $(a + 2)^2 - 4 = a(a + 4) > 0$, une somme des racines négative et un produit positif : ses deux racines sont négatives distinctes.

$$a > 0, \quad b = -2a - 2; \quad a_{\min \text{ entier}} = 1.$$

Pour $a = 1$, on a $b = -4$ et les racines sont 1 (double), $(-3 - \sqrt{5})/2$ et $(-3 + \sqrt{5})/2$.

PIÈGE / La valeur frontière

Pour $a = 0$, on obtient $(x^2 - 1)^2$. La racine négative -1 est alors double : la condition « deux négatives distinctes » n'est plus satisfaite.

29 / S'ENTRAÎNER

Exercices 1 à 6

Chercher d'abord sans regarder les corrigés. Pour chaque exercice, indiquer l'identité ou le résultat géométrique choisi.

Exercice 1 · Niveau 1 · Module et quotient

- a) Mettre $(2 + i)/(1 - 2i)$ sous forme algébrique.
 b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système $|z| = z$ et $|z - (1 + 2i)| = \sqrt{8}$.

Exercice 2 · Niveau 1 · Racines septièmes

Soit $\zeta = e^{2i\pi/7}$. Calculer

$$A = \sum_{k=1}^6 \zeta^{3k}, \quad B = \sum_{k=1}^6 \zeta^{7k}, \quad C = \sum_{k=1}^6 \cos \frac{4k\pi}{7}.$$

Exercice 3 · Niveau 2 · Un cycle dans une somme double

Pour $\omega = e^{2i\pi/3}$ et $n \geq 1$, poser

$$Z_n = \sum_{r=1}^n r \sum_{p=1}^r \omega^{p-1} - 26\omega.$$

Déterminer tous les n tels que $|Z_n| = Z_n$, puis calculer la somme de ces valeurs.

Exercice 4 · Niveau 2 · Somme pondérée

Calculer exactement $S = \sum_{p=1}^{15} (2p+1)i^p$. Présenter une méthode qui utilise une somme géométrique et un décalage d'indice.

Exercice 5 · Niveau 2 · Pentagone et minimum

Pour $k = 0, \dots, 4$, poser $a_k = 2e^{2ik\pi/5}$ et $D(z) = \sum_{k=0}^4 |z - a_k|^2$. Exprimer $D(z)$ en fonction de $|z|$, calculer $D(3i)$ et déterminer le minimum de D sur $\mathbb{C}$.

Exercice 6 · Niveau 1 · Distance à un point fixe

Le point z décrit le cercle $|z - (1 + 2i)| = 3$. Déterminer le minimum et le maximum de $|z - (5 + 2i)|$, ainsi que les affixes où ils sont atteints.

ASTUCE / Avant de rédiger

Dans l'exercice 3, distinguer le nombre de termes d'une sous-somme et le rang final. Dans l'exercice 6, écrire la distance du point fixe au centre avant toute équation cartésienne.

30 / S'ENTRAÎNER

Exercices 7 à 12

Exercice 7 · Niveau 1 · Tangente

Déterminer la tangente au cercle $|z| = 5$ au point $3+4i$. Donner son équation cartésienne, une paramétrisation et son intersection avec l'axe imaginaire. La condition $\text{Arg}((z-3-4i)/(3+4i)) = \pm\pi/2$ décrit-elle toute la tangente ?

Exercice 8 · Niveau 2 · Un système avec paramètre

Pour $k \in \mathbb{R}$, déterminer le nombre de solutions du système

$$|z-1| = 1, \quad \text{Arg}\left(\frac{1}{z-k}\right) \in \{-\pi/2, \pi/2\}.$$

Donner les solutions lorsqu'elles existent, puis traiter le cas $k = 1$.

Exercice 9 · Niveau 3 · Parabole et angle droit

Identifier le lieu $\text{Re } z - 1 = |z-5|$. Un point D de la directrice a pour affixe $1+i\alpha$. Deux points P, Q du lieu vérifient $DP \perp DQ$. Déterminer PQ en fonction de α et son minimum.

Exercice 10 · Niveau 2 · Hauteur d'un triangle

Sur le cercle unité, prendre $a = i, b = 1, c = (1+i\sqrt{3})/2$. Déterminer l'affixe p de la seconde intersection avec le cercle de la hauteur issue de A . Vérifier directement le module de p et l'orthogonalité.

Exercice 11 · Niveau 2 · Quatre racines réelles

Résoudre $x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 7x + 1 = 0$ dans $\mathbb{R}$. Indiquer le signe des racines et expliquer pourquoi elles sont distinctes.

Exercice 12 · Niveau 3 · Multiplicité imposée

Déterminer tous les réels a, b pour lesquels $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1$ possède une racine négative double et deux racines positives distinctes. Donner la valeur entière de a la plus proche de zéro qui convient et factoriser le polynôme correspondant.

ASTUCE / Ordre de recherche suggéré

Commencer par les exercices 7, 10 et 11 ; poursuivre avec 8 ; réserver 9 et 12 pour une rédaction complète. Dans chaque système contenant un argument, noter immédiatement les points interdits.

31 / CORRIGÉS

Exercices 1, 2 et 3

Exercice 1

On multiplie le numérateur et le dénominateur par $1 + 2i$:

$$\frac{2+i}{1-2i} = \frac{(2+i)(1+2i)}{1+4} = \frac{5i}{5} = \boxed{i}.$$

Pour le système, $|z| = z$ impose $z = x \geq 0$ réel. La seconde condition donne $(x-1)^2 + 4 = 8$, donc $(x-1)^2 = 4$. Les candidats sont $x = 3$ et $x = -1$. Le second ne satisfait pas $x \geq 0$; la seule solution est $\boxed{z = 3}$.

Exercice 2

Le nombre 3 n'est pas multiple de 7, donc $\sum_{k=0}^6 \zeta^{3k} = 0$. En retirant le terme $k = 0$, on trouve $\boxed{A = -1}$. En revanche, $\zeta^{7k} = 1$ pour chaque k , donc $\boxed{B = 6}$. Enfin, la somme $\sum_{k=1}^6 \zeta^{2k}$ vaut -1 . Prendre sa partie réelle donne $\boxed{C = -1}$. On peut aussi en déduire que la somme des sinus correspondants est nulle.

Exercice 3

La somme intérieure vaut successivement $1, 1 + \omega, 0$. La partie imaginaire de Z_n est donc nulle exactement lorsque

$$2 + 5 + 8 + \dots + (3k-1) = 26,$$

où k compte les indices congrus à 2 modulo 3. L'égalité devient $k(3k+1)/2 = 26$, soit

$$(k-4)(3k+13) = 0.$$

Comme $k \geq 0$, on obtient $k = 4$. Le quatrième indice est 11 ; le suivant est 14. Ainsi $\boxed{n \in \{11, 12, 13\}}$ et leur somme vaut $\boxed{36}$. Pour vérifier la positivité, les contributions réelles des indices non divisibles par 3 donnent $Z_{11} = Z_{12} = 48$ et $Z_{13} = 61$. Les trois candidats conviennent bien à $|Z_n| = Z_n$.

PIÈGE / Une seule vérification ne suffit pas

Annuler la partie imaginaire permet d'obtenir un réel. Pour conclure $|Z_n| = Z_n$, il faut encore vérifier que ce réel est positif ou nul.

32 / CORRIGÉS

Exercices 4 et 5

Exercice 4 · Réduire la somme pondérée

Posons $G = \sum_{p=1}^{15} i^p$ et $T = \sum_{p=1}^{15} pi^p$. On cherche $S = 2T + G$. Les douze premiers termes de G forment trois cycles complets. Les trois derniers donnent $G = i - 1 - i = -1$. En alignant T et iT , on obtient

$$\begin{aligned} T &= i + 2i^2 + 3i^3 + \cdots + 15i^{15}, \\ iT &= i^2 + 2i^3 + \cdots + 14i^{15} + 15i^{16}. \end{aligned}$$

Leur différence est $(1 - i)T = G - 15i^{16} = -16$. Ainsi

$$T = \frac{-16}{1 - i} = -8(1 + i), \quad \boxed{S = -17 - 16i}.$$

ASTUCE / Contrôle par blocs

Un bloc de quatre termes de $\sum pi^p$ vaut $2 - 2i$, mais les trois derniers termes sont fortement pondérés. On ne doit donc pas traiter une somme pondérée comme une simple somme de puissances.

Exercice 5 · Faire apparaître le centre

Les points a_k ont pour module 2 et leur somme est nulle. En développant,

$$\begin{aligned} D(z) &= \sum_{k=0}^4 (|z|^2 + 4 - 2 \operatorname{Re}(z \overline{a_k})) \\ &= 5|z|^2 + 20 - 2 \operatorname{Re} \left(z \sum \overline{a_k} \right) \\ &= \boxed{5|z|^2 + 20}. \end{aligned}$$

On en déduit $D(3i) = 5 \cdot 9 + 20 = \boxed{65}$. Comme $|z|^2 \geq 0$, le minimum vaut $\boxed{20}$, atteint uniquement en $z = 0$.

Interprétation

Déplacer le point d'observation augmente la somme des carrés des distances de $5|z|^2$. La symétrie du pentagone place donc le minimum exactement au centre, sans qu'il soit nécessaire de calculer ses diagonales.

33 / CORRIGÉS

Exercices 6 et 7

Exercice 6 · Localiser les deux points extrêmes

Le centre est $c = 1 + 2i$, le rayon vaut $r = 3$ et le point fixe est $a = 5 + 2i$. La distance entre a et c vaut 4. Donc

$$\boxed{\min |z - a| = 1}, \quad \boxed{\max |z - a| = 7}.$$

Le vecteur unitaire orienté de a vers c est $u = (c - a)/4 = -1$. Les points extrêmes sont

$$z_- = c - 3u = \boxed{4 + 2i}, \quad z_+ = c + 3u = \boxed{-2 + 2i}.$$

Vérification directe : $|z_- - c| = |z_+ - c| = 3$, et $|z_- - a| = 1$, $|z_+ - a| = 7$.

Exercice 7 · Toutes les formes de la tangente

Pour $z = x + iy$ et $a = 3 + 4i$, la relation $\operatorname{Re}(z\bar{a}) = 25$ donne

$$\boxed{3x + 4y = 25}.$$

Une paramétrisation est $z = (3 + 4i)(1 + it)$, $t \in \mathbb{R}$, soit

$$\boxed{x = 3 - 4t, \quad y = 4 + 3t}.$$

Sur l'axe imaginaire, $x = 0$, donc $y = 25/4$. L'affixe du point d'intersection est $\boxed{25i/4}$.

Le point manquant dans l'écriture par argument

Au point de contact $z = a$, le quotient $(z - a)/a$ est nul. Son argument n'est pas défini. La condition d'argument décrit donc la tangente privée de a ; la forme paramétrique avec $t \in \mathbb{R}$ ou l'équation cartésienne contient la droite entière.

Un contrôle en une ligne

Le vecteur normal de $3x + 4y = 25$ est $(3, 4)$, qui est le rayon OA . Un vecteur directeur est $(-4, 3)$, et $(3, 4) \cdot (-4, 3) = 0$. La géométrie confirme ainsi le calcul complexe.

ASTUCE / Conserver les domaines pendant les transformations

Une simplification correcte de formule ne garantit pas à elle seule l'égalité de deux lieux : il faut aussi comparer les points pour lesquels chaque formule a un sens.

34 / CORRIGÉ DÉTAILLÉ

Exercice 8 : les bornes sont exclues

Le système est $|z - 1| = 1$ et $\text{Arg}(1/(z - k)) \in \{-\pi/2, \pi/2\}$.

1. Déterminer le domaine

Le quotient exige $z \neq k$. Son numérateur vaut 1, donc il ne peut pas être nul lorsque le dénominateur est défini.

2. Interpréter la condition d'argument

Un quotient d'argument $\pm\pi/2$ est imaginaire pur non nul. Son inverse l'est également. Ainsi $z - k = iy$, avec $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, donc $z = k + iy$. Le cercle impose $(k - 1)^2 + y^2 = 1$, soit

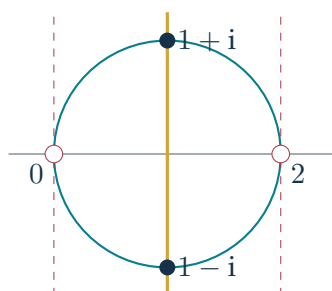
$$y^2 = k(2 - k).$$

3. Trouver la condition nécessaire et suffisante

Il faut un second membre strictement positif, et non simplement positif ou nul : $k(2 - k) > 0$ équivaut à $0 < k < 2$.

$$z = k \pm i\sqrt{k(2 - k)} \quad \text{pour } 0 < k < 2.$$

Il y a alors deux solutions distinctes. Pour toute autre valeur réelle de k , il n'y en a aucune. En particulier, pour $k = 1$, on obtient $z = 1 \pm i$.



PIÈGE / Ce qui se passe pour $k = 0$ ou $k = 2$

La droite verticale est tangente au cercle, mais le point de contact est exactement $z = k$. Il est interdit par le quotient. Le système ne possède donc pas une solution aux bornes : il en possède zéro.

35 / CORRIGÉ DÉTAILLÉ

Exercice 9 : une corde focale minimale

1. Identifier le lieu

Pour $z = x + iy$, l'équation devient $x - 1 = \sqrt{(x - 5)^2 + y^2}$. Elle impose $x \geq 1$. En élevant au carré puis en simplifiant,

$$(x - 1)^2 = (x - 5)^2 + y^2 \iff y^2 = 8(x - 3).$$

Réciproquement, cette dernière relation impose $x \geq 3$, donc le passage au carré n'ajoute aucun point. Le lieu est une parabole de sommet $(3, 0)$, de foyer $(5, 0)$ et de directrice $x = 1$.

2. Paramétrer les points

Dans le repère $X = x - 3$, $Y = y$, l'équation est $Y^2 = 8X$, donc $p = 2$. On peut écrire

$$P(t) = (2t^2, 4t), \quad Q(u) = (2u^2, 4u), \quad D = (-2, \alpha).$$

Les coordonnées sont ici celles du repère translaté. L'identité de la page 20 donne

$$\overrightarrow{DP} \cdot \overrightarrow{DQ} = 4 \left[(tu + 1)^2 + \left(t + u - \frac{\alpha}{2} \right)^2 \right].$$

L'orthogonalité impose donc $tu = -1$ et $t + u = \alpha/2$.

3. Calculer et minimiser

$$\begin{aligned} PQ &= 2|t - u|\sqrt{(t + u)^2 + 4} \\ &= 2((t + u)^2 + 4) \\ &= \boxed{8 + \frac{\alpha^2}{2}}. \end{aligned}$$

Le minimum est $\boxed{8}$, atteint pour $\alpha = 0$. Dans ce cas, les paramètres sont 1 et -1 , donc les points dans le repère initial sont $\boxed{P = (5, 4), Q = (5, -4)}$.

ASTUCE / Vérification géométrique finale

Le segment $[PQ]$ est vertical, son milieu est le foyer $(5, 0)$ et sa longueur vaut $8 = 4p$. Les droites issues de $D = (1, 0)$ vers P, Q ont des pentes 1 et -1 : elles sont bien perpendiculaires.

36 / CORRIGÉ DÉTAILLÉ

Exercice 10 : calculer, puis vérifier

On a $a = i$, $b = 1$ et $c = (1 + i\sqrt{3})/2$. Ces trois affixes sont distinctes et de module 1. Elles définissent un triangle non dégénéré.

1. Appliquer la formule de la hauteur

L'affixe de la seconde intersection est

$$p = -\frac{bc}{a} = -\frac{c}{i} = ic = \boxed{-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}}.$$

Elle est différente de a , donc nous sommes bien dans le cas de deux intersections distinctes.

2. Vérifier l'appartenance au cercle

$$|p|^2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1.$$

Le point P appartient donc au cercle unité.

3. Vérifier l'orthogonalité directement

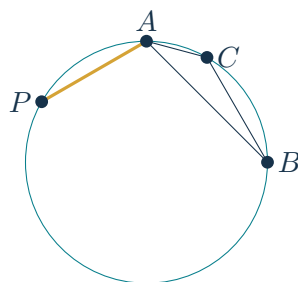
Les vecteurs $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{BC}$ ont pour affixes

$$p - a = \frac{-\sqrt{3} - i}{2}, \quad c - b = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}.$$

Or $i(-1 + i\sqrt{3}) = -\sqrt{3} - i$. Par conséquent,

$$\frac{p - a}{c - b} = \boxed{i}.$$

Le quotient est imaginaire pur non nul, ce qui prouve l'orthogonalité. Il a même pour module 1 : ici, $AP = BC$.



ASTUCE / Un résultat contrôlé par deux contraintes

La formule donne un candidat. Vérifier qu'il appartient au cercle et qu'il est sur la bonne droite confirme qu'il répond à l'énoncé.

37 / CORRIGÉS

Exercices 11 et 12

Exercice 11 · Deux étapes de second degré

Comme le terme constant vaut 1, $x = 0$ est impossible. Diviser par x^2 et poser $t = x + 1/x$ donne

$$t^2 - 7t + 12 = (t - 3)(t - 4) = 0.$$

Pour $t = 3$, les racines sont $(3 \pm \sqrt{5})/2$; pour $t = 4$, elles sont $2 \pm \sqrt{3}$. Ainsi

$$x \in \left\{ \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, 2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3} \right\}.$$

Les deux valeurs de t sont supérieures à 2, donc les quatre racines sont positives. Elles sont distinctes au sein de chaque paire et entre les paires, car un même x ne peut pas donner $t = 3$ et $t = 4$.

Exercice 12 · Inverser les signes du problème guidé

Une racine négative double $r \neq -1$ donnerait aussi la racine négative double $1/r$, ne laissant aucune place aux racines positives. La racine négative double doit donc être -1 , ce qui impose $t = -2$. L'équation en t est $Q(t) = t^2 + at + b - 2$. La relation $Q(-2) = 0$ donne $b = 2a - 2$. Son autre racine vaut $t_2 = 2 - a$; il faut $t_2 > 2$ pour obtenir deux racines positives distinctes. Ainsi

$$a < 0, \quad b = 2a - 2.$$

Ces conditions suffisent, puisque

$$P(x) = (x + 1)^2(x^2 + (a - 2)x + 1).$$

Le second facteur a un discriminant $a(a - 4) > 0$, une somme des racines $2 - a > 0$ et un produit $1 > 0$. La valeur entière de a la plus proche de zéro est $\boxed{-1}$, avec $b = -4$. On obtient

$$P(x) = (x + 1)^2(x^2 - 3x + 1).$$

Les racines sont -1 (double) et $(3 \pm \sqrt{5})/2$ (positives distinctes).

PIÈGE / Vérifier la réciproque

Une condition nécessaire ne constitue pas une résolution complète. La factorisation finale confirme ici le signe, la multiplicité et le nombre de racines demandés.

38 / À RETENIR

La fiche des méthodes essentielles

Ce que l'on reconnaît	Ce qu'il faut essayer
Une égalité $ z = z$	Imposer z réel positif ou nul.
Des puissances de i ou ω	Regrouper selon les restes modulo 4 ou 3.
Une somme de racines de l'unité	Utiliser la somme géométrique ; distinguer l'exposant multiple de l'ordre.
Une somme $\sum pq^p$	Multiplier par q , décaler et soustraire.
Une somme de distances au carré	Développer avec $ z - a ^2$ puis exploiter la somme des affixes.
Un module $ z - c = r$	Lire le centre et le rayon.
Un argument de quotient	Identifier les deux vecteurs, leur angle et les points interdits.
Une tangente à un cercle	Écrire l'orthogonalité au rayon.
Distance à un point = distance à une droite	Reconnaître une parabole.
Des racines qu'on doit situer	Évaluer le polynôme en deux points et comparer les signes.
Un produit $\prod (r_j^2 - u^2)$	Calculer $P(u)P(-u)$, si P est unitaire.
Un quatrième degré réciproque	Diviser par x^2 et poser $t = x + 1/x$.

THÉORÈME / Quatre identités à savoir retrouver

$$|z|^2 = z\bar{z}, \quad \operatorname{Re}(u\bar{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v},$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} |z - e^{2ik\pi/n}|^2 = n(|z|^2 + 1) \quad (n \geq 2),$$

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = x^2 \left[\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + a \left(x + \frac{1}{x}\right) + b - 2 \right] \quad (x \neq 0).$$

ASTUCE / La dernière vérification

Contrôler le domaine, les cas d'égalité, les racines multiples et la réciproque. Une solution courte devient solide lorsque chaque transformation conserve exactement les contraintes du problème.