
COURS ET PROBLÈMES GUIDÉS

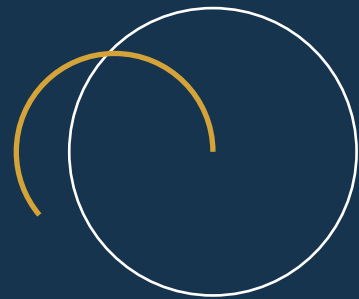
PGCD ET PPCM

Décomposer les nombres,
organiser les possibilités.

COLLÈGE AVANCÉ / LYCÉE

Préparation aux olympiades de mathématiques

Algorithme d'Euclide · Nombres premiers
Équations entières · Dénombrement



Comprendre. Puis résoudre.

22 pages · 8 exercices supplémentaires corrigés

Explications courtes · Raisonnements complets

LE PARCOURS

Sommaire et mode d'emploi

L'objectif

Utiliser le PGCD pour séparer un facteur commun et deux entiers premiers entre eux, puis ramener les problèmes à un petit nombre de cas.

Partie	Pages
Les outils fondamentaux	3–6
Équations et dénombrements	7–11
Suites et exposants premiers	12–14
Trois compléments guidés	15–17
Exercices, corrigés et synthèse	18–22

Comment travailler ?

Lire une fiche, puis cacher le corrigé d'un exemple et refaire le raisonnement. Pour les exercices, écrire les étapes sur une copie avant de vérifier les réponses.

Le niveau

Les premiers exemples installent les bases. Les problèmes suivants demandent de combiner plusieurs idées. Les résultats restent justifiés, même lorsque la solution est courte.

Note d'édition. Adaptation française du fichier *Gcd lcm vos 8 12.txt*. Les méthodes mathématiques lisibles sont reprises. Plusieurs formules affichées ne figurent pas dans la transcription : les exemples concernés sont signalés comme adaptés. Les exercices d'entraînement et les compléments sont ajoutés.

COURS · 1

Deux notions complémentaires

Définitions pour $a, b > 0$ entiers

Le $\text{PGCD}(a, b)$ est le plus grand entier positif qui divise a et b . Le $\text{PPCM}(a, b)$ est le plus petit entier positif multiple de a et de b .

Exemple : 12 et 18

Les diviseurs communs sont 1, 2, 3 et 6, donc $\text{PGCD}(12, 18) = 6$. Le premier multiple commun positif est 36, donc $\text{PPCM}(12, 18) = 36$.

Avec les facteurs premiers

$$12 = 2^2 \cdot 3, \quad 18 = 2 \cdot 3^2.$$

Pour le PGCD, prendre le plus petit exposant de chaque nombre premier. Pour le PPCM, prendre le plus grand :

$$\text{PGCD}(12, 18) = 2^1 3^1, \quad \text{PPCM}(12, 18) = 2^2 3^2.$$

Une identité essentielle

$$\boxed{\text{PGCD}(a, b) \text{ PPCM}(a, b) = ab.}$$

En effet, pour chaque nombre premier, le minimum et le maximum des deux exposants ont pour somme la somme de ces exposants.

Attention. L'identité concerne deux entiers. Pour trois entiers, le produit du PGCD et du PPCM n'est pas en général égal à leur produit.

COURS • 2

L'algorithme d'Euclide

L'opération qui ne change rien

Pour tous entiers a, b et tout entier k ,

$$\text{PGCD}(a, b) = \text{PGCD}(a, b - ka).$$

Les diviseurs communs des deux couples sont exactement les mêmes. On prend le PGCD positif.

Exemple : 252 et 198

$$252 = 1 \times 198 + 54,$$

$$198 = 3 \times 54 + 36,$$

$$54 = 1 \times 36 + 18,$$

$$36 = 2 \times 18 + 0.$$

Le dernier reste non nul est 18. Ainsi $\text{PGCD}(252, 198) = 18$.

Pourquoi cela marche

Si d divise a et b , alors il divise $b - ka$. Réciproquement, s'il divise a et $b - ka$, il divise $(b - ka) + ka = b$.

Deux conséquences immédiates

$$\text{PGCD}(n, n + 1) = \text{PGCD}(n, 1) = 1.$$

Deux entiers impairs consécutifs sont premiers entre eux :

$$\text{PGCD}(2n + 1, 2n + 3) = \text{PGCD}(2n + 1, 2) = 1.$$

Idée clé. Soustraire le bon multiple fait diminuer les nombres et peut supprimer le terme de plus haut degré dans une expression.

COURS • 3

La substitution centrale

À utiliser dès qu'un PGCD apparaît

Poser $d = \text{PGCD}(a, b)$. Il existe des entiers positifs u, v tels que

$$a = du, \quad b = dv, \quad \text{PGCD}(u, v) = 1.$$

Alors $\text{PPCM}(a, b) = duv$.

Pourquoi u et v sont premiers entre eux

Si un entier $c > 1$ divisait u et v , alors $dc > d$ diviserait a et b . Cela contredirait la définition de d .

Les principales expressions deviennent simples

$a + b$	$d(u + v)$
ab	$d^2 uv$
$\text{PPCM}(a, b)$	duv
$\text{PPCM}(a, b) / \text{PGCD}(a, b)$	uv

Exemple

Pour $a = 24$ et $b = 28$, on a $d = 4$, $u = 6$ et $v = 7$. Comme 6 et 7 sont premiers entre eux, le PPCM vaut $4 \times 6 \times 7 = 168$.

Attention. Écrire $a = du$ et $b = dv$ ne suffit pas : il faut conserver la condition $\text{PGCD}(u, v) = 1$. Elle élimine souvent de fausses solutions.

COURS · 4

Deux propriétés de coprimarité

1. Une somme et un produit

Si $\text{PGCD}(u, v) = 1$, alors $\text{PGCD}(u + v, uv) = 1$. **Preuve courte.** Si un nombre premier p divisait $u + v$ et uv , il diviserait u ou v . La somme imposerait alors qu'il divise les deux, contradiction.

Conséquence

$$\text{PGCD}(a + b, \text{PPCM}(a, b)) = \text{PGCD}(a, b).$$

En effet, en posant $a = du$, $b = dv$:

$$\text{PGCD}(d(u + v), duv) = d \text{ PGCD}(u + v, uv) = d.$$

2. Répartir un produit entre deux nombres premiers entre eux

Si $uv = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ et $\text{PGCD}(u, v) = 1$, chaque bloc 2^3 , 3^2 ou 5 doit aller entièrement dans un seul des deux nombres. Partager le bloc 2^3 en 2 et 4 rendrait les deux nombres divisibles par 2 .

Attention. Pour un entier composé d , la phrase « $d \mid uv$ implique $d \mid u$ ou $d \mid v$ » est fausse. Exemple : $6 \mid 2 \cdot 3$. La preuve ci-dessus utilise bien un nombre **premier**.

PROBLÈME GUIDÉ · 1

Une somme et un PPCM connus

Énoncé

Trouver les entiers positifs a, b tels que

$$a + b = 52, \quad \text{PPCM}(a, b) = 168.$$

1. Retrouver le PGCD

La propriété précédente donne

$$d = \text{PGCD}(52, 168) = 4.$$

2. Retirer le facteur commun

Écrire $a = 4u$, $b = 4v$, avec $\text{PGCD}(u, v) = 1$. On obtient

$$u + v = 13, \quad uv = 42.$$

3. Reconnaître les deux nombres

Les deux entiers sont les racines de

$$t^2 - 13t + 42 = (t - 6)(t - 7).$$

Donc $\{u, v\} = \{6, 7\}$, et ils sont bien premiers entre eux.

Résultat

$\{a, b\} = \{24, 28\}$. Les couples ordonnés sont $(24, 28)$ et $(28, 24)$.

Idée clé. Une somme et un produit permettent souvent de retrouver deux nombres grâce à un trinôme ou à une liste de diviseurs.

PROBLÈME GUIDÉ · 2

Une équation à factoriser

Énoncé

Compter les couples ordonnés d'entiers positifs (a, b) tels que

$$ab + 63 = 20 \text{PPCM}(a, b) + 12 \text{PGCD}(a, b).$$

Posons $d = \text{PGCD}(a, b)$ et $L = \text{PPCM}(a, b)$. Comme $ab = dL$:

$$(d - 20)(L - 12) = 177 = 3 \cdot 59.$$

Examiner tous les facteurs

Si les deux facteurs sont positifs :

d	L	Conclusion
21	189	$d \mid L$: possible
23	71	$d \nmid L$
79	15	$L < d$
197	13	$L < d$

S'ils sont négatifs, $(20 - d)(12 - L) = 177$ avec $20 - d \leq 19$ et $12 - L \leq 11$. Les couples de facteurs de 177 sont $(1, 177)$, $(3, 59)$ et leurs inverses : aucun ne respecte ces bornes.

Revenir à a, b

Pour $d = 21$, $L = 189$, on a $uv = L/d = 9$. Les couples premiers entre eux sont $(1, 9)$ et $(9, 1)$.

Résultat

Deux solutions : $(21, 189)$ et $(189, 21)$.

PROBLÈME GUIDÉ · 3

Compter avec deux bornes

Énoncé

Combien de couples vérifient $100 < a < b < 1000$ et

$$\frac{\text{PGCD}(a, b)}{\text{PPCM}(a, b)} = \frac{1}{495} ?$$

Avec $a = du$, $b = dv$, on a $uv = 495 = 3^2 \cdot 5 \cdot 11$ et $\text{PGCD}(u, v) = 1$. En répartissant les blocs premiers et en imposant $u < v$:

$$(u, v) = (1, 495), (5, 99), (9, 55), (11, 45).$$

Compter les valeurs possibles de d

(u, v)	Contraintes	Valeurs de d
$(1, 495)$	$d > 100, d < 1000/495$	Aucune
$(5, 99)$	$d > 20, d < 1000/99$	Aucune
$(9, 55)$	$d > 100/9, d < 1000/55$	$12, \dots, 18 : 7$
$(11, 45)$	$d > 100/11, d < 1000/45$	$10, \dots, 22 : 13$

Résultat

$$7 + 13 = \boxed{20} \text{ couples.}$$

Attention. Sans la condition $a < b$, les couples inverses donneraient 40 solutions. Ici, l'ordre croissant est déjà imposé.

PROBLÈME GUIDÉ · 4

Maximiser une somme

Exemple adapté : l'énoncé de la transcription est incomplet.

On cherche le maximum de $a + b$ parmi les entiers positifs vérifiant

$$2 \text{PPCM}(a, b) - 3(a + b) = 5.$$

Posons $a = du$, $b = dv$, avec $\text{PGCD}(u, v) = 1$. Alors

$$d(2uv - 3u - 3v) = 5.$$

Donc $d = 1$ ou $d = 5$. En complétant le produit :

$$(2u - 3)(2v - 3) = 9 + \frac{10}{d}.$$

Cas $d = 1$

Le produit vaut 19. Les facteurs $2u - 3$ et $2v - 3$ sont au moins -1 . Deux facteurs négatifs ne peuvent donc donner que 1. Il reste $(1, 19)$ ou $(19, 1)$, d'où $\{u, v\} = \{2, 11\}$ et $a + b = 13$.

Cas $d = 5$

Le produit vaut 11. On obtient $\{u, v\} = \{2, 7\}$, donc $\{a, b\} = \{10, 35\}$ et $a + b = 45$. Les deux couples normalisés sont bien premiers entre eux.

Résultat

Le maximum est 45, atteint par $(10, 35)$ et $(35, 10)$.

Idée clé. La divisibilité limite d'abord d . La factorisation limite ensuite u, v . Vérifier chaque cas avant de comparer les sommes.

PROBLÈME GUIDÉ · 5

Ne pas oublier les couples égaux

Exemple adapté : l'énoncé de la transcription est incomplet.

Compter les couples ordonnés (a, b) avec $1 \leq a, b \leq 21$ tels que

$$\text{PPCM}(a, b) = \text{PGCD}(a, b) \quad \text{ou} \quad \text{PPCM}(a, b) = 3 \text{PGCD}(a, b).$$

1. Le cas diagonal

La première égalité donne $uv = 1$, donc $u = v = 1$ et $a = b = d$. Les 21 couples

$$(1, 1), (2, 2), \dots, (21, 21)$$

conviennent.

2. Les couples distincts

La seconde égalité donne $uv = 3$. On a $(u, v) = (1, 3)$ ou $(3, 1)$. Les couples sont $(d, 3d)$ et $(3d, d)$. La borne $3d \leq 21$ impose $1 \leq d \leq 7$, soit $2 \times 7 = 14$ couples.

Résultat

Au total : $21 + 14 = \boxed{35}$ couples.

La bonne façon de doubler

Quand une condition est symétrique, les solutions avec $a < b$ et $a > b$ se correspondent. Les solutions $a = b$ se comptent séparément.

Attention. Doubler toutes les solutions avec $a \leq b$ compterait deux fois les couples diagonaux.

PROBLÈME GUIDÉ · 6

Le PGCD de deux termes voisins

Énoncé

On pose $a_n = n^2 + 100$ pour $n \geq 1$. Trouver le maximum de $\text{PGCD}(a_n, a_{n+1})$.

1. Soustraire

$$\text{PGCD}(a_n, a_{n+1}) = \text{PGCD}(n^2 + 100, 2n + 1).$$

Le second nombre est impair. Multiplier le premier par 4 ne change donc pas le PGCD.

2. Éliminer le carré

$$4(n^2 + 100) - (2n - 1)(2n + 1) = 401.$$

Par les opérations d'Euclide :

$$\text{PGCD}(a_n, a_{n+1}) = \text{PGCD}(401, 2n + 1).$$

Le PGCD est donc au plus 401.

3. Atteindre la borne

Pour $n = 200$, on a $2n + 1 = 401$. Le PGCD vaut alors 401. On peut aussi le vérifier sur $a_{200} = 40100$ et $a_{201} = 40501$.

Résultat

Le maximum est 401.

Idée clé. Une borne n'est un maximum que si elle est atteinte. Ici, l'exemple $n = 200$ termine la preuve.

COURS • 5

Traduire le PPCM en exposants

La notation v_p

Pour un nombre premier p , $v_p(n)$ désigne l'exposant de p dans la décomposition de n . Par exemple, $72 = 2^3 \cdot 3^2$, donc $v_2(72) = 3$ et $v_3(72) = 2$.

$$v_p(\text{PGCD}(a, b)) = \min(v_p(a), v_p(b)),$$

$$v_p(\text{PPCM}(a, b)) = \max(v_p(a), v_p(b)).$$

Exemple complémentaire

Compter les couples ordonnés de diviseurs de 12 dont le PPCM vaut 12. Comme $12 = 2^2 \cdot 3$, on compte séparément :

- Pour 2 : les exposants (r, s) sont dans $\{0, 1, 2\}$ avec $\max(r, s) = 2$. Il y a $3^2 - 2^2 = 5$ choix.
- Pour 3 : les exposants sont dans $\{0, 1\}$ avec maximum 1. Il y a $2^2 - 1^2 = 3$ choix.

Les choix étant indépendants, le total vaut $5 \times 3 = 15$.

Idée clé. Les exposants transforment une condition de divisibilité en conditions sur des petits entiers. Compter séparément pour chaque nombre premier, puis multiplier.

PROBLÈME GUIDÉ · 7

Compter des triplets

Énoncé

Compter les triplets ordonnés d'entiers positifs (a, b, c) tels que

$$\text{PPCM}(a, b) = 1000, \quad \text{PPCM}(b, c) = \text{PPCM}(c, a) = 2000.$$

On a $1000 = 2^3 5^3$ et $2000 = 2^4 5^3$. Aucun autre nombre premier ne peut diviser a, b, c .

Pour le facteur 2

Posons $p_1 = v_2(a)$, $p_2 = v_2(b)$, $p_3 = v_2(c)$. On a $\max(p_1, p_2) = 3$ et les deux autres maxima valent 4. Ainsi $p_3 = 4$. Les choix de (p_1, p_2) dans $\{0, 1, 2, 3\}^2$ avec maximum 3 sont au nombre de

$$4^2 - 3^2 = 7.$$

Pour le facteur 5

Les trois maxima deux à deux valent 3. Au moins deux exposants doivent donc être égaux à 3. Il y a le cas $(3, 3, 3)$, puis les cas où un seul exposant est inférieur à 3 : trois positions, trois valeurs (0, 1 ou 2). Total :

$$1 + 3 \times 3 = 10.$$

Résultat

Le nombre de triplets est $7 \times 10 = \boxed{70}$.

COMPLÉMENT GUIDÉ · 1

Deux conditions de divisibilité

Exemple adapté : l'énoncé de la transcription est incomplet.

Déterminer les entiers positifs a, b tels que

$$11 \mid a + 13b, \quad 13 \mid a + 11b.$$

1. Simplifier chaque condition

La première équivaut à $a + 2b \equiv 0 \pmod{11}$. La seconde équivaut à $a - 2b \equiv 0 \pmod{13}$.

2. Utiliser une écriture entière

La seconde condition permet d'écrire $a = 2b + 13k$, où k est un entier. En reportant dans la première :

$$4b + 13k \equiv 4b + 2k \equiv 0 \pmod{11}.$$

On peut simplifier par 2 modulo 11, d'où $k \equiv -2b \pmod{11}$. Écrivons $k = -2b + 11t$.

3. Paramétrer

$$a = 2b + 13(-2b + 11t) = 143t - 24b.$$

Résultat

Toutes les solutions sont $b \geq 1$ et $a = 143t - 24b > 0$, avec t entier.

Vérification

Alors $a + 13b = 11(13t - b)$ et $a + 11b = 13(11t - b)$, ce qui prouve la réciproque.

Idée clé. Les congruences sont une écriture courte des conditions de divisibilité. Elles sont développées dans le livret consacré à ce sujet.

COMPLÉMENT GUIDÉ · 2

Un produit fixé, une somme minimale

Exemple adapté : l'énoncé de la transcription est incomplet.

On cherche des entiers positifs $a \leq b$ vérifiant

$$ab = 9984, \quad \text{PGCD}(a, b) = 8.$$

Parmi eux, minimiser $a + b$.

1. Normaliser

Avec $a = 8u$, $b = 8v$, on a

$$uv = 9984/64 = 156 = 2^2 \cdot 3 \cdot 13, \quad \text{PGCD}(u, v) = 1.$$

2. Répartir les blocs premiers

Les couples premiers entre eux avec $u \leq v$ sont :

(u, v)	(a, b)	$a + b$
(1, 156)	(8, 1248)	1256
(3, 52)	(24, 416)	440
(4, 39)	(32, 312)	344
(12, 13)	(96, 104)	200

La liste est complète : chaque bloc 4, 3 et 13 appartient entièrement à u ou à v .

Résultat

La somme minimale est 200, obtenue pour $(a, b) = (96, 104)$.

Idée clé. À produit fixé, les facteurs proches donnent une petite somme. Pour une preuve entière, lister exactement les couples admissibles.

COMPLÉMENT GUIDÉ · 3

Une identité pour trois nombres

Exemple adapté : l'énoncé de la transcription est incomplet.

Prouver que, pour a, b, c entiers positifs,

$$\text{PGCD}(a, \text{PPCM}(b, c)) = \text{PPCM}(\text{PGCD}(a, b), \text{PGCD}(a, c)).$$

1. Se concentrer sur un nombre premier

Fixons un nombre premier p , et posons

$$\alpha = v_p(a), \quad \beta = v_p(b), \quad \gamma = v_p(c).$$

Le membre de gauche a pour exposant

$$\min(\alpha, \max(\beta, \gamma)).$$

Le membre de droite a pour exposant

$$\max(\min(\alpha, \beta), \min(\alpha, \gamma)).$$

2. Comparer

Supposons $\beta \leq \gamma$; l'autre cas est symétrique. Alors $\max(\beta, \gamma) = \gamma$ et $\min(\alpha, \beta) \leq \min(\alpha, \gamma)$. Les deux expressions valent donc $\min(\alpha, \gamma)$.

3. Conclure

Les deux entiers ont les mêmes exposants pour chaque nombre premier. Ils sont égaux.

Idée clé. Pour une identité contenant plusieurs PGCD et PPCM, traduire en minimum et maximum simplifie souvent toute la preuve.

ENTRAÎNEMENT

Huit exercices supplémentaires

Chercher sur une copie. Les corrigés commencent page 19. Les entiers sont strictement positifs sauf indication contraire.

1 • Euclide

Calculer $\text{PGCD}(414, 662)$, puis leur PPCM.

2 • Somme et PPCM

Trouver a, b tels que $a + b = 30$ et $\text{PPCM}(a, b) = 72$.

3 • Un rapport

Compter les couples ordonnés tels que $\text{PGCD}(a, b) = 6$ et $\text{PPCM}(a, b) = 180$.

4 • Deux impairs

Prouver $\text{PGCD}(2n + 1, 2n + 3) = 1$ pour $n \geq 0$.

5 • Une suite

Pour $n \geq 1$, trouver le maximum de $\text{PGCD}(n^2 + 1, (n + 1)^2 + 1)$.

6 • Des exposants

Compter les couples ordonnés (a, b) tels que $\text{PPCM}(a, b) = 18$.

7 • Une impossibilité

Peut-on avoir $\text{PGCD}(a, b) = 12$ et $a + b = 50$?

8 • Trois nombres

Trouver les entiers $c > 0$ tels que $\text{PPCM}(12, c) = 60$ et $\text{PGCD}(18, c) = 6$.

Idée clé. Une valeur proposée doit satisfaire toutes les conditions. Le PGCD et le PPCM se vérifient ensemble.

CORRIGÉS · 1/2

Calculer et répartir

1. Euclide

$$662 = 414 + 248, \quad 414 = 248 + 166, \quad 248 = 166 + 82, \quad 166 = 2 \times 82 + 2.$$

Ainsi $\text{PGCD}(414, 662) = 2$ et

$$\text{PPCM}(414, 662) = 414 \times 662 / 2 = 137034.$$

2. Somme et PPCM

$d = \text{PGCD}(30, 72) = 6$. On a $u + v = 5$ et $uv = 12$. Or les couples de facteurs positifs de 12 sont $(1, 12)$, $(2, 6)$, $(3, 4)$ et leurs inverses. Aucun n'a pour somme 5.

Aucune solution.

3. Un rapport

On a $uv = 180/6 = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$. Chaque facteur premier va entièrement dans u ou dans v . Il y a $2^3 = 8$ couples ordonnés :

$$(u, v) = (1, 30), (2, 15), (3, 10), (5, 6)$$

et leurs inverses. Donc $\boxed{8}$ solutions $(a, b) = (6u, 6v)$.

4. Deux impairs

Le PGCD divise leur différence 2. Comme les deux nombres sont impairs, le PGCD est impair : il vaut donc $\boxed{1}$.

Attention. Dans l'exercice 2, connaître un candidat pour le PGCD ne garantit pas que les nombres recherchés existent.

CORRIGÉS · 2/2

Borner et vérifier

5. Une suite

Comme à la page 12 :

$$\text{PGCD}(n^2 + 1, (n + 1)^2 + 1) = \text{PGCD}(n^2 + 1, 2n + 1) = \text{PGCD}(5, 2n + 1).$$

On utilise $4(n^2 + 1) - (2n - 1)(2n + 1) = 5$. Le maximum est $\boxed{5}$, atteint pour $n = 2$.

6. Des exposants

$18 = 2 \cdot 3^2$. Pour 2, les paires d'exposants ont maximum 1 : $2^2 - 1^2 = 3$ possibilités. Pour 3, maximum 2 : $3^2 - 2^2 = 5$ possibilités.

$$\boxed{3 \times 5 = 15 \text{ couples.}}$$

7. Une impossibilité

Le PGCD divise chaque nombre, donc aussi leur somme. Or $12 \nmid 50$. Il n'y a $\boxed{\text{aucune solution}}$.

8. Trois nombres

$12 = 2^2 \cdot 3$ et $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$. La première condition impose $c = 2^r 3^s 5$ avec $0 \leq r \leq 2$ et $0 \leq s \leq 1$. Comme $18 = 2 \cdot 3^2$, la seconde impose $r \geq 1$ et $s = 1$. D'où

$$\boxed{c = 30 \text{ ou } 60.}$$

POINTS DE VIGILANCE

Les erreurs qui coûtent une solution

Oublier la coprimalité

Si $uv = 9$, les couples $(1, 9)$ et $(9, 1)$ sont premiers entre eux, mais $(3, 3)$ ne l'est pas. Ce dernier ferait augmenter le PGCD initial.

Confondre ordonné et non ordonné

Les couples $(6, 10)$ et $(10, 6)$ sont distincts si l'ordre compte. En revanche, $(8, 8)$ n'a pas de second couple distinct obtenu par inversion.

Compter un intervalle d'entiers

De m à M , bornes incluses, il y a $M - m + 1$ entiers. Si les bornes viennent d'inégalités strictes, les convertir avec soin.

Croire qu'une borne est atteinte

Prouver $d \leq 401$ ne suffit pas pour dire que le maximum est 401. Il faut construire au moins un exemple où $d = 401$.

Étendre une formule à trois nombres

Pour $a = 2, b = 4, c = 8$, le PGCD vaut 2 et le PPCM 8. Leur produit vaut 16, alors que $abc = 64$. La formule $dL = ab$ ne se généralise pas ainsi.

Le contrôle final

Recalculer le PGCD et le PPCM des candidats, puis vérifier l'équation et les bornes de l'énoncé. Une liste courte permet de le faire directement.

FICHE DE SYNTHÈSE

Choisir la bonne méthode

La substitution à mémoriser

$$\begin{aligned}d &= \text{PGCD}(a, b), & a &= du, & b &= dv, & \text{PGCD}(u, v) &= 1, \\ \text{PPCM}(a, b) &= duv, & ab &= d \text{ PPCM}(a, b).\end{aligned}$$

Deux nombres explicites

Appliquer Euclide, puis utiliser $L = ab/d$.

Une somme et un PPCM

Retrouver d'abord $d = \text{PGCD}(a + b, L)$. Chercher ensuite $u + v$ et uv .

Une équation en a, b, d, L

Normaliser. Chercher une divisibilité sur d , puis factoriser l'expression restante.

Un dénombrement

Répartir les puissances premières sans les couper. Traduire les bornes en intervalles pour d . Traiter à part les couples égaux.

Une suite ou une identité

Soustraire pour réduire le degré, ou travailler sur les exposants premiers. Pour un maximum, prouver la borne et montrer qu'elle est atteinte.

Idée clé. Le PGCD retire la partie commune. Les deux nombres restants portent la structure du problème.