

MATHS OLYMPIAD

NOMBRES, POLYNÔMES ET ÉQUATIONS

Arithmétique · Algèbre · Raisonnement

Du collège au lycée avancé

$$10\,989 \times 9 = 98\,901$$

Comprendre les structures. Choisir une méthode. Démontrer.

Cours, méthodes et démonstrations

78 exercices progressifs avec corrigés

Cours reformulé · Démonstrations détaillées

Méthodes, astuces et pièges classiques

UN PARCOURS EN DEUX PARTIES

Sommaire général

Partie I · Jeux de nombres et logique

Écriture décimale, permutations, nombres renversés	3
Relations entre chiffres, sommes et produits	9
24 exercices progressifs	15
Corrigés de la partie I	18

Partie II · Polynômes et second degré

Les bases : équation, discriminant et relations de Viète	25
1. Expressions symétriques et formules de Newton	27
2. Nature des racines et paramètres	32
3. Polynômes, restes et identités	37
4. Racines communes et premières substitutions	43
5. Réductions et transformations des racines	49
6. Paraboles, extrema et signes	54
7. Images de fonctions et valeurs interdites	59
8. Position des racines	65
9. Compter les solutions et prolongements	71
Deux fiches de révision générale	79

Comment utiliser ce livre

La partie I est accessible au collège. La partie II va des bases du lycée à des problèmes avancés. Chaque chapitre de cette seconde partie se termine par six exercices et leurs corrigés. Les démonstrations précisent les hypothèses et les cas limites.

Organisation. Les contenus sont réorganisés et reformulés en un cours continu, complété par des rappels, des exemples vérifiés et des exercices d'entraînement. Les symboles α, β désignent des racines ; Δ désigne un discriminant.

COURS 01

L'écriture décimale

Un **chiffre** est l'un des dix symboles $0, 1, \dots, 9$. Un **nombre** peut s'écrire avec un ou plusieurs chiffres. Le chiffre 7 n'a pas la même valeur selon qu'il représente des unités, des dizaines ou des centaines.

La valeur de position

Si a, b, c, d sont des chiffres et $a \neq 0$, alors

$$\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d.$$

La barre indique le nombre formé par les chiffres. Elle ne désigne pas un produit.

Un nombre, plusieurs décompositions

Le nombre 53 789 peut se lire de différentes façons :

$$\begin{aligned} 53\,789 &= 5 \times 10^4 + 3 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 8 \times 10 + 9, \\ &= 5378 \times 10 + 9, \\ &= 537 \times 100 + 89, \\ &= 53 \times 1000 + 789. \end{aligned}$$

Chaque écriture isole un bloc utile. Si le problème porte sur les trois derniers chiffres, la dernière décomposition est souvent la plus efficace.

Dizaines de milliers	Milliers	Centaines	Dizaines	Unités
5	3	7	8	9
50 000	3 000	700	80	9

Séparer deux blocs

Si le bloc de droite contient exactement r positions, alors

$$N = 10^r A + B, \quad 0 \leq B < 10^r.$$

Par exemple, $40\,007 = 40 \times 1000 + 7$. Le bloc final est « 007 » : ses zéros conservent les trois positions.

Piège

$\overline{abc}$ n'est pas $a \times b \times c$. Et $\overline{0bc}$ ne représente pas un nombre à trois chiffres. Le premier chiffre d'un nombre à plusieurs chiffres est toujours non nul.

Réflexe : avant de calculer, choisir les chiffres ou les blocs que l'on souhaite isoler.

COURS 02

Additionner par colonnes

La retenue est une manière pratique de présenter une addition. Pour une démonstration, on peut d'abord additionner les contributions de chaque colonne, puis les multiplier par leur valeur de position.

Exemple guidé

Calculer $378 + 565 + 239$ en regroupant les unités, les dizaines et les centaines.

	Centaines	Dizaines	Unités
378	3	7	8
565	5	6	5
239	2	3	9
Somme des colonnes	10	16	22

Les nombres 10, 16 et 22 ne sont pas les chiffres du résultat. Ce sont des **sommes intermédiaires**. On obtient

$$100 \times 10 + 10 \times 16 + 22 = 1000 + 160 + 22 = \boxed{1182}.$$

Pourquoi est-ce toujours exact ?

L'addition et la multiplication permettent de regrouper les termes :

$$\begin{aligned} & (300 + 70 + 8) + (500 + 60 + 5) + (200 + 30 + 9) \\ &= 100(3 + 5 + 2) + 10(7 + 6 + 3) + (8 + 5 + 9). \end{aligned}$$

On n'a pas supprimé la valeur des retenues : on a simplement reporté leur traitement à la fin du calcul.

L'intérêt pour les olympiades

Lorsque les chiffres sont inconnus, les retenues sont difficiles à prévoir. Additionner les colonnes de façon algébrique permet de travailler directement avec a, b, c et de faire apparaître des facteurs communs.

Forme générale à trois chiffres

Une somme de nombres à trois chiffres vaut

$$100 \times (\text{somme des centaines}) + 10 \times (\text{somme des dizaines}) + (\text{somme des unités}).$$

À essayer : refaire le calcul avec $246 + 357 + 468$. Le corrigé figure dans l'exercice 4.

PROBLÈME GUIDÉ 01

Sommer les permutations

Énoncé

Trois chiffres a, b, c sont distincts et non nuls. On forme les six nombres à trois chiffres qui utilisent chacun ces chiffres une seule fois. Montrer que leur somme est divisible par 37.

Les six nombres sont

$$\overline{abc}, \overline{acb}, \overline{bac}, \overline{bca}, \overline{cab}, \overline{cba}.$$

Compter les apparitions, pas les retenues

Fixons le chiffre a dans la colonne des centaines. Les deux chiffres restants s'ordonnent de deux façons : bc ou cb . Ainsi, a apparaît deux fois dans cette colonne. Le même raisonnement s'applique à chaque chiffre et à chaque colonne.

	Centaines	Dizaines	Unités
Contribution des chiffres	$2(a + b + c)$	$2(a + b + c)$	$2(a + b + c)$
Poids de la colonne	100	10	1

On additionne les contributions pondérées :

$$\begin{aligned} S &= 2(a + b + c)(100 + 10 + 1) \\ &= 222(a + b + c) = 2 \times 3 \times 37(a + b + c). \end{aligned}$$

Donc 37 divise S , quels que soient les trois chiffres autorisés. En fait, S est même toujours divisible par 222.

Vérification sur un exemple

Avec 2, 7, 8, la somme des chiffres vaut 17, d'où

$$278 + 287 + 728 + 782 + 827 + 872 = 222 \times 17 = \boxed{3774}.$$

Une symétrie très rentable

Quand toutes les permutations sont présentes, chaque chiffre joue le même rôle dans chaque position. Remplacer une longue liste de calculs par un comptage des apparitions.

Piège

Si un chiffre vaut zéro ou si deux chiffres sont égaux, il faut adapter le comptage. La formule ci-dessus concerne six nombres distincts à trois chiffres.

COURS 03

Zéro et répétitions

Les formules de comptage sont utiles seulement si leurs conditions sont respectées. Deux questions doivent précéder tout calcul : « Le premier chiffre peut-il être zéro ? » et « Est-ce que deux écritures donnent le même nombre ? »

1. Lorsqu'un chiffre est nul

Avec 0, 2, 7, les arrangements 027 et 072 ne sont pas des nombres à trois chiffres. Il reste

$$207, \quad 270, \quad 702, \quad 720.$$

Leur somme est 1899. On peut aussi partir des six arrangements, interpréter 027 comme 27 et 072 comme 72, puis retrancher ces deux valeurs :

$$S = 222(0 + 2 + 7) - (27 + 72) = 1998 - 99 = 1899.$$

Plus généralement, pour 0, b, c avec b, c non nuls et distincts,

$$S = 222(b + c) - 11(b + c) = \boxed{211(b + c)}.$$

2. Lorsque deux chiffres sont égaux

Avec 1, 1, 2, les nombres distincts sont seulement 112, 121 et 211. Leur somme vaut

$$112 + 121 + 211 = \boxed{444} = 111(1 + 1 + 2).$$

Si l'on distinguait artificiellement les deux chiffres 1, chaque nombre serait compté deux fois. Il faut donc diviser le total des six arrangements par 2.

Deux chiffres égaux, tous non nuls

Avec a, a, b , où $a \neq b$, il existe trois nombres distincts et leur somme vaut $111(2a + b)$.

3. Quatre chiffres distincts et non nuls

Il existe $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ arrangements. Chaque chiffre occupe une position donnée $3 \times 2 \times 1 = 6$ fois. Ainsi,

$$S = 6(a + b + c + d) \times 1111.$$

Compter deux fois n'est pas créer deux nombres

Échanger deux chiffres identiques ne change pas le nombre. On compte ici des nombres distincts, et non les étiquettes que l'on pourrait attribuer à leurs chiffres.

PROBLÈME GUIDÉ 02 · PREMIÈRE PARTIE

Un nombre renversé

Énoncé

Trouver le nombre à cinq chiffres $N = \overline{abcde}$ tel que

$$9 \times \overline{abcde} = \overline{edcba}.$$

Calculer ensuite la somme de ses chiffres. Des chiffres peuvent se répéter.

1. Le premier chiffre est imposé

Le produit $9N$ possède encore cinq chiffres. Donc

$$10\,000 \leq N \leq \left\lfloor \frac{99\,999}{9} \right\rfloor = 11\,111.$$

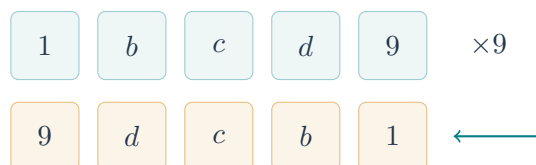
Le chiffre des dizaines de milliers de N est nécessairement $a = 1$.

2. Le dernier chiffre est imposé

Le chiffre des unités de $9N$ vaut $a = 1$. Il faut donc que $9e$ se termine par 1. Parmi les produits $9 \times 0, \dots, 9 \times 9$, seul $9 \times 9 = 81$ convient. Ainsi,

$$e = 9, \quad N = \overline{1bcd9}.$$

La première retenue, après le calcul des unités, vaut 8.



3. Garder la trace des retenues

Chaque nouvelle colonne reçoit la retenue de celle située à droite. Les retenues d'une multiplication par 9 sont des entiers de 0 à 8.

Deux points d'entrée

Commencer par l'ordre de grandeur pour trouver le premier chiffre, puis par les unités pour trouver le dernier. Les contraintes se resserrent ensuite vers le centre.

Autre point de vue : $9N = 10N - N$. Une soustraction posée peut donc remplacer la multiplication. Dans les deux méthodes, les emprunts ou les retenues doivent être justifiés.

PROBLÈME GUIDÉ 02 · SECONDE PARTIE

La preuve complète

Notons r_2, r_3, r_4 les retenues après les dizaines, les centaines et les milliers. Les unités ont déjà donné une retenue égale à 8. La multiplication impose

$$\begin{aligned} 9d + 8 &= b + 10r_2 && \text{(dizaines),} \\ 9c + r_2 &= c + 10r_3 && \text{(centaines),} \\ 9b + r_3 &= d + 10r_4 && \text{(milliers),} \\ 9 + r_4 &= 9 && \text{(dizaines de milliers).} \end{aligned}$$

1. Déterminer b et d

La dernière équation donne $r_4 = 0$. Par conséquent,

$$9b + r_3 = d \leq 9,$$

ce qui impose $b = 0$ ou $b = 1$.

- Si $b = 0$, le produit $9d + 8$ doit se terminer par 0. Cela impose $d = 8$, car $9 \times 8 + 8 = 80$.
- Si $b = 1$, le produit $9d + 8$ doit se terminer par 1. Cela impose $d = 7$, car $9 \times 7 + 8 = 71$. Mais $9b + r_3 \geq 9$ ne peut alors être égal à $d = 7$. Ce cas est impossible.

Ainsi $b = 0$, $d = 8$ et $r_2 = 8$. L'équation des milliers donne aussi $r_3 = 8$.

2. Déterminer c

L'équation des centaines devient

$$9c + 8 = c + 80 \implies 8c = 72 \implies c = 9.$$

Tous les chiffres sont désormais imposés : $N = 10\,989$.

Résultat et vérification

$$10\,989 \times 9 = 98\,901$$

La somme des chiffres est $1 + 0 + 9 + 8 + 9 = 27$. Chaque choix ayant été imposé, la solution est unique.

Une vérification n'est pas une preuve d'unicité

Tester 10 989 prouve qu'il convient. Pour montrer qu'aucun autre nombre ne convient, il faut éliminer toutes les autres possibilités, comme ci-dessus.

PROBLÈME GUIDÉ 03

Relier les chiffres

Énoncé

Un nombre à six chiffres $\overline{abcdef}$ satisfait les conditions suivantes :

- le sixième chiffre est la somme des trois premiers ;
- le cinquième est la somme des deux premiers ;
- le troisième est égal au premier, et le deuxième est son double ;
- le quatrième est la somme du cinquième et du sixième.

Quelle est la plus grande valeur possible du quatrième chiffre ?

1. Traduire avant de calculer

Les relations sont

$$f = a + b + c, \quad e = a + b, \quad c = a, \quad b = 2a, \quad d = e + f.$$

Il faut en outre conserver $1 \leq a \leq 9$ et $0 \leq b, c, d, e, f \leq 9$.

2. Partir de la quantité demandée

On cherche d , donc on commence par la relation qui le contient :

$$\begin{aligned} d &= e + f = (a + b) + (a + b + c) \\ &= 2a + 2b + c = 2a + 4a + a = 7a. \end{aligned}$$

Comme d est un chiffre, $7a \leq 9$. Et comme a est le premier chiffre, $a \geq 1$. La seule possibilité est donc $a = 1$, puis $d = 7$.

3. Vérifier l'existence

Les autres chiffres sont $b = 2$, $c = 1$, $e = 3$ et $f = 4$. Le nombre obtenu est

$$\boxed{121\,734}.$$

Il satisfait bien toutes les relations : $1 + 2 + 1 = 4$, $1 + 2 = 3$ et $3 + 4 = 7$.

À retenir

Le quatrième chiffre vaut nécessairement 7. Son maximum et son minimum sont donc tous deux égaux à 7.

Réduire le nombre d'inconnues

Lorsque plusieurs chiffres sont liés, essayer de tout exprimer en fonction du premier. Les bornes 0 à 9 transforment souvent une équation en une unique possibilité.

PROBLÈME GUIDÉ 04

Le triple de ses chiffres

On note $s(N)$ la somme des chiffres décimaux d'un entier naturel N . Par exemple, $s(504) = 5 + 0 + 4 = 9$.

Énoncé

Trouver tous les entiers naturels N tels que $N = 3s(N)$. On autorise ici $N = 0$.

1. Un ou deux chiffres

Pour un seul chiffre, $s(N) = N$. Ainsi $N = 3N$ donne $N = 0$. Pour deux chiffres, écrire $N = 10a + b$, avec $1 \leq a \leq 9$ et $0 \leq b \leq 9$:

$$10a + b = 3(a + b) \iff 7a = 2b.$$

Puisque $2b \leq 18$, on a $a \leq 2$. De plus, $7a$ est pair, donc a est pair. Il vient $a = 2$ et $b = 7$. Le nombre 27 convient bien : $27 = 3(2 + 7)$.

2. Éliminer tous les nombres plus longs

Il ne suffit pas de traiter seulement le cas de trois chiffres. Écrivons tout nombre d'au moins trois chiffres sous la forme

$$N = 100q + 10b + c, \quad q \geq 1, \quad 0 \leq b, c \leq 9.$$

Le nombre q rassemble tous les chiffres situés avant les deux derniers. On a $s(N) = s(q) + b + c$ et $s(q) \leq q$: chaque chiffre contribue au moins autant au nombre lui-même qu'à sa somme de chiffres. Par conséquent,

$$\begin{aligned} N - 3s(N) &= 100q - 3s(q) + 7b - 2c \\ &\geq 97q - 18 \geq 79 > 0. \end{aligned}$$

L'égalité $N = 3s(N)$ est donc impossible dès que N possède au moins trois chiffres.

Toutes les solutions

Les solutions dans les entiers naturels sont 0 et 27. Si l'on exige un entier strictement positif, la seule solution est 27.

Piège

Ne pas oublier 0 lorsque l'énoncé l'autorise. Ne pas confondre « un exemple qui convient » avec « la liste complète des solutions ».

PROBLÈME GUIDÉ 05

Ajouter un chiffre

Énoncé

Trouver le nombre à cinq chiffres N tel que le nombre obtenu en plaçant 1 à sa droite soit le triple du nombre obtenu en plaçant 1 à sa gauche.

1. Traiter le nombre comme un seul bloc

Inutile de chercher ses cinq chiffres séparément. Le bloc N reste inchangé dans les deux constructions.

Opération	Effet sur les positions	Expression
1 à droite	Les chiffres de N se décalent d'un rang	$10N + 1$
1 à gauche	Le chiffre 1 vaut 100 000	$100\,000 + N$

2. Traduire la comparaison

L'énoncé dit exactement

$$10N + 1 = 3(100\,000 + N).$$

On développe, puis on rassemble les termes contenant N :

$$10N + 1 = 300\,000 + 3N \implies 7N = 299\,999.$$

D'où

$$N = 42\,857.$$

3. Vérifier le résultat dans l'énoncé

Le nombre obtenu à gauche est 142 857 ; celui obtenu à droite est 428 571. On vérifie

$$3 \times 142\,857 = 428\,571.$$

Le nombre 42 857 possède bien cinq chiffres, ce qui complète la validation.

Les deux formules à mémoriser

Si N possède k chiffres et u est un chiffre, ajouter u à droite donne $10N + u$. Ajouter un chiffre non nul v à gauche donne $v10^k + N$.

Astuce

Pour une relation $10N + u = m(v10^k + N)$, on obtient

$$(10 - m)N = mv10^k - u.$$

Après résolution, vérifier que N est entier et possède exactement k chiffres.

PROBLÈME GUIDÉ 06

Encadrer une somme

Énoncé

Deux nombres réels a, b sont positifs ou nuls et vérifient $a + 2b = 6$. Trouver le minimum et le maximum de $a + b$, puis la moyenne de ces deux valeurs extrêmes.

1. Un encadrement direct

Puisque $b \geq 0$, on a

$$a + b \leq a + 2b = 6.$$

Puisque $a \geq 0$, on a aussi

$$2(a + b) = a + 2b + a = 6 + a \geq 6,$$

d'où $a + b \geq 3$. En réunissant les deux inégalités,

$$\boxed{3 \leq a + b \leq 6}.$$

2. Les bornes sont-elles atteintes ?

Une borne n'est pas automatiquement un minimum ou un maximum. Ici les deux sont atteintes :

- $a = 0, b = 3$ donne $a + b = 3$ et respecte $a + 2b = 6$;
- $a = 6, b = 0$ donne $a + b = 6$ et respecte la même relation.

La moyenne des valeurs extrêmes est donc

$$\frac{3 + 6}{2} = \boxed{\frac{9}{2} = 4,5}.$$

Valeurs possibles de $a + b$



Généraliser la méthode

Si $a, b \geq 0$, $a + \lambda b = C$, avec $C > 0$ et $\lambda \geq 1$, alors

$$\frac{C}{\lambda} \leq a + b \leq C.$$

Les bornes sont atteintes respectivement pour $(a, b) = (0, C/\lambda)$ et $(C, 0)$.

Piège

« Non négatif » signifie positif ou nul. Et la moyenne des deux valeurs extrêmes de $a + b$ n'est pas la même question que maximiser $(a + b)/2$.

PROBLÈME GUIDÉ 07

Un produit de chiffres

Énoncé

Combien existe-t-il d'entiers naturels dont les chiffres sont tous distincts et dont le produit des chiffres est égal à 28 ?

1. Trouver les chiffres possibles

Le produit est non nul, donc aucun chiffre ne peut être 0. On factorise

$$28 = 2^2 \times 7.$$

Il faut un chiffre contenant le facteur premier 7. Le seul chiffre possible est 7. Le produit des autres chiffres doit être 4.

2. Utiliser la condition « distincts »

Le facteur 4 peut être fourni par le chiffre 4, ou par deux chiffres 2 et 2. Le second choix est interdit, car les chiffres doivent être distincts. Les chiffres essentiels sont donc 4 et 7. On peut ajouter le chiffre 1, qui ne change pas le produit. Mais on ne peut l'ajouter qu'une fois. Les seuls ensembles de chiffres possibles sont ainsi

$$\{4, 7\} \quad \text{et} \quad \{1, 4, 7\}.$$

3. Compter les ordres possibles

Chiffres	Nombres	Nombre d'arrangements
4, 7	47, 74	$2 \times 1 = 2$
1, 4, 7	147, 174, 417, 471, 714, 741	$3 \times 2 \times 1 = 6$

Au total, il existe $2 + 6 = 8$ nombres.

Deux étapes bien séparées

D'abord chercher les ensembles de chiffres autorisés. Ensuite compter leurs arrangements. Mélanger ces deux étapes rend les oublis et les doubles comptages plus probables.

Piège

Ne pas oublier le chiffre 1. En revanche, 227 est interdit malgré $2 \times 2 \times 7 = 28$. Sans la condition « distincts », on pourrait ajouter autant de chiffres 1 que l'on veut : il y aurait une infinité de solutions.

BOÎTE À OUTILS

Choisir la bonne méthode

	Premier geste utile
Indice dans l'énoncé	
Chiffres inconnus	Écrire $\overline{abc} = 100a + 10b + c$ et noter les bornes des chiffres.
Toutes les permutations	Compter combien de fois chaque chiffre apparaît dans chaque position.
Un nombre renversé	Comparer les ordres de grandeur, puis examiner les unités et les retenues.
Plusieurs relations	Traduire chaque phrase en équation ; partir de la quantité demandée.
Somme des chiffres	Poser $s(N)$, traiter les petits nombres puis exclure tous les autres.
Chiffre ajouté	Conserver le nombre comme un bloc : $10N + u$ ou $v10^k + N$.
Maximum ou minimum	Obtenir une borne, puis montrer qu'elle est atteinte.
Produit de chiffres	Factoriser le produit, choisir les chiffres, puis compter les arrangements.

Les quatre étapes d'une solution complète

1. **Modéliser.** Définir les lettres et préciser leurs valeurs possibles.
2. **Déduire.** Transformer les relations sans perdre de condition.
3. **Épuiser les cas.** Expliquer pourquoi aucune possibilité ne manque.
4. **Vérifier.** Replacer les résultats dans toutes les conditions de départ.

Un test simple avant de rendre une solution

Ai-je vérifié le nombre de chiffres ? Le premier chiffre est-il non nul ? Les chiffres annoncés sont-ils distincts lorsque cela est demandé ? Ai-je prouvé l'existence et l'exhaustivité, et pas seulement trouvé un exemple ?

Niveaux des exercices. Les exercices 1 à 8 consolident les bases ; les exercices 9 à 16 demandent une adaptation ; les exercices 17 à 24 combinent plusieurs idées. Tous possèdent un corrigé.

ENTRAÎNEMENT 01

Les fondamentaux

Exercice 1 · Décomposer

Écrire 70 406 comme somme de valeurs de position, puis sous les formes $100A + B$ avec $0 \leq B < 100$, et $1000C + D$ avec $0 \leq D < 1000$.

Exercice 2 · Nombre ou produit ?

Pour $a = 5$, $b = 2$ et $c = 7$, calculer $\overline{abc}$, $\overline{cba}$ et abc . Expliquer la différence entre ces écritures.

Exercice 3 · Ajouter un chiffre

On prend $N = 208$. Quel nombre obtient-on en ajoutant 4 à droite ? À gauche ? Écrire dans chaque cas une formule utilisant N .

Exercice 4 · Sommer par colonnes

Calculer $246 + 357 + 468$ en additionnant d'abord les chiffres des centaines, des dizaines et des unités. Expliquer pourquoi les sommes intermédiaires peuvent dépasser 9.

Exercice 5 · Six permutations

Calculer, sans les additionner un par un, la somme des six nombres formés avec les chiffres 1, 3, 5, chacun utilisé une seule fois.

Exercice 6 · Retrouver une somme de chiffres

Trois chiffres distincts et non nuls permettent de former six nombres dont la somme est 2664. Trouver la somme de ces trois chiffres, puis proposer un ensemble de chiffres qui convient.

Exercice 7 · Une différence remarquable

Montrer que $\overline{abc} - \overline{cba}$ est divisible par 99, pour des chiffres a, c non nuls. Utiliser la formule pour calculer $731 - 137$.

Exercice 8 · Borner la somme des chiffres

Quelle est la plus petite somme de chiffres possible pour un nombre à quatre chiffres ? Et la plus grande ? Donner un exemple atteignant chaque borne.

Conseil de travail

Écrire une phrase de justification, même si la réponse semble immédiate. Dans les exercices 5 à 7, une formule bien choisie remplace presque tous les calculs.

ENTRAÎNEMENT 02

Adapter les méthodes

Exercice 9 · Un zéro parmi les chiffres

Former tous les nombres à trois chiffres utilisant exactement une fois chacun des chiffres 0, 2, 7. Les compter et calculer leur somme de deux façons.

Exercice 10 · Deux chiffres identiques

Calculer la somme de tous les nombres distincts obtenus en permutant les chiffres 2, 2, 4. Expliquer pourquoi il n'y a pas six nombres distincts.

Exercice 11 · Quatre fois la somme

Trouver tous les nombres à deux chiffres égaux à quatre fois la somme de leurs chiffres.

Exercice 12 · Additionner un nombre et son renversé

Trouver tous les nombres à deux chiffres dont le chiffre des unités est non nul et qui, additionnés à leur renversé, donnent 121.

Exercice 13 · Différence de deux écritures

Trouver tous les nombres à deux chiffres tels que le nombre moins son renversé vaut 45. On autorise une unité nulle ; dans ce cas, $\overline{05}$ est interprété comme 5.

Exercice 14 · Deux chiffres ajoutés différents

Un nombre N a trois chiffres. Ajouter 8 à sa droite donne le double du nombre obtenu en ajoutant 1 à sa gauche. Déterminer N .

Exercice 15 · Deux valeurs extrêmes

Pour $x, y \geq 0$ tels que $x + 3y = 12$, trouver le minimum et le maximum de $x + y$, puis la moyenne de ces deux valeurs. Justifier que les bornes sont atteintes.

Exercice 16 · Un produit égal à 18

Compter les entiers dont les chiffres sont tous distincts et dont le produit des chiffres vaut 18. Classer d'abord les ensembles de chiffres possibles.

Avant de regarder le corrigé

Les exercices 9 et 10 ne suivent pas exactement le même comptage que l'exercice 5. Dans l'exercice 16, le chiffre 1 peut apparaître, mais ne peut pas se répéter.

ENTRAÎNEMENT 03

Défis de raisonnement

Exercice 17 · Vingt-quatre nombres

Calculer la somme de tous les nombres à quatre chiffres utilisant chacun exactement une fois les chiffres 1, 2, 4, 7.

Exercice 18 · Choisir seulement deux chiffres

Former tous les nombres à deux chiffres distincts choisis parmi 1, 2, 3, 4. Combien y en a-t-il ? Quelle est leur somme ?

Exercice 19 · Le double de ses chiffres

Trouver tous les entiers strictement positifs N tels que $N = 2s(N)$. Prouver qu'aucun nombre d'au moins trois chiffres ne convient.

Exercice 20 · Neuf fois ses chiffres

Trouver tous les entiers strictement positifs N tels que $N = 9s(N)$. Pour les nombres d'au moins trois chiffres, utiliser $N = 100q + 10b + c$ et $s(q) \leq q$.

Exercice 21 · Renverser quatre chiffres

Trouver tous les nombres à quatre chiffres $N = \overline{abcd}$ tels que $9N = \overline{dcba}$. Les chiffres ne sont pas nécessairement distincts.

Exercice 22 · Un produit égal à 36

Combien d'entiers ont des chiffres tous distincts dont le produit vaut 36 ? Justifier que tous les ensembles de chiffres ont été trouvés.

Exercice 23 · Six chiffres liés

Trouver le nombre à six chiffres $\overline{abcdef}$ vérifiant

$$b = a + 1, \quad c = 2a, \quad e = a + b, \quad f = b + c, \quad d = e + f.$$

Exercice 24 · Un facteur commun caché

Deux entiers strictement positifs a, b vérifient

$$a^2 + ab + a = 14, \quad b^2 + ab + b = 28.$$

Déterminer a, b , puis $2a + b$. Éviter de développer davantage.

Chercher une structure

Les défis 19 à 21 demandent une preuve d'exhaustivité. Les défis 23 et 24 deviennent courts lorsqu'on réduit le nombre d'inconnues.

CORRIGÉS · EXERCICES 1 À 4

Écriture et calcul

1. Décomposer 70 406

Le chiffre 7 occupe la position des dizaines de milliers, le chiffre 4 celle des centaines et le chiffre 6 celle des unités :

$$70\,406 = 7 \times 10^4 + 0 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 0 \times 10 + 6.$$

En isolant deux puis trois positions finales, on obtient

$$70\,406 = 100 \times 704 + 6 = 1000 \times 70 + 406.$$

Donc $A = 704$, $B = 6$, $C = 70$ et $D = 406$. Les restes satisfont bien les bornes demandées. Le bloc « 06 » vaut 6 mais occupe deux positions.

2. Distinguer les écritures

$$\overline{abc} = 527, \quad \overline{cba} = 725, \quad abc = 5 \times 2 \times 7 = 70.$$

Une barre au-dessus des lettres désigne une écriture décimale. Sans cette barre, la juxtaposition des lettres désigne ici une multiplication. Ainsi, les mêmes chiffres peuvent produire des nombres ou un produit très différents.

3. Le rôle des puissances de dix

Ajouter 4 à droite déplace les trois chiffres de 208 d'un rang :

$$10N + 4 = 2080 + 4 = \boxed{2084}.$$

Ajouter 4 à gauche place ce chiffre au rang des milliers, car N possède trois chiffres :

$$4 \times 10^3 + N = 4000 + 208 = \boxed{4208}.$$

4. Regrouper les colonnes

Les sommes des chiffres des centaines, des dizaines et des unités sont respectivement

$$2 + 3 + 4 = 9, \quad 4 + 5 + 6 = 15, \quad 6 + 7 + 8 = 21.$$

Ainsi,

$$246 + 357 + 468 = 100 \times 9 + 10 \times 15 + 21 = \boxed{1071}.$$

Les nombres 15 et 21 sont des coefficients intermédiaires, pas des chiffres décimaux. Le calcul final prend automatiquement en compte leur contribution aux rangs supérieurs.

Le geste commun

Dans ces quatre exercices, on remplace l'apparence des chiffres par leur valeur. C'est le point de départ de presque tous les problèmes de ce livret.

CORRIGÉS · EXERCICES 5 À 8

Symétrie et bornes

5. Somme des six permutations

Chaque chiffre apparaît deux fois dans chaque colonne. La somme cherchée vaut donc

$$2(1 + 3 + 5)(100 + 10 + 1) = 222 \times 9 = \boxed{1998}.$$

Les six nombres sont bien distincts, car les trois chiffres le sont. Aucun n'est nul, donc tous les arrangements possèdent trois chiffres.

6. Retrouver la somme des chiffres

Notons a, b, c les chiffres. La formule donne

$$222(a + b + c) = 2664 \implies a + b + c = \boxed{12}.$$

Par exemple, $\{1, 3, 8\}$ ou $\{2, 4, 6\}$ convient. Les trois chiffres de chaque ensemble sont distincts et non nuls. La somme de leurs permutations vaut donc bien 2664. L'ensemble des chiffres n'est pas déterminé de façon unique : l'énoncé demande seulement d'en proposer un.

7. Une différence divisible par 99

Développons les deux écritures :

$$\begin{aligned}\overline{abc} - \overline{cba} &= (100a + 10b + c) - (100c + 10b + a) \\ &= 99a - 99c = 99(a - c).\end{aligned}$$

Le chiffre central disparaît. La différence est un multiple de 99, qu'elle soit positive, nulle ou négative. Pour $731 - 137$, on obtient

$$99(7 - 1) = 99 \times 6 = \boxed{594}.$$

8. Minimum et maximum

Dans un nombre à quatre chiffres, le premier chiffre est au moins 1 et les trois autres au moins 0. La somme est donc au moins 1, valeur atteinte par 1000. Chaque chiffre est au plus 9, donc la somme est au plus $4 \times 9 = 36$, valeur atteinte par 9999.

Minimum 1	Maximum 36
-----------	------------

La bonne structure pour un extremum

Commencer par une inégalité valable pour tous les nombres autorisés. Donner ensuite un exemple qui atteint la borne. Les deux étapes sont nécessaires.

CORRIGÉS · EXERCICES 9 À 12

Gérer les contraintes

9. Avec un zéro

Les nombres autorisés sont 207, 270, 702, 720, soit $\boxed{4}$ nombres. Leur somme directe vaut $\boxed{1899}$. Autre méthode : les six arrangements ont pour somme $222(0 + 2 + 7) = 1998$ lorsque les blocs 027 et 072 sont interprétés comme 27 et 72. Ils ne sont pas admissibles, donc il faut retrancher $27 + 72 = 99$. On retrouve $1998 - 99 = 1899$.

10. Avec deux chiffres égaux

Les nombres distincts sont 224, 242 et 422. Leur somme vaut

$$224 + 242 + 422 = \boxed{888}.$$

Les deux chiffres 2 sont interchangeables : les six arrangements les compteraient chacun deux fois. On peut donc utiliser

$$\frac{222(2 + 2 + 4)}{2} = 111 \times 8 = 888.$$

11. Quatre fois la somme des chiffres

Écrivons $N = 10a + b$. La relation demandée donne

$$10a + b = 4(a + b) \iff 6a = 3b \iff b = 2a.$$

Les contraintes $a \geq 1$ et $b \leq 9$ imposent $a \in \{1, 2, 3, 4\}$. Les solutions sont donc

$$\boxed{12, 24, 36, 48}.$$

Chacun de ces nombres vérifie la relation, et toutes les valeurs possibles de a ont été traitées.

12. Somme d'un nombre et de son renversé

Les chiffres a, b sont non nuls. On a

$$(10a + b) + (10b + a) = 11(a + b) = 121,$$

donc $a + b = 11$. Comme $1 \leq a, b \leq 9$, les valeurs possibles de a sont $2, 3, \dots, 9$. Ainsi,

$$\boxed{29, 38, 47, 56, 65, 74, 83, 92}.$$

Il existe huit nombres. Les nombres 19 et 91 ne conviennent pas : la somme de leurs chiffres est 10, pas 11.

Piège

Résoudre l'équation ne suffit pas : il faut ensuite imposer les bornes de chaque chiffre et les conditions sur le premier chiffre.

CORRIGÉS · EXERCICES 13 À 16

Équations et comptage

13. Une différence égale à 45

$$(10a + b) - (10b + a) = 9(a - b) = 45 \implies a = b + 5.$$

Comme $a \leq 9$, on a $0 \leq b \leq 4$. Les solutions sont

$$\boxed{50, 61, 72, 83, 94}.$$

Le cas 50 est autorisé par la convention de l'énoncé : son renversé vaut 5 et $50 - 5 = 45$.

14. Ajouter 8 à droite et 1 à gauche

Puisque N possède trois chiffres, la relation s'écrit

$$10N + 8 = 2(1000 + N).$$

Donc $8N = 1992$, puis $N = \boxed{249}$. Vérification : $2498 = 2 \times 1249$. Le résultat possède bien trois chiffres.

15. Encadrer $x + y$

La relation $x + 3y = 12$ et la condition $y \geq 0$ donnent $x + y \leq 12$. D'autre part,

$$3(x + y) = x + 3y + 2x = 12 + 2x \geq 12,$$

donc $x + y \geq 4$. Le minimum 4 est atteint en $(x, y) = (0, 4)$ et le maximum 12 en $(12, 0)$. Leur moyenne vaut

$$\boxed{\frac{4 + 12}{2} = 8}.$$

16. Produit des chiffres égal à 18

On a $18 = 2 \times 3^2$. Sans le chiffre 1, les décompositions en chiffres distincts sont 2×9 et 3×6 . L'autre décomposition $2 \times 3 \times 3$ répète le chiffre 3 et est interdite. On peut ajouter une seule fois le chiffre 1. Les ensembles possibles sont donc

$$\{2, 9\}, \quad \{3, 6\}, \quad \{1, 2, 9\}, \quad \{1, 3, 6\}.$$

Les deux premiers donnent chacun 2 arrangements ; les deux derniers en donnent chacun 6. Le total est

$$\boxed{2 + 2 + 6 + 6 = 16}.$$

Astuce

Les ensembles de chiffres sont différents, donc aucun nombre n'est compté dans deux ensembles à la fois. Cette séparation garantit un comptage sans doublon.

CORRIGÉS · EXERCICES 17 À 20

Symétries et exhaustivité

17. Quatre chiffres permutés

Il existe $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ nombres. Chaque chiffre apparaît six fois dans chacune des quatre positions. Donc

$$S = 6(1 + 2 + 4 + 7)(1000 + 100 + 10 + 1) = 84 \times 1111 = \boxed{93\,324}.$$

18. Choisir deux chiffres parmi quatre

Pour les dizaines, on dispose de quatre choix ; pour les unités, de trois choix restants. Il y a donc $\boxed{12}$ nombres. Chaque chiffre apparaît trois fois aux dizaines et trois fois aux unités :

$$S = 3(1 + 2 + 3 + 4)(10 + 1) = \boxed{330}.$$

19. Résoudre $N = 2s(N)$

Pour un chiffre positif, $N = 2N$ est impossible. Pour deux chiffres,

$$10a + b = 2(a + b) \iff 8a = b.$$

Les bornes $a \geq 1$ et $b \leq 9$ imposent $a = 1$ et $b = 8$. Pour un nombre d'au moins trois chiffres, écrire $N = 100q + 10b + c$, où $q \geq 1$. Puisque $s(q) \leq q$,

$$\begin{aligned} N - 2s(N) &= 100q - 2s(q) + 8b - c \\ &\geq 98q - 9 \geq 89 > 0. \end{aligned}$$

Aucune solution plus longue n'existe. Ainsi $\boxed{N = 18}$ est l'unique solution positive, et $18 = 2(1 + 8)$.

20. Résoudre $N = 9s(N)$

Le cas d'un chiffre positif est impossible. Pour deux chiffres,

$$10a + b = 9(a + b) \iff a = 8b.$$

Comme $a \geq 1$, on a $b \geq 1$; comme $a \leq 9$, nécessairement $b = 1$ et $a = 8$. Pour au moins trois chiffres,

$$N - 9s(N) = 100q - 9s(q) + b - 8c \geq 91q - 72 \geq 19 > 0.$$

L'unique solution positive est donc $\boxed{81}$, et $81 = 9(8 + 1)$.

À retenir

L'écriture $N = 100q + 10b + c$ couvre d'un seul coup tous les nombres d'au moins trois chiffres. Elle évite une succession infinie de cas.

CORRIGÉS · EXERCICES 21 À 24

Les derniers défis

21. Renverser quatre chiffres

De $9N \leq 9999$, on tire $N \leq 1111$, donc $a = 1$. Les unités imposent $9d$ terminé par 1, soit $d = 9$, avec retenue 8. Notons r_2, r_3 les deux retenues suivantes. On a

$$9c + 8 = b + 10r_2, \quad 9b + r_2 = c + 10r_3, \quad 9 + r_3 = 9.$$

Donc $r_3 = 0$ et $9b + r_2 = c \leq 9$, d'où $b = 0$ ou 1. Si $b = 1$, alors $c = 9$ et $r_2 = 0$; mais $9c + 8 = 89$ imposerait $b = 9$, contradiction. Ainsi $b = 0$, puis $9c + 8$ terminé par 0 impose $c = 8$. Le nombre est $\boxed{1089}$ et $9 \times 1089 = 9801$.

22. Produit égal à 36

Sans le chiffre 1, les ensembles distincts sont $\{4, 9\}$ et $\{2, 3, 6\}$. Pour l'exhaustivité : à deux chiffres, les paires de facteurs admissibles sont 4×9 et 6×6 , cette dernière étant interdite. À trois chiffres distincts supérieurs à 1, le plus petit vaut 2 ou 3. Avec 2, il reste 18, donnant 3×6 ; avec 3, deux chiffres distincts plus grands ne peuvent avoir pour produit 12. Quatre chiffres distincts supérieurs à 1 ont un produit au moins $2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$. On ajoute éventuellement un seul 1 : $\{1, 4, 9\}$ et $\{1, 2, 3, 6\}$. Le total est

$$\boxed{2 + 6 + 6 + 24 = 38}.$$

23. Réduire à un chiffre

On a $e = 2a + 1$, $f = 3a + 1$, puis $d = 5a + 2$. Les contraintes $a \geq 1$ et $d \leq 9$ imposent $a = 1$. Ainsi $b = 2$, $c = 2$, $d = 7$, $e = 3$, $f = 4$. L'unique nombre est $\boxed{122734}$; les cinq relations sont bien vérifiées.

24. Mettre en facteur

Les équations deviennent $a(a + b + 1) = 14$ et $b(a + b + 1) = 28$. Le facteur commun est positif, donc leur quotient donne $b = 2a$. En remplaçant : $a(3a + 1) = 14$. Pour $a = 1$, le produit vaut 4 ; pour $a = 2$, il vaut 14 ; pour $a \geq 3$, il est au moins 30. Ainsi $a = 2$, $b = 4$ et $\boxed{2a + b = 8}$.

À GARDER SOUS LA MAIN

Fiche de révision

Écriture décimale

$$\overline{abc} = 100a + 10b + c, \quad \overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d.$$

Tout chiffre appartient à $\{0, \dots, 9\}$. Le premier chiffre d'un nombre à plusieurs chiffres est non nul.

Permutations

Trois chiffres distincts et non nuls : 6 nombres et

$$S = 222 \times (\text{somme des trois chiffres}).$$

Quatre chiffres distincts et non nuls : 24 nombres et

$$S = 6666 \times (\text{somme des quatre chiffres}).$$

Adapter le calcul lorsqu'il y a un zéro ou des chiffres répétés.

Ajout et renversement

Pour N à k chiffres : à droite, $10N + u$; à gauche, $v10^k + N$.

$$\overline{ab} + \overline{ba} = 11(a + b), \quad \overline{ab} - \overline{ba} = 9(a - b),$$

$$\overline{abc} - \overline{cba} = 99(a - c).$$

Les identités restent vraies algébriquement ; vérifier séparément le nombre de chiffres des écritures utilisées.

Somme et produit des chiffres

Pour un entier N à k chiffres, $s(N) \leq 9k$. On a aussi $s(N) \leq N$. Pour un produit imposé, commencer par sa factorisation et penser au chiffre 1.

Les cinq réflexes à retenir

1. Traduire les phrases par des égalités précises.
2. Utiliser les bornes des chiffres le plus tôt possible.
3. Exploiter une symétrie avant d'énumérer.
4. Justifier que les cas étudiés sont tous les cas possibles.
5. Vérifier chaque résultat dans l'énoncé initial.

Maths Olympiad

Observer · Chercher · Justifier

PARTIE II · RAPPELS ESSENTIELS

Le second degré

Une équation du second degré s'écrit $ax^2 + bx + c = 0$, avec $a \neq 0$. Résoudre cette équation dans $\mathbb{R}$ signifie chercher toutes les valeurs réelles de x qui rendent l'égalité vraie.

La forme canonique explique la formule

En complétant le carré, on obtient

$$ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$. L'équation équivaut alors à

$$(2ax + b)^2 = \Delta.$$

- Si $\Delta > 0$, il existe deux racines réelles distinctes : $x = (-b \pm \sqrt{\Delta})/(2a)$.
- Si $\Delta = 0$, il existe une seule solution réelle, $-b/(2a)$, qui est une racine double.
- Si $\Delta < 0$, il n'y a pas de solution réelle. Dans $\mathbb{C}$, les racines sont $(-b \pm i\sqrt{-\Delta})/(2a)$, où $i^2 = -1$.

Exemple : choisir la méthode la plus courte

Pour $2x^2 - 5x + 2 = 0$, la factorisation donne directement

$$(2x - 1)(x - 2) = 0 \implies x = \frac{1}{2} \text{ ou } x = 2.$$

Le discriminant confirme le résultat : $\Delta = 25 - 16 = 9$ et $x = (5 \pm 3)/4$.

Avant d'utiliser la formule

Chercher un facteur commun, une identité remarquable ou une racine évidente. La formule générale est fiable, mais pas toujours la plus courte.

Le cas qui change le degré

Si un paramètre peut annuler a , traiter ce cas séparément. Par exemple,

$$(m - 1)x^2 + 2x - 3 = 0$$

est quadratique pour $m \neq 1$, mais devient $2x - 3 = 0$ pour $m = 1$, avec solution $3/2$.

Piège

On ne peut pas diviser par a avant de vérifier $a \neq 0$. Une équation devenue linéaire ne possède pas une véritable « racine infinie » : elle a changé de degré.

PARTIE II · RAPPELS ESSENTIELS

Somme et produit

Supposons que α et β soient les deux racines de $ax^2 + bx + c$, comptées avec leur multiplicité. Elles peuvent être réelles ou complexes.

Relations de Viète

La factorisation et son développement donnent

$$a(x - \alpha)(x - \beta) = ax^2 - a(\alpha + \beta)x + a\alpha\beta.$$

En identifiant les coefficients,

$$\boxed{S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}}, \quad \boxed{P = \alpha\beta = \frac{c}{a}}.$$

Construire une équation à partir de ses racines

Si la somme vaut S et le produit P , le polynôme unitaire recherché est

$$x^2 - Sx + P.$$

Par exemple, des racines 2 et -3 ont pour somme -1 et pour produit -6 . L'équation est donc $x^2 + x - 6 = 0$.

Trois calculs sans chercher les racines

Pour les racines de $x^2 - 5x + 3 = 0$, on sait $S = 5$ et $P = 3$. Alors

$$\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P = 19,$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3PS = 80,$$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{S}{P} = \frac{5}{3}.$$

Le dernier calcul est permis parce que $P = 3 \neq 0$, donc aucune racine n'est nulle.

Une convention utile pour tout le livre

On utilisera S pour la somme des deux racines et P pour leur produit. Cette notation évite de recopier sans cesse les quotients des coefficients.

Racines et solutions distinctes

$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$ possède une racine de multiplicité 2, mais son ensemble de solutions est $\{1\}$. Lorsqu'on demande le nombre de solutions, chaque valeur différente ne se compte qu'une fois.

CHAPITRE 1 · SYMÉTRIE

Calculer sans les racines

Une expression $F(\alpha, \beta)$ est symétrique si échanger α et β ne la change pas. C'est le cas de $\alpha^2 + \beta^2$ ou de $\alpha/\beta + \beta/\alpha$; ce n'est généralement pas le cas de $\alpha - \beta$.

Les identités de base

Pour $S = \alpha + \beta$ et $P = \alpha\beta$,

$$\begin{aligned}\alpha^2 + \beta^2 &= S^2 - 2P, \\ (\alpha - \beta)^2 &= S^2 - 4P, \\ \alpha^3 + \beta^3 &= S^3 - 3PS, \\ \alpha^4 + \beta^4 &= S^4 - 4PS^2 + 2P^2.\end{aligned}$$

Si $P \neq 0$, on a aussi

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{S^2 - 2P}{P}, \quad \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{S^2 - 2P}{P^2}.$$

D'où vient la formule de degré quatre ?

On écrit

$$\alpha^4 + \beta^4 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2 = (S^2 - 2P)^2 - 2P^2.$$

Le développement donne l'identité annoncée. On construit ainsi les formules au lieu de les apprendre isolément.

Exemple : une fraction symétrique

Pour les racines de $x^2 - 4x + 1 = 0$, calculer

$$E = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - 4\left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\right).$$

On connaît $S = 4$ et $P = 1$. Donc $\alpha^2 + \beta^2 = 14$ et

$$E = 4 - 4 \times 14 = \boxed{-52}.$$

Astuce

Mettre les fractions au même dénominateur fait souvent apparaître S , P ou une somme de puissances. Vérifier d'abord que les dénominateurs ne s'annulent pas.

CHAPITRE 1 · NEWTON

Les sommes de puissances

Posons $u_n = \alpha^n + \beta^n$ pour $n \geq 0$, avec la convention initiale $u_0 = 2$. Si α, β sont racines de $x^2 - Sx + P = 0$, elles satisfont $\alpha^2 = S\alpha - P$ et $\beta^2 = S\beta - P$.

Récurrance de Newton au second degré

$$u_0 = 2, \quad u_1 = S, \quad \boxed{u_n = Su_{n-1} - Pu_{n-2} \quad (n \geq 2)}.$$

Pour l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, cela s'écrit

$$au_n + bu_{n-1} + cu_{n-2} = 0.$$

Démonstration. Multiplier l'égalité $\alpha^2 = S\alpha - P$ par α^{n-2} , faire de même avec β , puis additionner. Pour $n = 2$, on utilise simplement les deux égalités initiales ; aucun quotient par une racine n'est nécessaire.

Exemple : jusqu'à la puissance six

Pour $x^2 - 3x + 1 = 0$, $S = 3$ et $P = 1$:

n	0	1	2	3	4	5	6
u_n	2	3	7	18	47	123	322

Ainsi $u_4 = 3 \times 18 - 7 = 47$ et $u_6 = 3 \times 123 - 47 = 322$.

Une relation à reconnaître directement

Pour les racines de $5x^2 + 6x - 2 = 0$, toute somme $u_n = \alpha^n + \beta^n$ vérifie

$$5u_6 + 6u_5 - 2u_4 = \boxed{0}.$$

Il serait inutile de calculer séparément les trois termes.

Piège

Pour les indices négatifs, les puissances ne sont définies que si les racines sont non nulles. Si $P = 0$, rester aux indices non négatifs et aux valeurs initiales explicites.

CHAPITRE 1 · APPROFONDISSEMENT

Récurrances pondérées

Les formules ne concernent pas seulement une somme avec des coefficients égaux à 1.

Une même récurrence, d'autres valeurs initiales

Pour deux constantes p, q , la suite

$$v_n = p\alpha^n + q\beta^n$$

vérifie $v_n = Sv_{n-1} - Pv_{n-2}$ pour $n \geq 2$. Ses valeurs initiales sont $v_0 = p + q$ et $v_1 = p\alpha + q\beta$.

La preuve est identique à celle des sommes de puissances : multiplier séparément les relations des racines, puis les additionner avec les poids p et q .

Exemple 1 : une relation entre grands indices

Si α, β sont racines de $x^2 - x - 1 = 0$, on a

$$v_{n+1} = v_n + v_{n-1}.$$

Si $v_{n+1} = 22$ et $v_{n-1} = 11$, alors $v_n = 11$ et $v_n^2 = 121$, sans calculer n ni les racines.

Exemple 2 : les puissances redoublées

Supposons $\alpha\beta = 1$ et posons $A_n = \alpha^{2^n} - \beta^{2^n}$. La factorisation donne

$$A_{n+1} = A_n(\alpha^{2^n} + \beta^{2^n}).$$

Le quotient A_{n+1}/A_n n'est utilisable que si $A_n \neq 0$. Ici, les exposants 2^n ne progressent pas de 1 : appliquer directement la récurrence des u_n aux indices n serait une erreur.

Exemple 3 : former une nouvelle équation

Si l'on veut des racines α^2, β^2 , leur somme vaut $S^2 - 2P$ et leur produit P^2 . Le polynôme unitaire recherché est

$$y^2 - (S^2 - 2P)y + P^2.$$

Trois questions avant de calculer

L'expression est-elle symétrique ? Les exposants sont-ils consécutifs ? Demande-t-on une valeur numérique ou simplement une relation nulle ? Ces questions indiquent souvent la voie la plus courte.

CHAPITRE 1 · ENTRAÎNEMENT

Six exercices

Exercice 1.1 · Carrés et cubes

Les racines α, β de $x^2 - 5x + 3 = 0$ sont données implicitement. Calculer $\alpha^2 + \beta^2$ et $\alpha^3 + \beta^3$ sans les déterminer.

Exercice 1.2 · Quotients

Pour les racines de $x^2 - 4x + 1 = 0$, calculer $\alpha/\beta + \beta/\alpha$. Justifier que l'expression est définie.

Exercice 1.3 · Racines réciproques

Pour les racines de $2x^2 - 3x - 2 = 0$, calculer la somme et le produit de $1/\alpha, 1/\beta$. Construire leur équation.

Exercice 1.4 · Calculer par récurrence

Pour les racines de $x^2 - x - 1 = 0$, poser $u_n = \alpha^n + \beta^n$. Calculer $u_0, u_1, \dots, u_6$.

Exercice 1.5 · Racines au carré

Les racines de $x^2 - 6x + 2 = 0$ sont α, β . Déterminer le polynôme unitaire dont les racines sont α^2, β^2 .

Exercice 1.6 · Une condition d'intégralité

Poser

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Les entiers p, q satisfont $p\alpha^4 + q\beta^4 = 28$. Trouver p, q , puis $p + 2q$.

Indications graduées

Pour 1.3, utiliser S/P et $1/P$. Pour 1.5, calculer la somme et le produit des nouvelles racines. Pour 1.6, réduire α^4 grâce à $\alpha^2 = \alpha + 1$, puis séparer la partie rationnelle et celle contenant $\sqrt{5}$.

Objectif : savoir travailler avec des racines sans recourir systématiquement à leur formule explicite.

CHAPITRE 1 · CORRIGÉS

Les six solutions

1.1. Deux identités

$S = 5$, $P = 3$. Donc $\alpha^2 + \beta^2 = 25 - 6 = \boxed{19}$ et $\alpha^3 + \beta^3 = 125 - 45 = \boxed{80}$.

1.2. Une fraction symétrique

$P = 1 \neq 0$, donc les deux racines sont non nulles. Ainsi

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{S^2 - 2P}{P} = \frac{16 - 2}{1} = \boxed{14}.$$

1.3. Inverser les racines

$S = 3/2$ et $P = -1$. La nouvelle somme vaut $S/P = -3/2$ et le nouveau produit $1/P = -1$. L'équation est $y^2 + \frac{3}{2}y - 1 = 0$, soit $\boxed{2y^2 + 3y - 2 = 0}$.

1.4. Une suite de sommes

La récurrence est $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$, avec $u_0 = 2$ et $u_1 = 1$. On obtient successivement

$$\boxed{2, 1, 3, 4, 7, 11, 18}.$$

1.5. Construire le nouveau polynôme

$S = 6$, $P = 2$, donc la nouvelle somme est $36 - 4 = 32$ et le nouveau produit 4. Le résultat est $\boxed{y^2 - 32y + 4}$.

1.6. Utiliser l'irrationalité

De $\alpha^2 = \alpha + 1$, on tire $\alpha^4 = 3\alpha + 2 = (7 + 3\sqrt{5})/2$. De même, $\beta^4 = (7 - 3\sqrt{5})/2$. La condition devient

$$7(p + q) + 3(p - q)\sqrt{5} = 56.$$

Si $p - q \neq 0$, on exprimerait $\sqrt{5}$ comme un rationnel, ce qui est impossible. Donc $p = q$; puis $14p = 56$. Ainsi $p = q = 4$ et $\boxed{p + 2q = 12}$.

À retenir

Les coefficients donnent S et P . Les identités et les récurrences transmettent ensuite cette information aux expressions plus compliquées.

CHAPITRE 2 · NATURE DES RACINES

Lire le discriminant

On travaille d'abord avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$. Le signe de $\Delta = b^2 - 4ac$ décrit la nature des racines ; il ne donne pas directement leur signe.

Discriminant	Dans $\mathbb{R}$	Dans $\mathbb{C}$
$\Delta > 0$	Deux racines distinctes	Les mêmes deux racines réelles
$\Delta = 0$	Une solution, racine double	La même racine double
$\Delta < 0$	Aucune solution	Deux racines non réelles conjuguées

Exemple : une famille à paramètre

Pour $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 1 = 0$,

$$\Delta = 4(m+1)^2 - 4(m^2 - 1) = 8(m+1).$$

Il y a donc deux racines distinctes pour $m > -1$, une racine double pour $m = -1$ et aucune racine réelle pour $m < -1$.

Quand les deux racines sont-elles positives ?

Si les racines sont réelles, elles sont toutes deux strictement positives exactement lorsque $S > 0$ et $P > 0$. En effet, $P > 0$ signifie qu'elles ont le même signe ; $S > 0$ impose alors le signe positif. Dans l'exemple, $S = 2(m+1)$ et $P = m^2 - 1$. L'intersection de

$$m \geq -1, \quad m > -1, \quad (m-1)(m+1) > 0$$

donne $m > 1$.

Avec des racines réelles

$P < 0$: signes opposés. $P > 0, S > 0$: toutes deux positives. $P > 0, S < 0$: toutes deux négatives. $P = 0$: au moins une racine nulle.

Piège

« Racines réelles » exige $\Delta \geq 0$. « Racines réelles distinctes » exige $\Delta > 0$. Ne pas retirer les racines doubles si l'énoncé les autorise.

CHAPITRE 2 · CONJUGAISON

Rationnels et irrationnels

Coefficients rationnels

Si $a, b, c \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$, et $\Delta \geq 0$, les racines sont rationnelles si et seulement si Δ est le carré d'un nombre rationnel. Si a, b, c sont entiers, cela revient à demander que l'entier Δ soit un carré parfait.

La formule $(-b \pm \sqrt{\Delta})/(2a)$ prouve les deux sens. Si une racine est rationnelle, alors $\sqrt{\Delta} = \pm(2a\alpha + b)$ est rationnelle.

Des irrationnels qui vont par deux

Pour un polynôme à coefficients rationnels, si $r + s\sqrt{d}$ est une racine, avec $r, s, d \in \mathbb{Q}$, $d > 0$ et $\sqrt{d}$ irrationnel, alors $r - s\sqrt{d}$ est aussi une racine. Le remplacement de $\sqrt{d}$ par son opposé conserve les opérations rationnelles. Ainsi, si $3 + \sqrt{2}$ est racine d'une équation quadratique rationnelle, l'autre racine est $3 - \sqrt{2}$. Leur somme vaut 6 et leur produit 7 :

$$x^2 - 6x + 7 = 0.$$

Des complexes qui vont par deux

Si les coefficients sont réels et z est racine, alors $\bar{z}$ l'est aussi, car $P(\bar{z}) = \overline{P(z)}$. Pour la racine $1 + 2i$, l'autre est $1 - 2i$, d'où

$$x^2 - 2x + 5 = 0.$$

Les hypothèses font partie du résultat

La racine $\sqrt{2}$ n'impose pas automatiquement la racine $-\sqrt{2}$ si les coefficients sont seulement réels. Par exemple, $(x - \sqrt{2})(x - 1)$ a pour racines $\sqrt{2}$ et 1. De même, la conjugaison complexe exige des coefficients réels.

Une différence à connaître

Deux racines irrationnelles peuvent avoir une somme et un produit rationnels. C'est précisément ce qui permet d'effectuer beaucoup de calculs sans manipuler leurs radicaux.

CHAPITRE 2 · PARAMÈTRES

Ne perdre aucun cas

Étudier $(m-1)x^2 + 2x + m = 0$ dans $\mathbb{R}$ Le coefficient principal dépend de m . Avant le discriminant, il faut isoler $m = 1$.

1. Le cas linéaire

Pour $m = 1$, l'équation devient $2x + 1 = 0$, donc $x = -1/2$.

2. Le cas quadratique

Pour $m \neq 1$,

$$\Delta = 4 - 4m(m-1) = 4(1 + m - m^2).$$

Posons $m_- = (1 - \sqrt{5})/2$ et $m_+ = (1 + \sqrt{5})/2$. Comme $1 + m - m^2$ est une parabole tournée vers le bas, son signe est positif entre ses deux racines.

- Si $m_- < m < m_+$ et $m \neq 1$, l'équation a deux solutions réelles distinctes.
- Si $m = m_-$ ou $m = m_+$, elle a une racine double $-1/(m-1)$.
- Si $m < m_-$ ou $m > m_+$, elle n'a pas de solution réelle.

Le cas $m = 1$ reste celui de la première étape : une seule solution linéaire.

Exemple : imposer des racines rationnelles

Pour $6x^2 - 11x + a = 0$, avec $a \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, le discriminant vaut $121 - 24a$. Les cinq valeurs sont 97, 73, 49, 25, 1. Seules les trois dernières sont des carrés ; les valeurs convenables sont donc 3, 4, 5.

Un ordre de travail efficace

Noter le domaine du paramètre, traiter les valeurs qui changent le degré, calculer le discriminant, puis ajouter les conditions sur la somme et le produit si le signe des racines est demandé.

Piège

Une équation qui vérifie $\Delta = 0$ n'est pas nécessairement une identité. Une identité polynomiale exige que tous les coefficients soient nuls après simplification.

CHAPITRE 2 · ENTRAÎNEMENT

Six exercices

Exercice 2.1 · Changement de degré

Classer les solutions réelles de $(m-1)x^2 + 2x + m = 0$ suivant m . Traiter explicitement $m = 1$.

Exercice 2.2 · Racines positives

Déterminer les valeurs de m pour lesquelles $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 1 = 0$ possède deux racines strictement positives.

Exercice 2.3 · Une racine irrationnelle

Un polynôme unitaire de degré 2, à coefficients rationnels, admet $3 + \sqrt{2}$ pour racine. Déterminer ce polynôme.

Exercice 2.4 · Un paramètre entier

Pour quelles valeurs de $a \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ les racines de $6x^2 - 11x + a = 0$ sont-elles rationnelles ? Les calculer.

Exercice 2.5 · Une racine complexe

Déterminer le polynôme unitaire du second degré à coefficients réels qui admet $1 + 2i$ pour racine.

Exercice 2.6 · Une factorisation utile

Pour $x^2 - (m+2)x + 2m = 0$, déterminer les valeurs de m donnant : deux racines de signes opposés ; deux racines positives ; une racine nulle ; une racine double.

Indications

Dans 2.2, combiner réalité, somme et produit. Dans 2.4, tester les carrés parfaits. Dans 2.6, essayer de factoriser avant d'utiliser le discriminant.

Pour approfondir : dans 2.6, distinguer « deux racines positives comptées avec multiplicité » et « deux racines positives distinctes ».

CHAPITRE 2 · CORRIGÉS

Les six solutions

2.1. Trois zones et un cas isolé

Pour $m = 1$, $x = -1/2$. Sinon, $\Delta = 4(1 + m - m^2)$ et les seuils sont $m_{\pm} = (1 \pm \sqrt{5})/2$. Deux solutions distinctes si $m \in]m_-, m_+[\setminus \{1\}$; une racine double si $m = m_{\pm}$; aucune solution réelle à l'extérieur de $[m_-, m_+]$.

2.2. L'intersection des conditions

La réalité demande $m \geq -1$, la somme positive $m > -1$, et le produit positif $m < -1$ ou $m > 1$. Leur intersection est $\boxed{m > 1}$. Dans cet intervalle, $\Delta > 0$: les racines sont aussi distinctes.

2.3. Le conjugué irrationnel

L'autre racine est $3 - \sqrt{2}$. La somme vaut 6 et le produit $9 - 2 = 7$. Le polynôme est donc $\boxed{x^2 - 6x + 7}$.

2.4. Tester le discriminant

Les valeurs admissibles sont $\boxed{a = 3, 4, 5}$. Pour $a = 3$, les racines sont $(11 \pm 7)/12$, soit $3/2$ et $1/3$. Pour $a = 4$, elles sont $(11 \pm 5)/12$, soit $4/3$ et $1/2$. Pour $a = 5$, elles sont $(11 \pm 1)/12$, soit 1 et $5/6$.

2.5. Le conjugué complexe

L'autre racine est $1 - 2i$. Leur somme vaut 2 et leur produit $1 + 4 = 5$. On obtient $\boxed{x^2 - 2x + 5}$.

2.6. Lire les racines dans la factorisation

$$x^2 - (m + 2)x + 2m = (x - m)(x - 2).$$

Les racines sont m et 2. Elles sont de signes opposés pour $m < 0$, toutes deux positives pour $m > 0$, avec une racine nulle pour $m = 0$. Elles coïncident pour $m = 2$. Si l'on exige deux racines positives distinctes, la réponse est $m > 0$ avec $m \neq 2$.

Le réflexe de ce chapitre

Les mots « réel », « distinct », « positif » et « rationnel » imposent des conditions différentes. Les traduire séparément avant de les croiser.

CHAPITRE 3 · POLYNÔMES

Degré et racines

Un polynôme non nul $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, avec $a_n \neq 0$, a pour degré n . Il est **unitaire** si $a_n = 1$. Le polynôme nul est un cas particulier : on ne lui attribue pas un degré entier ordinaire.

Racine et facteur

Un nombre r est racine de P si et seulement si $P(r) = 0$, ce qui équivaut à l'existence d'un polynôme Q tel que

$$P(x) = (x - r)Q(x).$$

Si $(x - r)^m$ divise P mais pas $(x - r)^{m+1}$, la racine r est de multiplicité m .

Par exemple, $P(x) = (x - 1)^2(x + 3)$ est de degré trois. Il possède deux racines distinctes, 1 et -3 , mais trois racines comptées avec multiplicité : 1, 1, -3 .

Combien de racines peut-on avoir ?

Un polynôme non nul de degré n possède au plus n racines distinctes. En effet, chaque nouvelle racine distincte permet de retirer un nouveau facteur de degré un ; on ne peut en retirer plus que le degré initial.

Sur les complexes, tout polynôme non constant se décompose en facteurs du premier degré. On compte alors exactement n racines avec multiplicité. Sur les réels, certaines racines peuvent manquer : $x^2 + 1$ n'a aucune racine réelle.

Division euclidienne

Pour $B \neq 0$, il existe un unique quotient Q et un unique reste R tels que

$$A = BQ + R, \quad R = 0 \text{ ou } \deg R < \deg B.$$

Si $B = x - r$, le reste est constant. Si B est de degré deux, le reste a la forme $ux + v$, avec éventuellement $u = 0$.

Piège

Une racine double ne constitue pas deux valeurs distinctes. Toujours préciser si l'on compte les valeurs solutions ou les racines avec leur multiplicité.

CHAPITRE 3 · RESTES

Évaluer au bon endroit

La division par un facteur connu devient très simple lorsqu'on évalue une identité aux racines de ce facteur.

Théorème du reste

Le reste de la division de $P(x)$ par $x - r$ est $P(r)$.

Preuve. Dans $P(x) = (x - r)Q(x) + R$, remplacer x par r . Il reste $P(r) = R$.

Exemple 1 : un reste sans division

Pour $P(x) = x^3 - 2x + 5$, le reste modulo $x - 2$ vaut

$$P(2) = 8 - 4 + 5 = \boxed{9}.$$

Exemple 2 : deux évaluations suffisent

On sait que $P(19) = 99$ et $P(99) = 19$. Cherchons le reste modulo $(x - 19)(x - 99)$.

Écrivons $R(x) = ux + v$. Aux deux racines du diviseur,

$$19u + v = 99, \quad 99u + v = 19.$$

En soustrayant, $80u = -80$, donc $u = -1$, puis $v = 118$. Le reste est

$$\boxed{R(x) = 118 - x}.$$

Formule d'interpolation du reste

Si $r \neq s$, le reste modulo $(x - r)(x - s)$ est

$$R(x) = P(r) \frac{x - s}{r - s} + P(s) \frac{x - r}{s - r}.$$

Chaque terme a été construit pour donner la bonne valeur en un point et s'annuler à l'autre.

Deux racines distinctes sont nécessaires

Cette méthode à deux évaluations ne s'applique pas directement à $(x - r)^2$: les deux équations seraient identiques. Une information supplémentaire, par exemple $P'(r)$, est alors nécessaire pour déterminer le reste.

CHAPITRE 3 · IDENTITÉS

Reconnaître un polynôme

Une équation $P(x) = 0$ demande les valeurs de x qui l'annulent. Une **identité** $P(x) = 0$ pour tout réel x signifie que tous les coefficients de P sont nuls.

Principe d'identification

Si deux polynômes de degré au plus n prennent les mêmes valeurs en $n + 1$ points distincts, ils sont identiques.

Preuve. Leur différence a au moins $n + 1$ racines distinctes et un degré au plus n . Elle est donc nulle.

Exemple : six valeurs, une structure

Un polynôme unitaire f de degré six vérifie

$$f(k) = -k \quad \text{pour } k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Posons $g(x) = f(x) + x$. Ce polynôme reste unitaire de degré six et s'annule en chacun des six entiers indiqués. Par factorisation,

$$g(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5).$$

Donc

$$f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5) - x,$$

et

$$f(6) = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 - 6 = \boxed{714}.$$

Une variante au degré quatre

Si f est unitaire de degré quatre et $f(k) = 10k$ pour $k = 0, 1, 2, 3$, alors

$$f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3) + 10x,$$

d'où $f(4) = 24 + 40 = \boxed{64}$.

Astuce

Si les valeurs données ressemblent à une formule simple $L(k)$, étudier $f(x) - L(x)$. Les évaluations se transforment en racines connues.

Piège

Le caractère unitaire fixe le coefficient devant le produit. Sans cette hypothèse, il faudrait conserver une constante multiplicative inconnue.

CHAPITRE 3 · VIÈTE

Au-delà du second degré

Les relations de Viète viennent du développement d'un produit de facteurs. Elles s'appliquent aussi aux racines complexes, comptées avec multiplicité.

Au degré trois

Pour $ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$,

$$S = \alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}, \quad Q = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}, \quad R = \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= S^2 - 2Q, \\ \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 &= S^3 - 3SQ + 3R.\end{aligned}$$

La seconde identité se déduit du développement de S^3 et de celui de SQ . Les termes contenant deux racines différentes s'éliminent.

Exemple

Pour $x^3 - 4x^2 + x + 6$, on a $S = 4$, $Q = 1$, $R = -6$. La somme des carrés vaut $16 - 2 = 14$ et celle des cubes

$$64 - 3 \times 4 \times 1 + 3 \times (-6) = \boxed{34}.$$

Si aucune racine n'est nulle, la somme des inverses vaut Q/R .

Au degré quatre

Pour $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, les sommes symétriques sont

$$e_1 = -\frac{b}{a}, \quad e_2 = \frac{c}{a}, \quad e_3 = -\frac{d}{a}, \quad e_4 = \frac{e}{a}.$$

Ici e_2 est la somme des six produits de deux racines, e_3 celle des quatre produits de trois racines, et e_4 le produit des quatre racines.

Les signes alternent : moins, plus, moins, plus. La somme des cubes vaut encore $e_1^3 - 3e_1e_2 + 3e_3$. Si $e_4 \neq 0$, la somme des inverses est e_3/e_4 .

CHAPITRE 3 · ENTRAÎNEMENT

Six exercices

Exercice 3.1 · Un reste immédiat

Calculer le reste de la division de $x^3 - 2x + 5$ par $x - 2$.

Exercice 3.2 · Deux valeurs

Un polynôme P vérifie $P(1) = 4$ et $P(3) = 10$. Déterminer son reste dans la division par $(x - 1)(x - 3)$.

Exercice 3.3 · Quatre racines cachées

Le polynôme P est unitaire de degré quatre et vérifie $P(k) = 2k$ pour $k = 0, 1, 2, 3$. Déterminer $P(x)$ puis $P(4)$.

Exercice 3.4 · Trois racines

Sans résoudre $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$, calculer la somme des carrés, la somme des cubes et la somme des inverses de ses trois racines.

Exercice 3.5 · Une identité

Déterminer les réels m, n, p tels que

$$(m - 1)x^2 + (n + 2)x + p = 0$$

pour tout réel x .

Exercice 3.6 · Quatre racines

Pour les quatre racines complexes, comptées avec multiplicité, de

$$x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x - 5 = 0,$$

calculer leur somme, leur produit, la somme de leurs cubes et la somme de leurs inverses.

Indications

Pour 3.2, écrire $R(x) = ux + v$. Pour 3.3, soustraire $2x$. Pour 3.6, attention au signe de la somme des produits de trois racines.

CHAPITRE 3 · CORRIGÉS

Les six solutions

3.1. Évaluer

Le reste vaut $P(2) = 8 - 4 + 5 = \boxed{9}$.

3.2. Interpoler

$R(x) = ux + v$ satisfait $u + v = 4$ et $3u + v = 10$. Donc $u = 3$, $v = 1$ et $\boxed{R(x) = 3x + 1}$.

3.3. Transformer les valeurs en zéros

$P(x) - 2x$ est unitaire de degré quatre et s'annule en $0, 1, 2, 3$. Ainsi

$$\boxed{P(x) = x(x-1)(x-2)(x-3) + 2x},$$

puis $P(4) = 24 + 8 = \boxed{32}$.

3.4. Utiliser Viète

$S = 4$, $Q = 1$, $R = -6$. Aucune racine n'est nulle. Les réponses sont

$$S^2 - 2Q = \boxed{14}, \quad S^3 - 3SQ + 3R = \boxed{34}, \quad \frac{Q}{R} = \boxed{-\frac{1}{6}}.$$

On peut contrôler avec les racines $-1, 2, 3$.

3.5. Annuler les coefficients

Un polynôme nul en tout réel est identiquement nul. Donc

$$m - 1 = 0, \quad n + 2 = 0, \quad p = 0, \quad \boxed{(m, n, p) = (1, -2, 0)}.$$

3.6. Garder les signes alternés

Les sommes symétriques sont $e_1 = 3$, $e_2 = 2$, $e_3 = -1$, $e_4 = -5$. La somme vaut donc $\boxed{3}$ et le produit $\boxed{-5}$. La somme des cubes est

$$e_1^3 - 3e_1e_2 + 3e_3 = 27 - 18 - 3 = \boxed{6}.$$

Le produit étant non nul, la somme des inverses est $e_3/e_4 = \boxed{1/5}$.

CHAPITRE 4 · RACINES COMMUNES

Éliminer un terme

Deux équations peuvent avoir une même racine sans avoir toutes leurs racines en commun. Pour la trouver, on commence souvent par éliminer le terme de plus haut degré.

Le principe d'élimination

Si r annule P et Q , il annule toute combinaison $uP + vQ$ de ces polynômes. La réciproque n'est pas automatique : un zéro de la combinaison doit encore être testé dans une équation initiale.

Exemple : une valeur du paramètre

Les polynômes $P(x) = x^2 - 3x + 2$ et $Q(x) = x^2 + kx - 2$ ont-ils une racine commune ?

On connaît les racines de P : 1 et 2. Il suffit de vérifier

$$Q(1) = k - 1, \quad Q(2) = 2k + 2.$$

On obtient $k = 1$ ou $k = -1$. Pour $k = 1$, la racine commune est 1 ; pour $k = -1$, elle est 2.

Une élimination qui ne suffit pas

Considérons $P = x^2 - 2x + 3$ et $Q = x^2 - 4x + 5$. Si une racine r était commune, elle satisferait

$$Q(r) - P(r) = -2r + 2 = 0,$$

donc $r = 1$. Mais $P(1) = 2 \neq 0$. Ces deux polynômes n'ont aucune racine commune, même complexe.

Choisir la combinaison

Pour deux polynômes unitaires du second degré, soustraire directement. Si les coefficients dominants sont différents, multiplier chaque équation par le coefficient dominant de l'autre avant de soustraire.

Piège

Une condition nécessaire n'est pas encore une condition suffisante. L'étape de substitution finale fait partie de la démonstration.

CHAPITRE 4 · MÉTHODE GÉNÉRALE

Une condition complète

Soient $P = ax^2 + bx + c$ et $Q = dx^2 + ex + f$, avec $a \neq 0$ et $d \neq 0$. Posons

$$L = db - ae, \quad M = dc - af.$$

L'élimination donne $dP - aQ = Lx + M$.

Trois cas à distinguer

1. Si $L \neq 0$, l'unique candidat est $r = -M/L$. Il est commun si et seulement si

$$aM^2 - bML + cL^2 = 0.$$

2. Si $L = 0$ mais $M \neq 0$, aucune racine n'est commune.
3. Si $L = M = 0$, on a $Q = (d/a)P$: les deux polynômes ont les mêmes racines, avec les mêmes multiplicités.

Justification du premier cas. Substituer $r = -M/L$ dans $P(r) = 0$, puis multiplier par L^2 . Si cette égalité est satisfaite, $dP(r) - aQ(r) = 0$ et $a \neq 0$ donnent aussi $Q(r) = 0$.

Deux racines communes

Deux polynômes du second degré qui possèdent deux racines distinctes communes sont proportionnels : ils s'écrivent $a(x - r)(x - s)$ et $d(x - r)(x - s)$.

Ainsi, pour que $2x^2 - 5x + 2$ et $4x^2 + mx + 4$ aient les deux mêmes racines, le second doit être le double du premier. Il faut et il suffit que $m = -10$.

Avec des coefficients réels

Si une racine commune est non réelle, sa conjuguée l'est aussi. Deux polynômes réels du second degré non proportionnels ne peuvent donc partager qu'une racine réelle.

Piège

Ne jamais diviser par L avant de savoir s'il est nul. C'est précisément ce cas qui peut cacher des polynômes proportionnels.

CHAPITRE 4 · PARAMÈTRES

Des coefficients échangés

Le problème

Pour quels réels a, b , avec $a \neq b$, les équations

$$x^2 + ax + b = 0, \quad x^2 + bx + a = 0$$

possèdent-elles une racine commune ? Quelle équation a pour racines les deux autres racines ?

Étape 1 : trouver le seul candidat

Si r est commun, la différence des équations donne

$$(a - b)r + b - a = (a - b)(r - 1) = 0.$$

Puisque $a \neq b$, on obtient $r = 1$.

Étape 2 : vérifier le candidat

La substitution dans l'une ou l'autre équation donne la même condition :

$$a + b = -1.$$

Elle est suffisante puisque les deux polynômes s'annulent alors en 1.

Étape 3 : identifier les autres racines

Le produit des racines du premier polynôme vaut b . Sa racine connue étant 1, l'autre vaut b . De même, l'autre racine du second vaut a .

Leur somme vaut $a + b = -1$ et leur produit ab . L'équation recherchée est

$$y^2 + y + ab = 0.$$

Contrôle par factorisation

Sous la condition $a + b = -1$,

$$x^2 + ax + b = (x - 1)(x - b),$$

$$x^2 + bx + a = (x - 1)(x - a).$$

Cette écriture vérifie à la fois la racine commune et les autres racines.

Piège

Si l'hypothèse $a \neq b$ est retirée, le cas $a = b$ doit être étudié séparément : les deux polynômes deviennent identiques.

CHAPITRE 4 · RÉDUIRE LE DEGRÉ

Une nouvelle inconnue

Une équation qui semble de degré quatre peut cacher une simple équation du second degré. L'essentiel est d'identifier une expression répétée.

La méthode en trois étapes

1. Poser $t = \varphi(x)$ et préciser les valeurs possibles de t .
2. Résoudre l'équation obtenue en t .
3. Pour chaque valeur admissible, résoudre $\varphi(x) = t$ et vérifier dans le domaine initial.

Exemple : une équation bicarrée

Pour $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$, poser $t = x^2 \geq 0$. L'équation devient

$$t^2 - 5t + 4 = (t - 1)(t - 4) = 0.$$

Les deux valeurs 1 et 4 sont admises. Elles donnent respectivement $x = \pm 1$ et $x = \pm 2$: quatre solutions distinctes.

Exemple : une valeur absolue

L'équation $|x|^2 - 3|x| + 2 = 0$ se transforme avec $t = |x| \geq 0$ en $(t - 1)(t - 2) = 0$. On retrouve $x = \pm 1, \pm 2$.

Substitution

Contrainte à conserver

$$t = x^2 \text{ ou } t = |x| \quad t \geq 0 ; \text{ zéro n'a qu'un antécédent}$$

$$t = e^x \quad t > 0 ; \text{ un seul antécédent } x = \ln t$$

$$t = \sin x \quad -1 \leq t \leq 1 ; \text{ retour trigonométrique nécessaire}$$

$$t = \sqrt{u(x)} \quad t \geq 0 \text{ et } u(x) \geq 0$$

Piège

Le nombre de solutions en t n'est pas le nombre de solutions en x . Une valeur positive de x^2 donne deux réels opposés ; une valeur négative n'en donne aucun.

CHAPITRE 4 · ENTRAÎNEMENT

Six exercices

Exercice 4.1 · Une racine en commun

Déterminer les réels k tels que $x^2 - 3x + 2$ et $x^2 + kx - 2$ aient une racine commune. Préciser cette racine.

Exercice 4.2 · Coefficients échangés

On suppose $a \neq b$. Déterminer la condition pour que $x^2 + ax + b$ et $x^2 + bx + a$ aient une racine commune. Former ensuite l'équation des deux autres racines.

Exercice 4.3 · Deux racines communes

Déterminer m pour que $2x^2 - 5x + 2$ et $4x^2 + mx + 4$ aient les mêmes racines.

Exercice 4.4 · Un faux candidat

Les polynômes $x^2 - 2x + 3$ et $x^2 - 4x + 5$ ont-ils une racine commune ? Justifier complètement.

Exercice 4.5 · Bicarrée

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0.$$

Exercice 4.6 · Valeur absolue

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$|x|^2 - 3|x| + 2 = 0.$$

Indications

Pour 4.1, commencer par factoriser le premier polynôme. Pour 4.3, comparer les coefficients dominants. Pour 4.5 et 4.6, noter explicitement la contrainte imposée à la nouvelle inconnue.

CHAPITRE 4 · CORRIGÉS

Les six solutions

4.1. Tester les deux possibilités

Le premier polynôme vaut $(x-1)(x-2)$. Dans le second, $x=1$ donne $k-1=0$ et $x=2$ donne $2k+2=0$. Donc $\boxed{k=1}$ avec racine 1, ou $\boxed{k=-1}$ avec racine 2.

4.2. Soustraire puis utiliser Viète

La différence donne $(a-b)(x-1)=0$. Comme $a \neq b$, la racine commune vaut 1. Elle convient si et seulement si $\boxed{a+b=-1}$. Les autres racines sont b et a ; leur équation est $\boxed{y^2+y+ab=0}$.

4.3. Reconnaître un multiple

Le premier polynôme a deux racines distinctes, $1/2$ et 2. Le second doit être exactement son double. On obtient $\boxed{m=-10}$.

4.4. Contrôler après élimination

Une racine commune devrait annuler $-2x+2$, donc être 1. Or $1-2+3=2 \neq 0$. Il n'y a donc **aucune racine commune**.

4.5. Revenir aux deux signes

Avec $t = x^2 \geq 0$, $(t-1)(t-4)=0$. Donc $x^2=1$ ou $x^2=4$, d'où

$$\boxed{\{-2, -1, 1, 2\}}.$$

4.6. Revenir à la valeur absolue

Avec $t = |x| \geq 0$, $(t-1)(t-2)=0$. Les solutions de $|x|=1$ sont $-1, 1$, celles de $|x|=2$ sont $-2, 2$. On obtient à nouveau

$$\boxed{\{-2, -1, 1, 2\}}.$$

Même résultat, transformations différentes

Dans 4.5, les valeurs intermédiaires sont 1, 4. Dans 4.6, elles sont 1, 2. C'est le retour à la variable x qui donne ici les mêmes solutions.

CHAPITRE 5 · SUBSTITUTIONS

Repérer une symétrie

Des puissances centrées autour d'un même point

Pour résoudre $(x-6)^4 + (x-8)^4 = 16$, le milieu de 6 et 8 suggère $u = x-7$. On obtient

$$(u+1)^4 + (u-1)^4 = 2(u^4 + 6u^2 + 1) = 16.$$

Poser $t = u^2 \geq 0$ conduit à

$$t^2 + 6t - 7 = (t-1)(t+7) = 0.$$

Seul $t = 1$ convient. Donc $u = \pm 1$ et $x = 6$ ou 8 .

Une équation réciproque

Dans $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$, avec $a \neq 0$, zéro n'est pas solution. En divisant par x^2 puis en posant $t = x + 1/x$, on obtient

$$a(t^2 - 2) + bt + c = 0.$$

Pour x réel non nul, on doit avoir $t \leq -2$ ou $t \geq 2$.

En effet, $t^2 - 4 = (x - 1/x)^2 \geq 0$. Réciproquement, toute valeur réelle t vérifiant $|t| \geq 2$ donne au moins une solution réelle de $x^2 - tx + 1 = 0$.

Exemple réciproque

L'équation $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$ donne

$$t^2 - 5t + 6 = (t-2)(t-3) = 0.$$

Pour $t = 2$, $x = 1$; pour $t = 3$, $x = (3 \pm \sqrt{5})/2$. Il y a donc trois solutions réelles distinctes ; 1 est une racine double.

Produits groupés

Avant de développer quatre facteurs, chercher des paires ayant la même somme. Par exemple,

$$(x-1)(x-4)(x-2)(x-3) = (x^2 - 5x + 4)(x^2 - 5x + 6).$$

Poser $t = x^2 - 5x + 5$ transforme ce produit en $(t-1)(t+1) = t^2 - 1$.

CHAPITRE 5 · DOMAINES

Radicaux et exponentielles

Radicaux : utiliser somme et différence

Réolvons

$$\sqrt{2x+1} - \sqrt{2x-1} = 1.$$

Le domaine est $x \geq 1/2$. Posons $U = \sqrt{2x+1}$ et $V = \sqrt{2x-1}$. On sait que $U - V = 1$ et

$$(U - V)(U + V) = U^2 - V^2 = 2.$$

Donc $U + V = 2$. En additionnant et en soustrayant,

$$U = \frac{3}{2}, \quad V = \frac{1}{2}.$$

Il vient $2x - 1 = 1/4$, soit $x = \boxed{5/8}$. Le contrôle donne bien $3/2 - 1/2 = 1$.

Élever au carré

L'implication $A = B \Rightarrow A^2 = B^2$ est vraie, mais la réciproque peut échouer à cause du signe. Pour $\sqrt{u(x)} = v(x)$, il faut conserver $u(x) \geq 0$ et $v(x) \geq 0$ avant d'utiliser $u(x) = v(x)^2$.

Exponentielles : une inconnue strictement positive

Pour $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$, poser $t = e^x > 0$. L'équation devient $(t - 1)(t - 2) = 0$. Les deux valeurs sont positives, donc

$$\boxed{x = 0 \text{ ou } x = \ln 2}.$$

Logarithmes : ne pas oublier le domaine

Dans $(\ln x)^2 - 3 \ln x + 2 = 0$, le domaine est $x > 0$. Avec $t = \ln x \in \mathbb{R}$, on trouve $t = 1$ ou $t = 2$, donc $x = e$ ou e^2 .

Astuce

Une substitution doit être accompagnée de son domaine et de son retour. Noter ces deux informations dès le départ évite de perdre des solutions ou d'en ajouter.

CHAPITRE 5 · NOUVELLES RACINES

Transformer une équation

Soient α, β les racines de $P(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$. Pour former une équation dont les racines sont des expressions en α, β , on peut utiliser Viète ou changer directement de variable.

Transformation affine

Pour des constantes $p \neq 0$ et q , les racines $p\alpha + q, p\beta + q$ sont celles de

$$p^2 P\left(\frac{y-q}{p}\right) = 0,$$

soit

$$a(y-q)^2 + bp(y-q) + cp^2 = 0.$$

Exemple : doubler puis ajouter un

Si α, β sont racines de $x^2 - 3x + 1$, les nombres $2\alpha + 1, 2\beta + 1$ ont pour somme $2 \times 3 + 2 = 8$ et pour produit $4 \times 1 + 2 \times 3 + 1 = 11$. Leur équation est

$$y^2 - 8y + 11 = 0.$$

Racines inversées et multipliées

Si $c \neq 0$ et $k \neq 0$, les racines $k/\alpha, k/\beta$ sont celles de

$$cy^2 + bky + ak^2 = 0.$$

On l'obtient en substituant $x = k/y$, puis en multipliant par y^2 .

Exemple : trois sur chaque racine

Pour $x^2 - 7x + 2 = 0$ et $k = 3$, la nouvelle équation est

$$2y^2 - 21y + 9 = 0.$$

Contrôle par Viète : la somme vaut $3(\alpha + \beta)/(\alpha\beta) = 21/2$ et le produit $9/(\alpha\beta) = 9/2$.

Piège

Si $c = 0$, au moins une racine est nulle et son inverse n'existe pas. Si $p = 0$ dans une transformation affine, les deux nouvelles valeurs valent q ; il faut traiter ce cas directement.

CHAPITRE 5 · ENTRAÎNEMENT

Six exercices

Exercice 5.1 · Centrer

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$(x - 6)^4 + (x - 8)^4 = 16.$$

Exercice 5.2 · Réciproque

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0.$$

Préciser les solutions distinctes et signaler une éventuelle racine multiple.

Exercice 5.3 · Deux radicaux

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$\sqrt{2x + 1} - \sqrt{2x - 1} = 1.$$

Exercice 5.4 · Exponentielle

Résoudre $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$.

Exercice 5.5 · Inverser et multiplier

Les nombres α, β sont racines de $x^2 - 7x + 2 = 0$. Former une équation du second degré dont les racines sont $3/\alpha, 3/\beta$.

Exercice 5.6 · Transformation affine

Les nombres α, β sont racines de $x^2 - 3x + 1 = 0$. Former l'équation unitaire dont les racines sont $2\alpha + 1, 2\beta + 1$.

Indications

Pour 5.1, le milieu des deux décalages est 7. Pour 5.2, diviser par x^2 après avoir écarté zéro. Pour 5.3, multiplier une différence de radicaux par leur somme.

CHAPITRE 5 · CORRIGÉS

Les six solutions

5.1. Centrer puis poser un carré

Avec $u = x - 7$, puis $t = u^2 \geq 0$, on obtient $(t - 1)(t + 7) = 0$. Donc $u = \pm 1$ et $x = 6$ ou 8 .

5.2. Une valeur intermédiaire, deux antécédents

Zéro est exclu. Pour $t = x + 1/x$, l'équation devient $(t - 2)(t - 3) = 0$. Les deux valeurs sont admissibles. Elles donnent

$$1, \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

La factorisation $(x - 1)^2(x^2 - 3x + 1)$ montre que 1 est double.

5.3. Conserver le domaine

On impose $x \geq 1/2$. Avec $U = \sqrt{2x + 1}$ et $V = \sqrt{2x - 1}$, les relations $U - V = 1$ et $U^2 - V^2 = 2$ donnent $U + V = 2$. Ainsi $V = 1/2$, puis $x = 5/8$, qui vérifie l'équation.

5.4. Revenir par le logarithme

$t = e^x > 0$ vérifie $(t - 1)(t - 2) = 0$. Par conséquent $x \in \{0, \ln 2\}$.

5.5. Somme et produit des inverses

$\alpha + \beta = 7$ et $\alpha\beta = 2 \neq 0$. Les nouvelles racines ont pour somme $21/2$ et pour produit $9/2$. Une équation à coefficients entiers est

$$2y^2 - 21y + 9 = 0.$$

5.6. Calculer les deux invariants

La somme vaut $2(\alpha + \beta) + 2 = 8$. Le produit vaut

$$(2\alpha + 1)(2\beta + 1) = 4\alpha\beta + 2(\alpha + \beta) + 1 = 11.$$

L'équation est donc $y^2 - 8y + 11 = 0$.

CHAPITRE 6 · PARABOLES

Lire la forme canonique

Pour $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, la forme canonique est

$$f(x) = a(x - h)^2 + k, \quad h = -\frac{b}{2a}, \quad k = -\frac{\Delta}{4a}.$$

Le sommet de la parabole est $S(h, k)$ et son axe de symétrie est la droite $x = h$. Le signe de a donne le sens d'ouverture ; le discriminant donne le nombre d'intersections avec l'axe des abscisses.

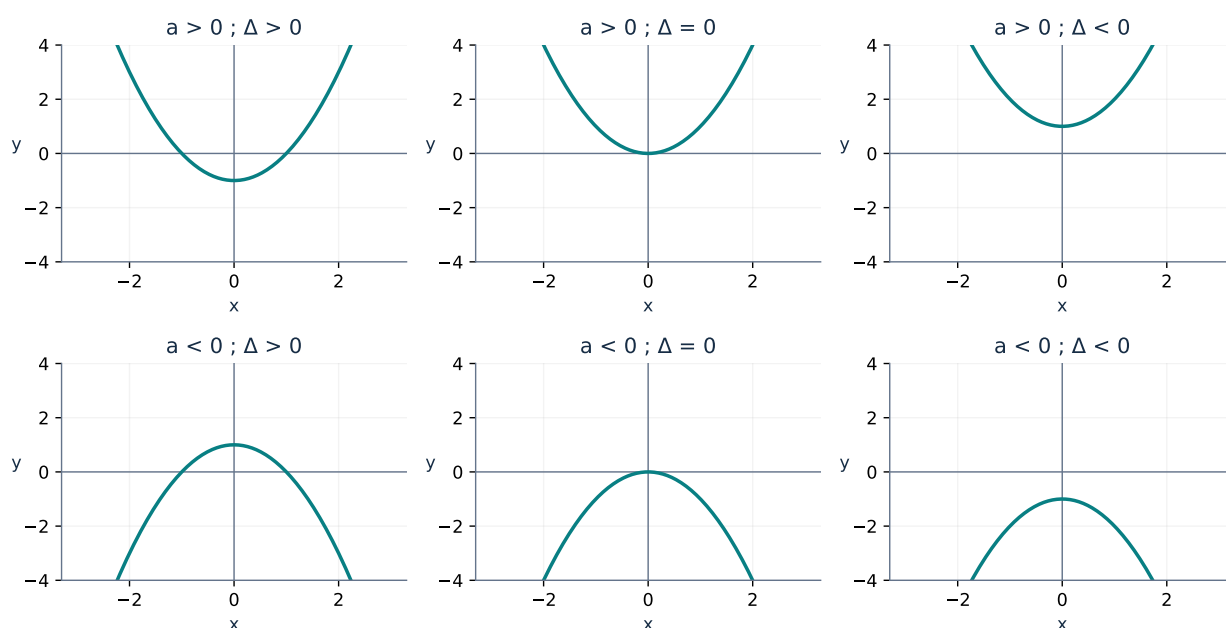


Image sur tous les réels

Si $a > 0$, f atteint son minimum k en h et $f(\mathbb{R}) = [k, +\infty[$. Si $a < 0$, elle atteint son maximum k en h et $f(\mathbb{R}) =]-\infty, k]$.

Exemple

$-2x^2 + 8x - 3 = -2(x - 2)^2 + 5$. Le sommet est $(2, 5)$ et l'ensemble des valeurs est $] -\infty, 5]$. La valeur 5 est atteinte une seule fois, en $x = 2$.

CHAPITRE 6 · INTERVALLES

Extrema sur un domaine

Sur un intervalle, le sommet peut être accessible ou non. Pour un intervalle fermé $[u, v]$, les valeurs à comparer sont celles des extrémités et celle du sommet, seulement si $h \in [u, v]$.

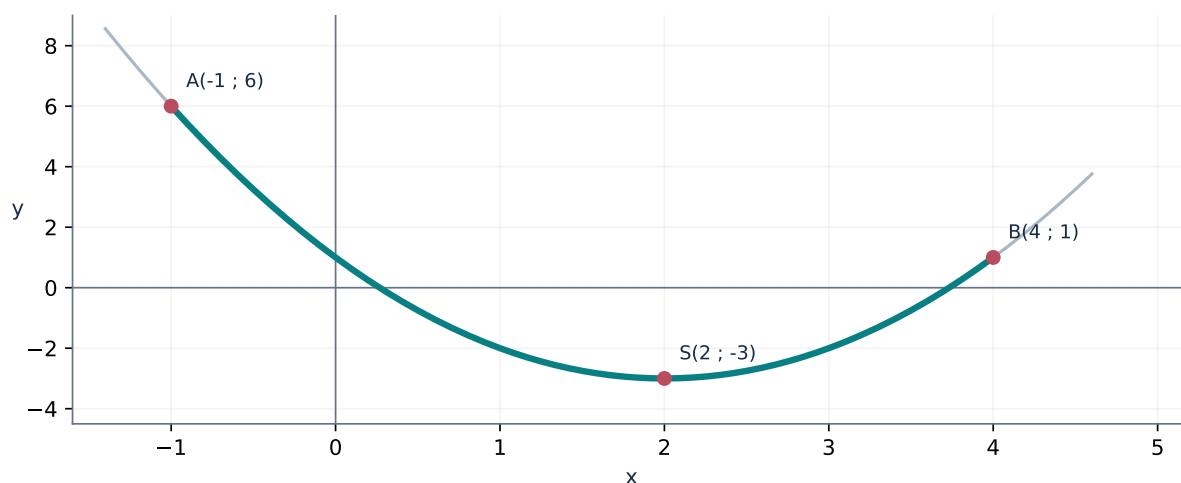
Exemple sur un intervalle fermé

Soit $f(x) = x^2 - 4x + 1 = (x - 2)^2 - 3$ sur $[-1, 4]$. Le sommet 2 appartient à l'intervalle. On calcule

$$f(-1) = 6, \quad f(2) = -3, \quad f(4) = 1.$$

Ainsi le minimum est -3 et le maximum 6. Par continuité,

$$f([-1, 4]) = [-3, 6].$$



La même fonction sur un intervalle ouvert

Sur $]2, 5[$, on a $0 < (x - 2)^2 < 9$. L'image est donc $] - 3, 6[$. Aucun des deux bords n'est atteint.

Un bord exclu ne suffit pas à exclure une valeur

Sur $]0, 4[$, la valeur $f(0) = 1$ n'est pas atteinte, car ses seuls antécédents sont 0 et 4, tous deux exclus. Mais sur $]0, 5[$, cette même valeur est atteinte en 4. Il faut raisonner sur tous les antécédents possibles.

CHAPITRE 6 · SIGNES

Positivité et cas limites

Signe d'un vrai second degré

Si $a > 0$ et si f possède deux racines distinctes $\alpha < \beta$, alors $f > 0$ à l'extérieur de $[\alpha, \beta]$ et $f < 0$ à l'intérieur. Si $a < 0$, les signes sont inversés.

Pour un coefficient dominant strictement positif,

$$f(x) > 0 \text{ pour tout réel } x \iff \Delta < 0,$$

$$f(x) \geq 0 \text{ pour tout réel } x \iff \Delta \leq 0.$$

Le cas $\Delta = 0$ donne une tangence à l'axe : le polynôme s'annule au sommet mais ne change pas de signe.

Exemple : positivité stricte

Pour $f_m(x) = x^2 + 2mx + m + 2$, on a

$$\Delta = 4(m^2 - m - 2) = 4(m - 2)(m + 1).$$

Donc $f_m > 0$ sur $\mathbb{R}$ exactement pour $-1 < m < 2$. Pour une positivité large, les deux bornes seraient incluses.

Quand le degré change

Pour $g_m(x) = (m - 1)x^2 + 2(m - 1)x + m + 1$, la forme

$$g_m(x) = (m - 1)(x + 1)^2 + 2$$

montre directement que $g_m \geq 0$ sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $m \geq 1$. Pour $m = 1$, la fonction est constante égale à 2.

Le coefficient dominant peut s'annuler

Si $a = 0$, étudier $bx + c$. Une fonction affine non constante ne garde pas un même signe sur tous les réels. Si $b = 0$ également, tout dépend du signe de la constante c .

Une équation qui devient linéaire perd son statut de second degré. Dans les réels ordinaires, on ne compte pas une prétendue « racine à l'infini » comme solution.

CHAPITRE 6 · ENTRAÎNEMENT

Six exercices

Exercice 6.1 · Sommet et zéros

Mettre $x^2 - 6x + 5$ sous forme canonique. Donner le sommet, les racines et le signe du polynôme.

Exercice 6.2 · Image globale

Déterminer l'ensemble des valeurs prises par $-2x^2 + 8x - 3$ lorsque x décrit $\mathbb{R}$.

Exercice 6.3 · Intervalle fermé

Déterminer l'image de $[-1, 4]$ par $f(x) = x^2 - 4x + 1$.

Exercice 6.4 · Intervalle ouvert

Déterminer l'image de $]2, 5[$ par la même fonction f . Justifier l'inclusion ou l'exclusion des bornes.

Exercice 6.5 · Toujours strictement positif

Déterminer les réels m tels que

$$x^2 + 2mx + m + 2 > 0 \quad \text{pour tout réel } x.$$

Exercice 6.6 · Ne pas perdre le cas constant

Déterminer les réels m tels que

$$(m - 1)x^2 + 2(m - 1)x + m + 1 \geq 0$$

pour tout réel x .

Indications

Pour les images, commencer par la forme canonique. Pour 6.5, distinguer > 0 et ≥ 0 . Pour 6.6, compléter le carré avant d'utiliser une formule de discriminant.

CHAPITRE 6 · CORRIGÉS

Les six solutions

6.1. Trois lectures du même polynôme

$x^2 - 6x + 5 = (x - 3)^2 - 4 = (x - 1)(x - 5)$. Le sommet est $(3, -4)$, les racines sont $1, 5$. Le signe est positif pour $x < 1$ ou $x > 5$, négatif pour $1 < x < 5$, nul en $1, 5$.

6.2. Un maximum atteint

$-2x^2 + 8x - 3 = -2(x - 2)^2 + 5 \leq 5$. Toute valeur inférieure ou égale à 5 est atteinte. L'image est $]-\infty, 5]$.

6.3. Comparer sommet et extrémités

$f(x) = (x - 2)^2 - 3$. Le sommet appartient au domaine ; $f(2) = -3$, $f(-1) = 6$, $f(4) = 1$. Par continuité, l'image est $[-3, 6]$.

6.4. Deux bornes non atteintes

Pour $2 < x < 5$, $0 < x - 2 < 3$, donc $-3 < f(x) < 6$. Toutes les valeurs intermédiaires sont atteintes, d'où $] -3, 6[$.

6.5. Un discriminant strictement négatif

Le coefficient dominant vaut $1 > 0$. La condition est

$$4(m - 2)(m + 1) < 0 \iff -1 < m < 2.$$

Aux bornes, le polynôme aurait une racine double et ne serait plus strictement positif partout.

6.6. Une forme canonique valable pour tout paramètre

L'expression vaut $(m - 1)(x + 1)^2 + 2$. Pour $m \geq 1$, elle est au moins 2. Pour $m < 1$, elle tend vers $-\infty$ lorsque $|x|$ augmente. La réponse est donc $m \geq 1$, y compris le cas constant $m = 1$.

CHAPITRE 7 · CONTINUITÉ

Prouver qu'une racine existe

Changement de signe

Si une fonction f est continue sur $[u, v]$ et si $f(u)f(v) < 0$, alors il existe au moins une racine dans $]u, v[$.

C'est une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires : entre une valeur négative et une valeur positive, la fonction doit prendre la valeur zéro.

Exemple : une racine entre zéro et un

Pour $f(x) = x^3 + x - 1$, on a $f(0) = -1$ et $f(1) = 1$. Comme un polynôme est continu, f possède une racine dans $]0, 1[$.

Cette racine est unique. En effet, pour $u < v$,

$$f(v) - f(u) = (v - u)(v^2 + uv + u^2 + 1) > 0,$$

car $v^2 + uv + u^2 = (v + u/2)^2 + 3u^2/4 \geq 0$. Ainsi f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Placer plusieurs racines

Si un polynôme de degré trois prend successivement des signes $-$, $+$, $-$, $+$ en quatre points ordonnés, il possède au moins une racine dans chacun des trois intervalles séparant ces points. Il a donc exactement trois racines réelles distinctes.

Cette méthode permet de montrer un **entrelacement** : les racines d'un polynôme se trouvent entre des points ou des racines déjà connus, sans avoir besoin de leurs expressions exactes.

La continuité est indispensable

La fonction $1/x$ est négative en -1 et positive en 1 , mais elle n'a aucune racine. Elle n'est pas définie, et donc pas continue, sur tout l'intervalle $[-1, 1]$.

Existence puis unicité

Le changement de signe assure l'existence. Pour l'unicité, ajouter une monotonie, une factorisation, une information sur le degré ou un autre argument indépendant.

CHAPITRE 7 · IMAGES

Résoudre par rapport à x

Déterminer l'image d'une fonction, c'est chercher les valeurs de y pour lesquelles l'équation $y = f(x)$ possède au moins une solution x dans le domaine autorisé.

Une fonction homographique non constante

Pour

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad c \neq 0, \quad ad - bc \neq 0,$$

le domaine est $\mathbb{R} \setminus \{-d/c\}$ et l'image est $\mathbb{R} \setminus \{a/c\}$.

Démonstration. L'équation $y = (ax + b)/(cx + d)$ donne

$$(cy - a)x = b - dy.$$

Si $y \neq a/c$, la solution unique est $x = (b - dy)/(cy - a)$. Son dénominateur initial vaut

$$cx + d = \frac{bc - ad}{cy - a} \neq 0,$$

donc elle est autorisée. Si $y = a/c$, l'équation conduirait à $ad = bc$, exclu par hypothèse.

Exemple

Pour $f(x) = (2x + 3)/(x - 1)$, on résout

$$(y - 2)x = y + 3.$$

Si $y \neq 2$, $x = (y + 3)/(y - 2)$ convient. La valeur $y = 2$ est impossible. Ainsi l'image est $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Si le domaine est restreint

Pour $g(x) = 1/(x - 1)$ avec $x > 2$, on a $x - 1 > 1$, donc $0 < g(x) < 1$. Réciproquement, pour $0 < y < 1$, le réel $x = 1 + 1/y$ est supérieur à 2. L'image est $]0, 1[$.

Piège

Si $ad - bc = 0$, la fonction est constante sur son domaine. Si $c = 0$, on obtient une fonction affine ou constante. Ces cas sortent des hypothèses de la formule encadrée.

CHAPITRE 7 · VALEURS INTERDITES

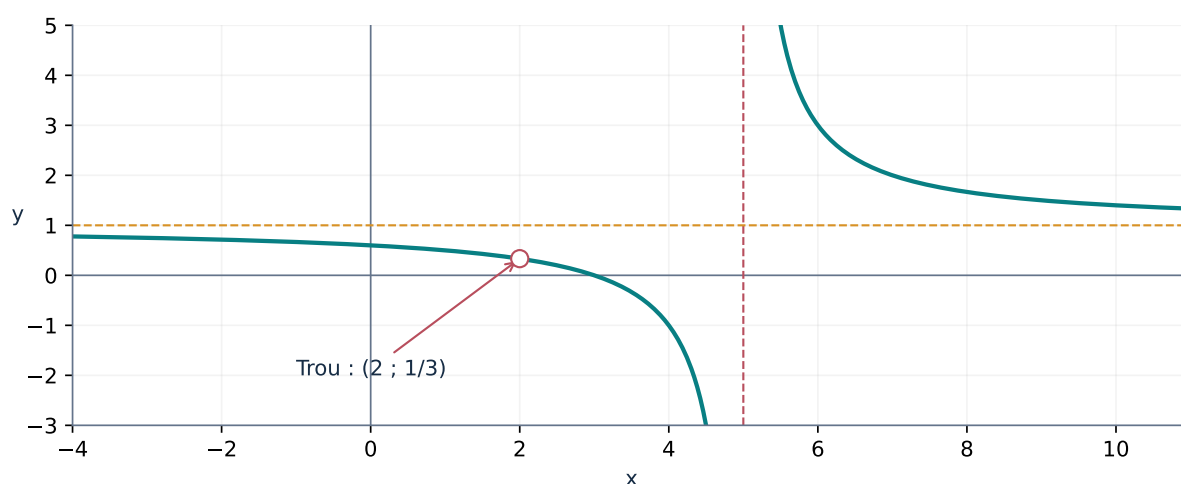
Les trous dans une courbe

Simplifier sans changer le domaine

Considérons

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10} = \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-5)}.$$

Le domaine initial est $\mathbb{R} \setminus \{2, 5\}$. Pour ces valeurs autorisées seulement, $f(x) = (x-3)/(x-5)$.



La fonction simplifiée ne prend jamais la valeur 1. De plus, la valeur $1/3$ n'a qu'un seul antécédent :

$$\frac{x-3}{x-5} = \frac{1}{3} \iff 3x - 9 = x - 5 \iff x = 2.$$

Cet antécédent est interdit. L'image de la fonction initiale est donc

$$\mathbb{R} \setminus \{1, 1/3\}.$$

Un trou n'enlève pas toujours une valeur à l'image

Restreindre $x \mapsto x^2$ à $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ n'enlève pas la valeur 1 à l'image : elle reste atteinte en $x = -1$. Une valeur disparaît uniquement si tous ses antécédents sont exclus.

Astuce

Écrire le domaine avant toute simplification. À la fin, vérifier si chaque point retiré supprime réellement une valeur dans l'image.

CHAPITRE 7 · QUOTIENTS

Le discriminant en y

Pour $y = (Ax^2 + Bx + C)/(Dx^2 + Ex + F)$, avec dénominateur non nul, l'équation équivalente est

$$(Dy - A)x^2 + (Ey - B)x + (Fy - C) = 0.$$

Si $Dy - A \neq 0$, l'existence de solutions réelles exige un discriminant en x positif ou nul. Il faut ensuite vérifier le domaine. Si $Dy - A = 0$, on traite une équation linéaire ou constante.

Exemple complet

Déterminons l'image de

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}.$$

Le dénominateur vaut $(x - 1/2)^2 + 3/4 > 0$, donc le domaine est $\mathbb{R}$. L'équation en x devient

$$(y - 1)x^2 - (y + 1)x + (y - 1) = 0.$$

Pour $y \neq 1$, il faut et il suffit que

$$\Delta_x = (y + 1)^2 - 4(y - 1)^2 = -(3y - 1)(y - 3) \geq 0,$$

soit $1/3 \leq y \leq 3$. Pour $y = 1$, l'équation devient $-2x = 0$: elle a bien la solution $x = 0$. Aucune valeur interdite n'est à éliminer. Ainsi

$$f(\mathbb{R}) = [1/3, 3].$$

Les bornes sont atteintes : $f(-1) = 1/3$ et $f(1) = 3$.

Une réécriture peut être plus courte

Pour $(x^2 - 1)/(x^2 + 1)$, écrire

$$1 - \frac{2}{x^2 + 1}.$$

Comme $x^2 + 1 \in [1, +\infty[$, l'image est $[-1, 1[$.

Piège

Le discriminant seul ne règle ni un coefficient dominant nul, ni un dénominateur nul, ni une restriction supplémentaire de x . Chacune de ces conditions doit être contrôlée.

CHAPITRE 7 · ENTRAÎNEMENT

Six exercices

Exercice 7.1 · Existence et unicité

Montrer que $x^3 + x - 1 = 0$ possède une unique racine réelle et que cette racine appartient à $]0, 1[$.

Exercice 7.2 · Homographie

Donner le domaine et l'image de

$$f(x) = \frac{2x + 3}{x - 1}.$$

Exercice 7.3 · Simplification avec un trou

Donner le domaine et l'image de

$$g(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10}.$$

Exercice 7.4 · Une borne non atteinte

Déterminer l'image de $h(x) = (x^2 - 1)/(x^2 + 1)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7.5 · Un discriminant utile

Déterminer l'image de $p(x) = (x^2 + x + 1)/(x^2 - x + 1)$ sur $\mathbb{R}$. Traiter séparément la valeur $y = 1$.

Exercice 7.6 · Domaine restreint

Déterminer les valeurs de $1/(x - 1)$ lorsque $x > 2$. Justifier que toutes les valeurs annoncées sont atteintes.

Indications

Pour 7.1, la différence $f(v) - f(u)$ permet de démontrer la monotonie. Pour 7.3, conserver les deux exclusions initiales. Pour 7.5, vérifier d'abord que le dénominateur est toujours positif.

CHAPITRE 7 · CORRIGÉS

Les six solutions

7.1. Continuité et croissance

$f(0) = -1$, $f(1) = 1$: la continuité donne une racine dans $]0, 1[$. Pour $u < v$, $f(v) - f(u) = (v - u)(v^2 + uv + u^2 + 1) > 0$. La croissance stricte donne l'unicité sur $\mathbb{R}$.

7.2. Isoler x

Le domaine est $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Pour $y \neq 2$, $x = (y + 3)/(y - 2)$ est l'unique antécédent, toujours différent de 1. La valeur 2 est impossible. L'image est $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

7.3. Garder les exclusions

Le domaine est $\mathbb{R} \setminus \{2, 5\}$. La forme $(x - 3)/(x - 5)$ exclut la valeur 1. La valeur $1/3$ n'est atteinte qu'en $x = 2$, interdit. L'image est donc $\mathbb{R} \setminus \{1, 1/3\}$.

7.4. Réécrire

$h(x) = 1 - 2/(x^2 + 1)$, avec $x^2 + 1 \geq 1$. La valeur -1 est atteinte en zéro, tandis que 1 n'est jamais atteinte. L'image est $[-1, 1[$.

7.5. Ne pas oublier le cas linéaire

Le dénominateur est positif partout. Pour $y \neq 1$, le discriminant de $(y - 1)x^2 - (y + 1)x + y - 1 = 0$ est $-(3y - 1)(y - 3)$. Il est positif ou nul pour $y \in [1/3, 3]$. Pour $y = 1$, $x = 0$ convient. L'image est $[1/3, 3]$.

7.6. Prouver les deux inclusions

$x > 2$ implique $0 < 1/(x - 1) < 1$. Réciproquement, pour $0 < y < 1$, choisir $x = 1 + 1/y > 2$. L'image est donc exactement $]0, 1[$.

CHAPITRE 8 · POSITION DES RACINES

Comparer à un seuil

Dans tout ce chapitre, on normalise le coefficient dominant : $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a > 0$. Si nécessaire, multiplier le polynôme par -1 ne change pas ses racines.

Notons $h = -b/(2a)$ l'abscisse du sommet. Lorsque $\Delta > 0$, les deux racines $\alpha < \beta$ vérifient $h = (\alpha + \beta)/2$.

Deux racines distinctes et un seuil d

Position recherchée	Conditions nécessaires et suffisantes
$d < \alpha < \beta$	$\Delta > 0, h > d, f(d) > 0$
$\alpha < \beta < d$	$\Delta > 0, h < d, f(d) > 0$
$\alpha < d < \beta$	$f(d) < 0$

Pourquoi ces conditions ?

Pour deux racines distinctes, $f(d) > 0$ place d à l'extérieur de l'intervalle des racines. La position du sommet indique de quel côté : si $h > d$, les deux racines sont à droite ; si $h < d$, elles sont à gauche.

À l'inverse, $f(d) < 0$ signifie directement que d est strictement entre les deux racines ; cela assure déjà l'existence de deux racines distinctes.

Un seuil non nul

Pour imposer deux racines supérieures à d , on peut aussi poser $x = z + d$. Il faut alors deux racines positives pour le polynôme en z . Ses conditions sont : discriminant positif, somme positive, produit positif.

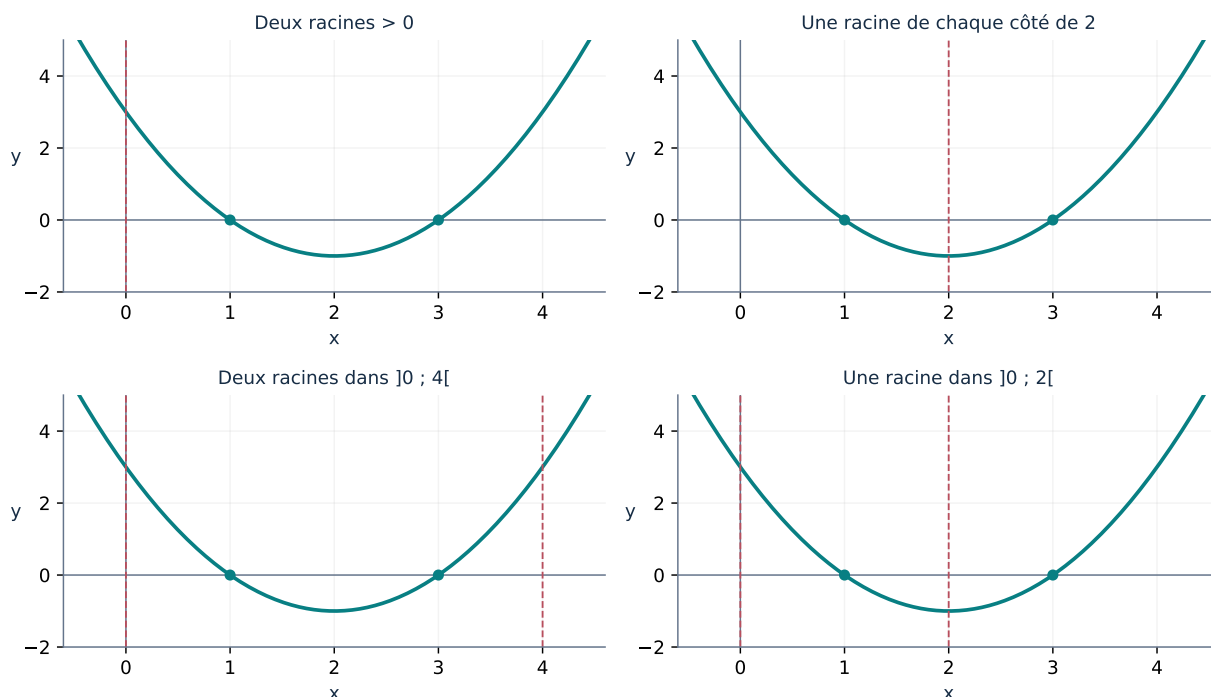
Piège

La seule condition $f(d) > 0$ ne dit pas si les racines sont toutes à gauche, toutes à droite ou même non réelles. Le discriminant et le sommet complètent l'information.

CHAPITRE 8 · INTERVALLES

Placer deux racines

On suppose toujours $a > 0$ et on fixe $u < v$. Les dessins ci-dessous illustrent les positions, sans constituer à eux seuls une démonstration.



Deux critères utiles

Les deux racines distinctes sont dans $]u, v[$ si et seulement si

$$\Delta > 0, \quad u < h < v, \quad f(u) > 0, \quad f(v) > 0.$$

Les bornes sont strictement entre les racines, soit $\alpha < u < v < \beta$, si et seulement si

$$f(u) < 0 \quad \text{et} \quad f(v) < 0.$$

Explication du premier critère. Les signes positifs placent les deux bornes à l'extérieur de l'intervalle des racines ; la position du sommet entre elles impose que les racines soient à l'intérieur de $]u, v[$.

Piège

Si l'on autorise une racine double ou des bornes incluses, les conditions changent. Il faut traduire le nouvel énoncé et vérifier les égalités, plutôt que remplacer mécaniquement tous les signes stricts par des signes larges.

CHAPITRE 8 · COMPTAGE

Exactement une racine

Pour un second degré ayant deux racines distinctes et ne s'annulant pas aux bornes u, v , il existe exactement une racine dans $]u, v[$ si et seulement si

$$\boxed{f(u)f(v) < 0}.$$

Un changement de signe assure une racine ; il ne peut y en avoir deux, car le signe aux extrémités serait alors le même.

Les deux exceptions à traiter

Une racine à une borne. Une racine en u ou v n'appartient pas à l'intervalle ouvert. L'autre racine peut néanmoins se trouver à l'intérieur. Le produit $f(u)f(v)$ vaut alors zéro.

Une racine double intérieure. Si $\Delta = 0$ et $h \in]u, v[$, il existe une seule valeur solution dans l'intervalle, bien que le signe ne change pas. Cela compte si l'énoncé parle de solutions distinctes et autorise les racines doubles.

Exemple : l'importance d'une borne

Étudions

$$f_\lambda(x) = (\lambda^2 + 1)x^2 - 4\lambda x + 2$$

et cherchons exactement une solution dans $]0, 1[$. On a

$$f_\lambda(0) = 2, \quad f_\lambda(1) = (\lambda - 1)(\lambda - 3).$$

Le produit est négatif pour $1 < \lambda < 3$. Restent les égalités et les racines doubles :

- $\lambda = 1$: $f_1 = 2(x - 1)^2$, aucune solution intérieure ;
- $\lambda = 3$: $f_3 = 2(5x - 1)(x - 1)$, une solution intérieure $1/5$;
- $\Delta = 8(\lambda^2 - 1) = 0$: pour $\lambda = -1$, la racine double est -1 ; pour $\lambda = 1$, elle est 1 .

Les cas doubles n'ajoutent rien. La réponse complète est

$$\boxed{\lambda \in]1, 3]}.$$

CHAPITRE 8 · PARAMÈTRES

Combiner les conditions

Deux racines strictement supérieures à un

Déterminer m pour que $f_m(x) = x^2 - 2mx + m + 2$ possède deux racines distinctes toutes deux supérieures à 1.

Les trois conditions du critère sont

$$\Delta = 4(m-2)(m+1) > 0, \quad h = m > 1, \quad f_m(1) = 3 - m > 0.$$

La première donne $m < -1$ ou $m > 2$. Les deux autres donnent $1 < m < 3$. Leur intersection est

$$2 < m < 3.$$

Aux bornes, $m = 2$ donne une racine double ; $m = 3$ donne une racine égale à 1. Les deux sont exclus par l'énoncé.

Une racine de chaque côté de un

Pour la même famille, la condition est seulement $f_m(1) < 0$, donc $m > 3$. Elle assure automatiquement deux racines distinctes.

Deux racines dans un intervalle

Pour $g_k(x) = x^2 - 4x + k$, on cherche deux racines distinctes dans $]1, 3[$. Le sommet $h = 2$ convient toujours. On impose

$$\Delta = 16 - 4k > 0, \quad g_k(1) = g_k(3) = k - 3 > 0.$$

Ainsi $3 < k < 4$. À $k = 3$, les racines sont les deux bornes ; à $k = 4$, elles fusionnent au sommet.

Organiser une réponse avec paramètre

Écrire d'abord les conditions géométriques, les traduire ensuite en inégalités, résoudre chacune, puis prendre leur intersection. Terminer par le contrôle des valeurs limites.

CHAPITRE 8 · ENTRAÎNEMENT

Six exercices

Exercice 8.1 · À droite d'un seuil

Déterminer m pour que $x^2 - 2mx + m + 2 = 0$ ait deux racines réelles distinctes strictement supérieures à 1.

Exercice 8.2 · De part et d'autre

Pour la même équation, déterminer m pour que 1 soit strictement entre les deux racines.

Exercice 8.3 · Dans un intervalle

Déterminer k pour que les deux racines distinctes de $x^2 - 4x + k = 0$ appartiennent à $]1, 3[$.

Exercice 8.4 · Un intervalle entre les racines

Déterminer k pour que les racines $\alpha < \beta$ de $x^2 - 4x + k = 0$ vérifient $\alpha < 0 < 3 < \beta$.

Exercice 8.5 · Attention à la borne

Déterminer les réels λ tels que

$$(\lambda^2 + 1)x^2 - 4\lambda x + 2 = 0$$

possède exactement une solution réelle dans $]0, 1[$.

Exercice 8.6 · Deux bornes simultanées

Déterminer les réels m tels que

$$x^2 - (m + 1)x + \frac{m}{2} = 0$$

possède exactement une solution dans $]0, 1[$.

Indications

Pour 8.1 et 8.3, utiliser le sommet. Pour 8.4, évaluer aux deux bornes. Pour 8.5 et 8.6, isoler les paramètres pour lesquels une borne est elle-même racine.

CHAPITRE 8 · CORRIGÉS

Les six solutions

8.1. Trois conditions

$\Delta = 4(m-2)(m+1) > 0$, $h = m > 1$ et $f(1) = 3 - m > 0$. Leur intersection donne $m \in]2, 3[$.

8.2. Un signe négatif suffit

Le coefficient dominant est positif. La condition est $f(1) = 3 - m < 0$, soit $m > 3$.

8.3. Sommet et bornes

$h = 2 \in]1, 3[$; il reste $16 - 4k > 0$ et $k - 3 > 0$. Donc $3 < k < 4$.

8.4. Deux points à l'intérieur

Il faut et il suffit que $f(0) = k < 0$ et $f(3) = k - 3 < 0$. La seconde condition découle de la première. Réponse : $k < 0$.

8.5. Inclure la bonne extrémité du paramètre

$f(0) = 2$ et $f(1) = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$ donnent $1 < \lambda < 3$ lorsque les bornes ne sont pas racines. À $\lambda = 1$, la seule racine est 1, exclue. À $\lambda = 3$, les racines sont $1/5$ et 1 : une seule est intérieure. Les cas $\Delta = 0$, soit $\lambda = \pm 1$, ne donnent aucune racine intérieure. Ainsi

$$\lambda \in]1, 3].$$

8.6. Un paramètre exceptionnel

On a $f(0) = m/2$, $f(1) = -m/2$, donc $f(0)f(1) = -m^2/4 < 0$ pour $m \neq 0$. Il existe alors exactement une racine dans l'intervalle. Le discriminant vaut $m^2 + 1 > 0$ pour tout m .

Pour $m = 0$, l'équation est $x(x-1) = 0$: les deux racines sont exclues de $]0, 1[$. La réponse est $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

CHAPITRE 9 · BICARRÉES

Compter les solutions réelles

Une équation bicarrée $ax^4 + bx^2 + c = 0$, avec $a \neq 0$, se transforme en $at^2 + bt + c = 0$ par $t = x^2$. Pour compter les solutions réelles distinctes en x , seules les racines $t \geq 0$ sont utiles.

Combien d'antécédents ?

Valeur distincte de t	Solutions réelles de $x^2 = t$	Nombre
$t < 0$	Aucune	0
$t = 0$	$x = 0$	1
$t > 0$	$x = -\sqrt{t}, \sqrt{t}$	2

Une racine double en t ne doit pas être comptée deux fois lorsqu'on cherche des solutions distinctes.

Quatre solutions réelles distinctes

Il faut et il suffit que l'équation en t ait deux racines distinctes strictement positives. Par Viète, cela équivaut à

$$b^2 - 4ac > 0, \quad -\frac{b}{a} > 0, \quad \frac{c}{a} > 0.$$

Trois, deux, une ou aucune

- Une racine $t = 0$ et une autre $t > 0$ donnent trois solutions.
- Une seule valeur distincte strictement positive de t , sans zéro, donne deux solutions.
- Si zéro est la seule valeur admissible de t , il y a une solution.
- Sans racine réelle positive ou nulle en t , il n'y a aucune solution réelle en x .

Piège

Le discriminant en t peut être positif alors que les deux racines sont négatives. Cela ne fournit aucune solution réelle en x .

CHAPITRE 9 · UNE FAMILLE

Tous les cas du paramètre

Étudions les solutions réelles distinctes de

$$x^4 + (1 - 2k)x^2 + k^2 - 1 = 0.$$

Avec $t = x^2 \geq 0$, le discriminant, la somme et le produit des racines en t sont

$$D = 5 - 4k, \quad S = 2k - 1, \quad P = k^2 - 1.$$

Les valeurs qui peuvent changer le comptage sont donc $k = -1$, $k = 1$ et $k = 5/4$.

Paramètre	Situation des racines en t	Solutions en x
$k < -1$	Deux racines négatives	0
$k = -1$	$t = 0$ et $t = -3$	1
$-1 < k < 1$	Deux racines de signes opposés	2
$k = 1$	$t = 0$ et $t = 1$	3
$1 < k < 5/4$	Deux racines positives distinctes	4
$k = 5/4$	Une racine double $t = 3/4$	2
$k > 5/4$	Aucune racine réelle en t	0

Vérifier les trois points de transition

Pour $k = -1$, le polynôme vaut $x^2(x^2 + 3)$: seule la valeur $x = 0$ convient.

Pour $k = 1$, il vaut $x^2(x^2 - 1)$: les solutions distinctes sont $-1, 0, 1$.

Pour $k = 5/4$, il vaut $(x^2 - 3/4)^2$: les solutions sont $\pm\sqrt{3}/2$, chacune de multiplicité deux.

Astuce

Dans une étude par paramètre, commencer par les zéros du discriminant et du produit. Ce sont les endroits où des racines fusionnent ou traversent zéro.

CHAPITRE 9 · ANTÉCÉDENTS

Une équation, deux comptages

Comparons deux équations utilisant le même trinôme $t^2 - 2at + 1$, mais des substitutions différentes.

Avec une valeur absolue

L'équation $|x|^2 - 2a|x| + 1 = 0$ donne $t = |x| \geq 0$. Son discriminant est $4(a^2 - 1)$ et le produit des racines vaut 1.

- Si $a < -1$, les deux racines en t sont négatives ; si $a = -1$, la racine double vaut -1 . Aucune n'est admissible.
- Si $-1 < a < 1$, aucune racine en t n'est réelle.
- Si $a = 1$, $t = 1$ est double et donne $x = \pm 1$: deux solutions.
- Si $a > 1$, les deux valeurs $t = a \pm \sqrt{a^2 - 1}$ sont positives et distinctes : chacune donne deux solutions, soit quatre au total.

Avec une exponentielle

L'équation $e^{2x} - 2ae^x + 1 = 0$ donne $t = e^x > 0$. Les valeurs admissibles de t sont les mêmes, mais chaque $t > 0$ n'a qu'un antécédent : $x = \ln t$.

Paramètre	Substitution $t = x $	Substitution $t = e^x$
$a < 1$	0 solution	0 solution
$a = 1$	2 solutions	1 solution
$a > 1$	4 solutions	2 solutions

Pour $a > 1$, les deux solutions exponentielles sont

$$\ln(a - \sqrt{a^2 - 1}), \quad \ln(a + \sqrt{a^2 - 1}).$$

Elles sont opposées, car les deux arguments positifs ont pour produit 1.

Piège

Le nombre d'antécédents dépend de la substitution. Il ne peut pas être déduit du seul degré de l'équation intermédiaire.

CHAPITRE 9 · DEUX VARIABLES

Factoriser en deux droites

Une équation du second degré en deux variables peut parfois s'écrire comme un produit de deux expressions affines. Son ensemble de solutions est alors la réunion de deux droites réelles, éventuellement parallèles ou confondues.

Exemple par regroupement

Considérons

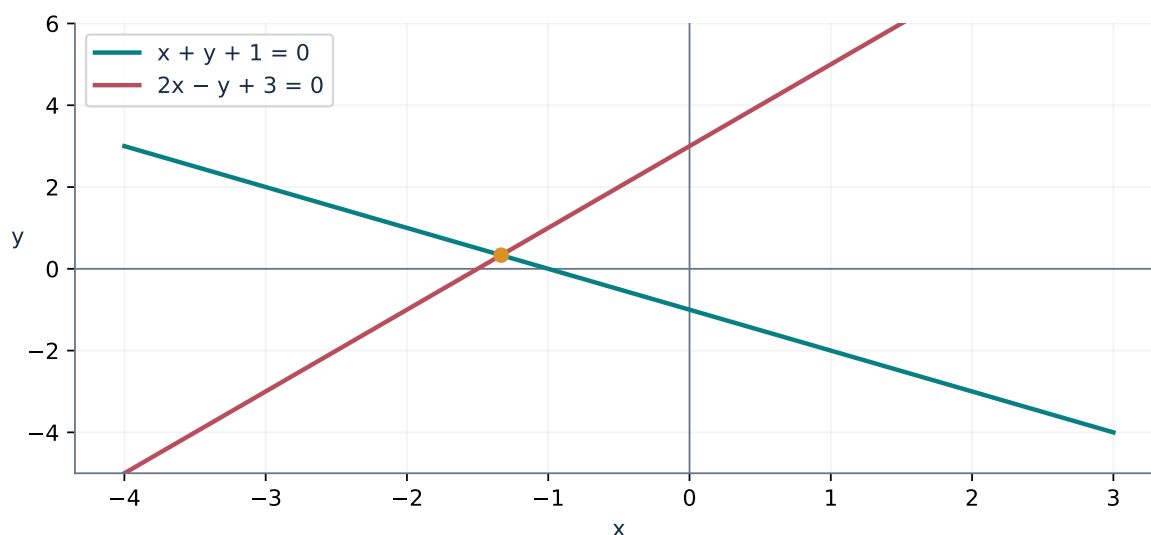
$$F(x, y) = 2x^2 + xy - y^2 + 5x + 2y + 3.$$

On vérifie par développement que

$$F(x, y) = (x + y + 1)(2x - y + 3).$$

Ainsi $F(x, y) = 0$ équivaut à

$$x + y + 1 = 0 \quad \text{ou} \quad 2x - y + 3 = 0.$$



Les deux droites se coupent en $(-4/3, 1/3)$, obtenu en résolvant les deux équations simultanément.

Chercher une méthode systématique

Voir $F(x, y)$ comme un trinôme en x , dont les coefficients dépendent de y . Si son discriminant est le carré d'une expression affine en y , la formule des racines peut faire apparaître deux facteurs affines.

Piège

L'équation $F(x, y) = 0$ demande les points de l'une ou l'autre droite. Résoudre les deux équations simultanément ne donne que leur point d'intersection.

CHAPITRE 9 · CRITÈRE AVANCÉ

Un discriminant carré

Écrivons

$$F(x, y) = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c, \quad a \neq 0.$$

Comme trinôme en x , son discriminant vaut $4H(y)$, avec

$$H(y) = Uy^2 + 2Vy + W,$$

$$U = h^2 - ab, \quad V = hg - af, \quad W = g^2 - ac.$$

Deux facteurs affines réels

F se factorise en deux facteurs affines réels si et seulement si H est le carré d'une expression affine réelle. Cela équivaut à l'un des cas suivants :

$$U > 0 \text{ et } V^2 = UW,$$

ou

$$U = 0, \quad V = 0, \quad W \geq 0.$$

Si $H(y) = (ry + s)^2$, la formule des racines donne

$$F(x, y) = \frac{1}{a}(ax + hy + g - (ry + s))(ax + hy + g + (ry + s)).$$

Lien avec un déterminant

Posons

$$D = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2.$$

Un calcul donne $V^2 - UW = -aD$. La condition $D = 0$ caractérise la dégénérescence algébrique, mais ne suffit pas à garantir deux droites réelles : $x^2 + y^2 = 0$ ne contient que le point réel $(0, 0)$.

Hypothèses du critère

Le raisonnement suppose $a \neq 0$. Si $a = 0$ mais $b \neq 0$, échanger x et y . Si $a = b = 0$, étudier directement l'expression restante. Pour obtenir des droites réelles, conserver les conditions de signe sur U ou W .

CHAPITRE 9 · SIGNES

La règle de Descartes

Cette règle donne des possibilités pour le nombre de racines positives ou négatives d'un polynôme réel. Elle ne remplace pas toujours une étude complète.

Règle admise

Écrire les coefficients non nuls dans l'ordre des puissances décroissantes, puis compter leurs changements de signe : soit V ce nombre. Le nombre de racines réelles strictement positives, comptées avec multiplicité, est V , ou $V - 2$, ou $V - 4$, et ainsi de suite, tant que le résultat reste positif ou nul.

Pour les racines strictement négatives, appliquer la règle à $P(-x)$. Une racine nulle est à traiter séparément, en factorisant une puissance de x .

Exemple

Soit $P(x) = x^5 - x^4 + x^2 - 1$. La suite des coefficients non nuls a pour signes $+, -, +, -$: trois changements. Il y a donc trois racines positives ou une seule, avec multiplicité.

Pour $P(-x) = -x^5 - x^4 + x^2 - 1$, les signes sont $-, -, +, -$: deux changements. Il y a donc deux ou zéro racines négatives.

Aller au-delà de la règle

On peut ici factoriser :

$$P(x) = (x - 1)(x^4 + x + 1).$$

Le second facteur est strictement positif sur $\mathbb{R}$:

- si $x \geq 0$, tous ses termes sont positifs ou nuls, avec constante 1 ;
- si $-1 < x < 0$, $x + 1 > 0$ et $x^4 \geq 0$; en $x = -1$, sa valeur est 1 ;
- si $x < -1$, $x^4 > |x| = -x$, donc $x^4 + x + 1 > 1$.

Ainsi P possède exactement une racine réelle, $x = 1$, qui est simple.

Piège

Ignorer les coefficients nuls lors du comptage. Ne pas confondre le nombre de changements de signe avec un nombre nécessairement exact de racines.

CHAPITRE 9 · ENTRAÎNEMENT

Six exercices

Exercice 9.1 · Une bicarrée

Résoudre $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ dans $\mathbb{R}$ et compter les solutions distinctes.

Exercice 9.2 · Une famille complète

Pour

$$x^4 + (1 - 2k)x^2 + k^2 - 1 = 0,$$

déterminer les valeurs de k donnant respectivement quatre, trois ou une solution réelle distincte.

Exercice 9.3 · Valeur absolue et paramètre

Selon le réel a , compter les solutions réelles distinctes de $|x|^2 - 2a|x| + 1 = 0$.

Exercice 9.4 · Exponentielle et paramètre

Selon le réel a , compter les solutions réelles de $e^{2x} - 2ae^x + 1 = 0$. Donner leurs expressions lorsqu'elles existent.

Exercice 9.5 · Deux droites

Factoriser

$$2x^2 + xy - y^2 + 5x + 2y + 3.$$

En déduire l'ensemble des points (x, y) qui annulent cette expression.

Exercice 9.6 · Possibilités et réalité

Appliquer la règle de Descartes à $P(x) = x^5 - x^4 + x^2 - 1$. Puis utiliser la factorisation $(x - 1)(x^4 + x + 1)$ pour déterminer toutes ses racines réelles.

Indications

Pour 9.2, étudier le signe des racines en $t = x^2$. Pour 9.3 et 9.4, comparer le nombre d'antécédents de chaque valeur positive de t . Pour 9.6, montrer que le facteur de degré quatre est positif.

CHAPITRE 9 · CORRIGÉS

Les six solutions

9.1. Deux valeurs positives

$t = x^2$ vérifie $(t-1)(t-4) = 0$. Les quatre solutions distinctes sont $\boxed{-2, -1, 1, 2}$.

9.2. Utiliser discriminant, somme et produit

En t , $D = 5 - 4k$, $S = 2k - 1$ et $P = k^2 - 1$. Il y a quatre solutions si et seulement si les deux racines sont distinctes et positives, soit $\boxed{1 < k < 5/4}$. Trois solutions exigent zéro et une racine positive : $\boxed{k = 1}$.

Une seule solution correspond à zéro, l'autre racine étant négative : $\boxed{k = -1}$.

9.3. Deux antécédents par valeur positive

Pour $t = |x|$, l'équation est $t^2 - 2at + 1 = 0$, avec $t \geq 0$. Si $a < 1$, aucune valeur ne convient. Si $a = 1$, $t = 1$ donne deux solutions. Si $a > 1$, les deux racines $a \pm \sqrt{a^2 - 1}$ sont positives et distinctes, donnant quatre solutions. Le comptage est donc $\boxed{0, 2, 4}$ selon ces trois cas.

9.4. Un seul antécédent positif

Avec $t = e^x > 0$, il n'y a aucune solution pour $a < 1$. Pour $a = 1$, l'unique solution est $\boxed{x = 0}$. Pour $a > 1$, les deux solutions sont

$$\boxed{x = \ln \left(a \pm \sqrt{a^2 - 1} \right)}.$$

9.5. Un produit nul

L'expression est $\boxed{(x+y+1)(2x-y+3)}$. Son ensemble de zéros est la réunion des droites $\boxed{y = -x - 1}$ et $\boxed{y = 2x + 3}$.

9.6. Une borne n'est pas un compte exact

Descartes autorise trois racines positives ou une seule, et deux racines négatives ou aucune, avec multiplicité. Or $x^4 + x + 1 > 0$ sur $\mathbb{R}$: c'est immédiat pour $x \geq 0$, suit de $x + 1 > 0$ pour $-1 < x < 0$, se vérifie en -1 , et suit de $x^4 > -x$ pour $x < -1$. La seule racine réelle est donc $\boxed{x = 1}$, simple.

FICHE DE RÉVISION 1

Les outils essentiels

Second degré : a non nul

$$\Delta = b^2 - 4ac, \quad h = -\frac{b}{2a}, \quad ax^2 + bx + c = a(x - h)^2 - \frac{\Delta}{4a}.$$

Pour les racines α, β comptées avec multiplicité :

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad P = \alpha\beta = \frac{c}{a}.$$

Objectif	Outil à essayer
Somme de puissances	$u_0 = 2, u_1 = S, u_n = Su_{n-1} - Pu_{n-2}$
Racines transformées	Calculer la nouvelle somme et le nouveau produit ; ou substituer directement
Reste d'une division	Évaluer aux racines du diviseur ; préciser le degré du reste
Racines communes	Éliminer le terme dominant, puis vérifier le candidat
Équation composée	Poser $t = \varphi(x)$, imposer son domaine, revenir à x
Image d'une fonction	Résoudre $y = f(x)$ et contrôler les antécédents autorisés
Racines dans un intervalle	Combiner discriminant, sommet et signes aux bornes
Nombre de solutions	Compter les valeurs intermédiaires admissibles, puis leurs antécédents

Le réflexe commun aux deux parties du livre

Traduire précisément les contraintes avant de calculer. En arithmétique, ce sont les chiffres et les retenues. En algèbre, ce sont le domaine, le degré, les signes et les multiplicités.

FICHE DE RÉVISION 2

Les contrôles décisifs

Avant le calcul

1. **Domaine.** Repérer dénominateurs, racines carrées et logarithmes.
2. **Degré.** Vérifier si le coefficient dominant peut s'annuler.
3. **Sens de la demande.** Racines réelles ou complexes ? Distinctes ou comptées avec multiplicité ? Intervalle ouvert ou fermé ?

Pendant le raisonnement

4. **Divisions.** Séparer le cas où l'expression divisée est nulle.
5. **Équivalences.** Après une élévation au carré, conserver les signes et vérifier les solutions.
6. **Substitutions.** Écrire les valeurs possibles de la nouvelle inconnue et le nombre de ses antécédents.

Avant de conclure

7. **Bornes.** Tester chaque paramètre qui annule un discriminant, un coefficient ou une valeur à une extrémité.
8. **Retour à l'énoncé.** Vérifier que toutes les solutions annoncées satisfont les contraintes initiales.
9. **Présentation.** Donner un ensemble, un intervalle ou un tableau clair, avec les bornes correctement incluses ou exclues.

Une bonne solution se lit dans les deux sens

Montrer que toute solution doit satisfaire les conditions trouvées, puis que chaque candidat retenu est effectivement une solution. C'est la différence entre une piste de calcul et une démonstration complète.

Pour approfondir les deux prolongements

La règle de Descartes est présentée dans [Math Fun Facts](#), Harvey Mudd College, « Descartes' Rule of Signs ». Le lien entre déterminants et équations de deux droites figure dans les [formules de mathématiques de SATHEE](#), IIT Kanpur. Le chapitre 9 précise en plus les conditions nécessaires pour obtenir des facteurs affines *réels*.

MATHS OLYMPIAD

Comprendre une méthode, savoir pourquoi elle fonctionne, reconnaître quand elle s'applique.