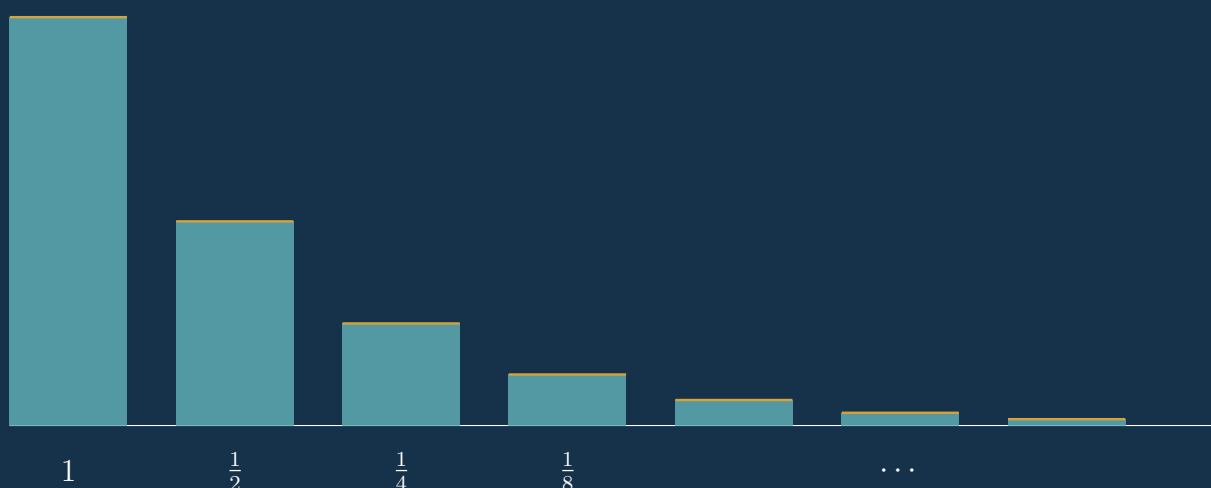


Suites et sommes

Reconnaître la structure, simplifier le calcul



$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 2$$

9 problèmes guidés • 12 exercices corrigés
Démonstrations • Récurrences • Séries et télescopage

Maths Olympiad

Comprendre les idées pour les réutiliser

PARCOURS DE LECTURE

Sommaire

L'objectif du livret

Passer d'une expression compliquée à une structure familière : progression arithmétique, suite géométrique, différence de deux termes ou série exponentielle. Chaque méthode est accompagnée de ses conditions d'utilisation.

Partie	Contenu	Page
1. Lire une somme	Indices, termes et sommes partielles	3
2. Suites usuelles	Arithmétiques et géométriques	4
3. Sommes classiques	Entiers, carrés et cubes	6
4. Transformer	Suites auxiliaires et télescopage	7
5. Séries factorielles	Exponentielle et changements d'indice	9
6. Choisir sa méthode	Reconnaître les bons indices	10
7. Problèmes guidés	9 solutions expliquées	11
8. Entraînement	12 exercices en trois niveaux	20
9. Corrigés détaillés	Calculs, preuves et vérifications	23
10. Fiche de synthèse	Formules et réflexes à retenir	29

Niveau et prérequis

Lycée avancé : calcul algébrique, équations du second degré, puissances et limites simples. Les séries infinies et les sommes factorielles constituent un approfondissement, introduit progressivement.

Des énoncés autonomes

Les problèmes sont reformulés pour rendre les données explicites. Le problème 8 est une variante pédagogique : il précise une expression finale ambiguë dans le texte de départ. Les exercices d'entraînement sont des compléments conçus pour ce livret.

ASTUCE / Comment travailler

Lire l'énoncé, choisir une méthode et chercher seul avant de consulter la solution. À la fin, vérifier les premiers termes, les signes et les conditions imposées aux inconnues.

COURS / 01

Lire une suite et une somme

Une **suite** (u_n) associe un nombre à chaque entier d'un ensemble d'indices. Il faut toujours préciser si le premier terme est u_0 ou u_1 .

THÉORÈME / La notation sigma

Pour $p \leq q$ entiers,

$$\sum_{k=p}^q u_k = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_q.$$

La somme comporte $q - p + 1$ termes. L'indice k est une variable muette : on peut le remplacer par une autre lettre inutilisée.

Trois règles à utiliser sans hésiter

Pour des sommes finies et des constantes a, b ,

$$\sum_{k=p}^q (au_k + bv_k) = a \sum_{k=p}^q u_k + b \sum_{k=p}^q v_k, \quad \sum_{k=p}^q a = (q - p + 1)a.$$

Si $p \leq m < q$, on peut découper la somme :

$$\sum_{k=p}^q u_k = \sum_{k=p}^m u_k + \sum_{k=m+1}^q u_k.$$

Changer d'indice sans perdre de terme

Dans $\sum_{k=1}^n (k+2)^2$, posons $j = k + 2$. Les bornes deviennent 3 et $n + 2$, d'où

$$\sum_{k=1}^n (k+2)^2 = \sum_{j=3}^{n+2} j^2 = \sum_{j=1}^{n+2} j^2 - 1^2 - 2^2.$$

PIÈGE / L'indice et la borne changent ensemble

Écrire $\sum_{k=1}^n u_{k+1} = \sum_{j=1}^n u_j$ est généralement faux. La bonne égalité est $\sum_{k=1}^n u_{k+1} = \sum_{j=2}^{n+1} u_j$.

D'une somme finie à une série

La série $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ **converge** lorsque les sommes partielles $S_N = \sum_{k=1}^N u_k$ ont une limite finie. Cette limite est sa somme. Ce n'est donc pas une addition finie « très longue ». Si $S_N \rightarrow S$, alors $u_N = S_N - S_{N-1} \rightarrow 0$. Cette condition est nécessaire, mais ne suffit pas à assurer la convergence.

ASTUCE / Premier contrôle

Développer deux ou trois termes permet souvent de repérer un décalage d'indice, un signe erroné ou un nombre de termes incorrect.

COURS / 02

Les suites arithmétiques

THÉORÈME / Une différence constante

La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est arithmétique de raison d si $u_{n+1} = u_n + d$. Alors

$$u_n = u_1 + (n-1)d, \quad \sum_{k=1}^n u_k = \frac{n}{2}(u_1 + u_n) = \frac{n}{2}(2u_1 + (n-1)d).$$

Pourquoi la formule de somme fonctionne

En écrivant la somme une fois dans chaque sens, on obtient

$$\begin{aligned} S_n &= u_1 + u_2 + \cdots + u_n, \\ S_n &= u_n + u_{n-1} + \cdots + u_1. \end{aligned}$$

Chaque paire verticale vaut $u_1 + u_n$, car les écarts à partir des extrémités se compensent. Ainsi $2S_n = n(u_1 + u_n)$.

Paramétrer autour du centre

Trois termes peuvent s'écrire $m-d, m, m+d$. Leur somme vaut $3m$, et

$$a, b, c \text{ sont arithmétiques} \iff a + c = 2b.$$

Pour quatre termes, la forme symétrique

$$m-3h, \quad m-h, \quad m+h, \quad m+3h$$

donne immédiatement la somme $4m$. Elle simplifie aussi le produit :

$$(m-3h)(m-h)(m+h)(m+3h) = (m^2 - 9h^2)(m^2 - h^2).$$

PIÈGE / La vraie raison vaut $2h$

Dans cette écriture à quatre termes, h est une demi-raison. Ne pas remplacer la raison par h dans une condition portant sur son carré ou sa quatrième puissance.

Exemple

Quatre termes arithmétiques de somme 40 et de raison 6 ont pour centre $m = 10$ et pour demi-raison $h = 3$. Ce sont 1, 7, 13, 19.

ASTUCE / Les contraintes d'entiers sont utiles

Si m et $m-h$ sont entiers, alors h est entier. Si le centre n'est pas entier, cette conclusion ne se déduit pas de la seule intégralité des termes.

COURS / 03

Les suites géométriques

THÉORÈME / Un multiplicateur constant

Si $u_{n+1} = qu_n$ pour $n \geq 1$, alors $u_n = u_1 q^{n-1}$. Pour $q \neq 1$,

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k = u_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Pour $q = 1$, chaque terme vaut u_1 , donc $S_n = nu_1$.

Une preuve par soustraction

Écrivons $S_n = u_1 + u_1 q + \dots + u_1 q^{n-1}$ et $qS_n = u_1 q + \dots + u_1 q^n$. Les termes intermédiaires s'annulent :

$$(1 - q)S_n = u_1(1 - q^n).$$

Passage à l'infini et contrôle de l'erreur

Si $|q| < 1$, on a $q^n \rightarrow 0$, donc

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_1 q^{k-1} = \frac{u_1}{1 - q}, \quad S_{\infty} - S_n = \frac{u_1 q^n}{1 - q}.$$

La valeur absolue du reste est majorée par $|u_1||q|^n/(1 - |q|)$. Cela permet de choisir combien de termes calculer pour une précision donnée.

PIÈGE / Une formule qui dépend d'une hypothèse

Pour un premier terme non nul, la série géométrique ne converge que si $|q| < 1$. Par exemple $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ n'a pas de somme au sens des sommes partielles, même si $1/(1 - (-1))$ existe.

Du produit à la somme des exposants

Si $u_k = Aq^{k-1}$ avec $A > 0$ et $q > 0$, alors

$$P_n = \prod_{k=1}^n u_k = A^n q^{0+1+\dots+(n-1)} = A^n q^{n(n-1)/2}.$$

Ainsi la moyenne géométrique des n premiers termes est

$$\sqrt[n]{P_n} = Aq^{(n-1)/2}.$$

ASTUCE / Trois termes non nuls

Pour a, b, c non nuls, être géométriques équivaut à $b^2 = ac$. Si les termes contiennent déjà des carrés, conserver les deux signes en prenant une racine carrée.

COURS / 04

Les sommes de puissances

THÉORÈME / Trois formules fondamentales

Pour tout entier $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

Démontrer la formule des carrés

L'identité $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$, sommée de $k = 1$ à n , donne

$$(n+1)^3 - 1 = 3 \sum_{k=1}^n k^2 + \frac{3n(n+1)}{2} + n.$$

En isolant la somme puis en factorisant, on obtient

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{2(n+1)^3 - 2 - 3n(n+1) - 2n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Démontrer la formule des cubes

Posons $T_k = k(k+1)/2$ et $T_0 = 0$. Alors

$$T_k^2 - T_{k-1}^2 = \frac{k^2}{4} ((k+1)^2 - (k-1)^2) = k^3.$$

La somme télescope : $\sum_{k=1}^n k^3 = T_n^2 - T_0^2 = T_n^2$.

Deux conséquences fréquentes

$$\sum_{k=1}^n (2k-1) = 2 \frac{n(n+1)}{2} - n = n^2,$$

$$\sum_{k=1}^n k(k-1) = \sum k^2 - \sum k = \frac{n(n+1)(n-1)}{3}.$$

ASTUCE / Développer seulement ce qui aide

Une expression polynomiale en k se ramène à ces sommes par linéarité. Conserver les facteurs $n(n+1)$ autant que possible : ils réduisent les erreurs et simplifient les divisions ultérieures.

PIÈGE / Sommer une constante

Dans $\sum_{k=1}^n (x^2 + 2kx)$, x est fixé. Le résultat est $nx^2 + xn(n+1)$: le terme x^2 apparaît n fois.

COURS / 05

Créer une suite auxiliaire

Certaines récurrences semblent compliquées parce qu'elles mélangent une partie géométrique et une partie connue. Une soustraction bien choisie les sépare.

THÉORÈME / La transformation utile

Supposons que, pour $n \geq 1$,

$$a_{n+1} = qa_n + g_{n+1} - qg_n.$$

En posant $b_n = a_n - g_n$, on obtient $b_{n+1} = qb_n$. Par conséquent,

$$b_n = (a_1 - g_1)q^{n-1}, \quad a_n = g_n + (a_1 - g_1)q^{n-1}.$$

Démonstration

Il suffit de soustraire g_{n+1} de la relation :

$$a_{n+1} - g_{n+1} = q(a_n - g_n).$$

Les deux membres ont exactement la même forme, aux indices $n + 1$ et n . La formule géométrique s'applique alors à (b_n) .

Exemple : une récurrence affine

Si $a_{n+1} = 3a_n + 4$, cherchons une constante ℓ telle que $\ell = 3\ell + 4$. On trouve $\ell = -2$. Ainsi

$$a_{n+1} + 2 = 3(a_n + 2), \quad a_n = -2 + (a_1 + 2)3^{n-1}.$$

La constante soustraite est le **point fixe** de la transformation $x \mapsto 3x + 4$.

Exemple : une correction qui dépend de n

Dans

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{2}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2},$$

on reconnaît $q = 1/2$ et $g_n = 2/n^2$. La bonne suite est donc $b_n = a_n - 2/n^2$.

ASTUCE / Se laisser guider par ce qu'on cherche

Si la question demande la somme de $a_n - g_n$, essayer d'écrire une relation directement entre $a_{n+1} - g_{n+1}$ et $a_n - g_n$.

PIÈGE / Ne pas perdre le premier terme

La raison ne suffit pas. Calculer $b_1 = a_1 - g_1$ avant d'écrire b_n ou la somme de la suite auxiliaire.

COURS / 06

Faire apparaître un télescope

THÉORÈME / La disparition des termes intermédiaires

Si $u_k = v_k - v_{k+1}$, alors

$$\sum_{k=p}^n u_k = v_p - v_{n+1}.$$

Si, de plus, $v_{n+1} \rightarrow \ell$, la série correspondante converge vers $v_p - \ell$.

Exemple de départ

Puisque $1/[k(k+1)] = 1/k - 1/(k+1)$,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Le terme général tend vers zéro, mais c'est la formule de la somme partielle qui prouve ici la convergence vers 1.

La différence des dénominateurs

Pour $A_k B_k \neq 0$,

$$\frac{1}{A_k} - \frac{1}{B_k} = \frac{B_k - A_k}{A_k B_k}.$$

On cherche donc à factoriser le dénominateur, puis à rapprocher le numérateur de la différence $B_k - A_k$.

Un quartique qui cache deux quadratiques

$$k^4 + k^2 + 1 = (k^2 + 1)^2 - k^2 = (k^2 - k + 1)(k^2 + k + 1).$$

Les deux facteurs diffèrent de $2k$, donc

$$\frac{k}{k^4 + k^2 + 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k^2 - k + 1} - \frac{1}{k^2 + k + 1} \right).$$

Le vrai déclic est l'identité

$$(k+1)^2 - (k+1) + 1 = k^2 + k + 1.$$

Le second dénominateur au rang k est le premier au rang suivant.

PIÈGE / Une différence ne télescope pas toujours

Écrire un terme comme différence de deux fractions ne suffit pas. Il faut vérifier l'alignement entre indices successifs, puis conserver les termes de bord.

ASTUCE / Contrôle rapide

Calculer le cas $n = 1$ avec la formule finale. Un facteur $1/2$ oublié ou une mauvaise dernière borne se repère souvent immédiatement.

COURS / 07

Factorielles et exponentielle

Pour $n \geq 1$, $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$, avec $0! = 1$. En particulier, $n! = n(n-1)!$.

THÉORÈME / Le développement exponentiel

Pour tout réel x ,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \quad \text{Ainsi} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = e^{-1}.$$

Ces séries convergent absolument.

Pourquoi ce développement est légitime

La formule de Taylor donne, pour un certain ξ_N situé entre 0 et x ,

$$e^x = \sum_{n=0}^N \frac{x^n}{n!} + e^{\xi_N} \frac{x^{N+1}}{(N+1)!}.$$

La valeur absolue du reste est au plus $e^{|x|} |x|^{N+1} / (N+1)!$, qui tend vers zéro : le rapport de deux majorants successifs est $|x| / (N+2)$. La convergence absolue suit aussi de ce rapport pour les termes $|x|^n / n!$.

Simplifier un polynôme au numérateur

Pour $n \geq 2$,

$$\frac{n}{n!} = \frac{1}{(n-1)!}, \quad \frac{n(n-1)}{n!} = \frac{1}{(n-2)!}.$$

Comme $n^2 = n(n-1) + n$, on peut transformer une somme de $n^2/n!$ en deux séries exponentielles.

PIÈGE / Les premiers indices se traitent à part

La formule $n(n-1)/n! = 1/(n-2)!$ ne s'utilise qu'à partir de $n = 2$. À $n = 1$, le membre de gauche vaut 0, mais $(-1)!$ n'est pas défini. On ne supprime jamais un terme sans calculer sa contribution.

Un exemple entièrement indexé

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} = e.$$

ASTUCE / Vérifier le signe après une substitution

Si $j = n-2$, alors $(-1)^{n+1} = (-1)^{j+3} = -(-1)^j$. Le décalage du dénominateur peut donc modifier le signe global de la série.

MÉTHODES / 08

Choisir le bon outil

Ce que l'on observe	Ce que l'on essaie
Une différence constante	Écrire $u_n = u_1 + (n - 1)d$.
Un multiplicateur constant	Écrire une suite géométrique et calculer sa raison.
Un produit de puissances	Additionner les exposants avant de calculer le produit.
Une récurrence avec une correction rationnelle	Soustraire une suite simple g_n .
Deux facteurs voisins au dénominateur	Chercher une différence de fractions et aligner les indices.
Des blocs $a^m + a^{m-1}b + \dots + b^m$	Multiplier par $a - b$ pour obtenir une différence de puissances.
Un polynôme divisé par $n!$	Écrire des produits $n(n - 1) \dots$ qui se simplifient.
Une somme et un produit de racines	Utiliser les relations de Viète ou le centre des racines.

Un protocole en quatre étapes

1. **Lire les contraintes.** Entier positif, réel, ordre des termes, intervalle ouvert ou fermé : ces détails peuvent sélectionner une seule solution.
2. **Réduire le nombre d'inconnues.** Centrer une progression ou introduire une suite auxiliaire avant de développer.
3. **Calculer avec des bornes explicites.** Écrire les premiers termes et la dernière contribution conservée.
4. **Revenir à l'énoncé.** Vérifier les candidats dans les relations initiales et justifier la convergence si la somme est infinie.

Un réflexe utile sur le second degré

Si un polynôme unitaire a deux racines distantes de 2 et de somme $-2n$, ses racines sont nécessairement $-n - 1$ et $-n + 1$. Leur produit vaut $n^2 - 1$: inutile de commencer par une formule avec des radicaux.

PIÈGE / Un essai réussi n'est pas une preuve d'unicité

Trouver un candidat qui fonctionne établit son existence. Il faut encore montrer qu'aucun autre candidat admissible ne convient.

PROBLÈME GUIDÉ / 01

Une somme et deux racines paires

Énoncé

Déterminer les entiers $n \geq 1$ pour lesquels l'équation en x

$$\sum_{r=1}^n (x + 2r - 2)(x + 2r) = \frac{8n}{3}$$

possède deux racines qui sont des entiers pairs consécutifs.

1. Faire apparaître le polynôme

Pour chaque r , $(x + 2r - 2)(x + 2r) = x^2 + 2(2r - 1)x + 4r(r - 1)$. En utilisant les sommes classiques,

$$nx^2 + 2n^2x + \frac{4n(n^2 - 1)}{3} = \frac{8n}{3}.$$

Comme $n > 0$, on peut diviser par n . L'équation devient

$$x^2 + 2nx + \frac{4}{3}n^2 - 4 = 0.$$

2. Exploiter l'écart entre les racines

La somme des racines vaut $-2n$. Deux nombres de somme $-2n$ et d'écart 2 sont $-n - 1$ et $-n + 1$. Leur produit doit donc être $n^2 - 1$. Par Viète,

$$n^2 - 1 = \frac{4}{3}n^2 - 4 \iff n^2 = 9.$$

L'unique candidat positif est $n = 3$.

3. Vérifier la condition complète

Pour $n = 3$, le polynôme est $x^2 + 6x + 8 = (x + 2)(x + 4)$. Ses racines sont -4 et -2 , deux entiers pairs consécutifs. On a donc existence et unicité.

$$n = 3 \quad \text{et} \quad x \in \{-4, -2\}.$$

ASTUCE / Une autre voie : le discriminant

Pour un polynôme unitaire, l'écart entre deux racines réelles est $\sqrt{\Delta}$. Ici $\Delta = 16 - \frac{4}{3}n^2$. Imposer $\Delta = 4$ donne encore $n = 3$; il reste ensuite à vérifier la parité des racines.

PIÈGE / Entier pair ne signifie pas positif

Les deux racines peuvent être négatives. Seul n est supposé strictement positif dans cet énoncé.

PROBLÈME GUIDÉ / 02

Une récurrence qui se simplifie

Énoncé

Soit $a_1 = 1$ et, pour $n \geq 1$,

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{n^2 - 2n - 1}{n^2(n+1)^2}.$$

Déterminer a_n , puis calculer

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n - \frac{2}{n^2} \right) \right|.$$

1. Reconnaître la correction demandée

Le terme à sommer suggère de poser $b_n = a_n - 2/n^2$. Vérifions que la fraction de la récurrence possède la bonne forme :

$$\frac{2}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2} = \frac{2n^2 - (n+1)^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{n^2 - 2n - 1}{n^2(n+1)^2}.$$

Ainsi

$$a_{n+1} - \frac{2}{(n+1)^2} = \frac{1}{2} \left(a_n - \frac{2}{n^2} \right),$$

soit $b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n$.

2. Trouver le premier terme et la formule explicite

On a $b_1 = 1 - 2 = -1$, donc $b_n = -2^{1-n}$. Par conséquent,

$$a_n = \frac{2}{n^2} - 2^{1-n}.$$

Pour contrôler : $a_2 = 0$, à la fois par cette formule et par la récurrence initiale.

3. Sommer puis prendre la valeur absolue

La raison $1/2$ est de valeur absolue strictement inférieure à 1. La série converge et

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n - \frac{2}{n^2} \right) = \frac{-1}{1 - 1/2} = -2.$$

La valeur absolue demandée vaut donc $\boxed{2}$.

ASTUCE / La somme partielle reste informative

Pour $N \geq 1$, elle vaut $-2(1 - 2^{-N})$. Sa distance à la limite -2 vaut exactement 2^{1-N} .

PROBLÈME GUIDÉ / 03

Produits et moyennes géométriques

Énoncé

La suite est $729, 81, 9, 1, 1/9, \dots$. On note P_n le produit de ses n premiers termes. Calculer

$$2 \sum_{n=1}^{40} \sqrt[n]{P_n}$$

sous la forme $(3^\alpha - 1)/3^\beta$, avec α, β entiers positifs, puis déterminer $\alpha + \beta$.

1. Écrire tous les termes dans la même base

Le terme de rang k est $u_k = 9^{4-k}$. Il est positif. Les règles sur les puissances donnent

$$P_n = 9^{\sum_{k=1}^n (4-k)} = 9^{4n - n(n+1)/2} = 9^{n(7-n)/2} = 3^{n(7-n)}.$$

Le produit peut devenir très petit, mais il reste positif ; la racine n -ième est bien définie.

2. Prendre la racine avant de sommer

$$\sqrt[n]{P_n} = 3^{7-n} = 3^7 \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Il s'agit maintenant d'une suite géométrique de premier terme $3^6 = 729$ et de raison $1/3$.

3. Utiliser la somme finie

$$\begin{aligned} 2 \sum_{n=1}^{40} \sqrt[n]{P_n} &= 2 \cdot 3^7 \sum_{n=1}^{40} \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ &= 2 \cdot 3^7 \frac{\frac{1}{3}(1 - 3^{-40})}{1 - \frac{1}{3}} \\ &= 3^7(1 - 3^{-40}) = \frac{3^{40} - 1}{3^{33}}. \end{aligned}$$

On obtient $\alpha = 40$ et $\beta = 33$, donc $\boxed{\alpha + \beta = 73}$.

ASTUCE / Pourquoi cette écriture détermine les exposants

Le numérateur $3^{40} - 1$ n'est pas divisible par 3. La fraction est donc irréductible, et la puissance de 3 au dénominateur impose $\beta = 33$, puis le numérateur impose $\alpha = 40$.

PIÈGE / Les exposants négatifs sont autorisés

Pour $n > 7$, $n(7-n) < 0$. La formule reste valable : une puissance négative est simplement l'inverse d'une puissance positive.

PROBLÈME GUIDÉ / 04

Une série organisée en blocs

Énoncé

Avec $a = 1/3$ et $b = 4/7$, calculer

$$S = (a + b) + (a^2 + ab + b^2) + (a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) + \dots$$

Le bloc de degré $m \geq 1$ est $H_m = \sum_{k=0}^m a^{m-k}b^k$.

1. Introduire le facteur qui manque

La différence de puissances se factorise selon

$$(a - b)H_m = a^{m+1} - b^{m+1}.$$

Pour le vérifier, multiplier le bloc par a , puis par $-b$: tous les termes mixtes s'annulent. Comme $a \neq b$,

$$H_m = \frac{a^{m+1} - b^{m+1}}{a - b}.$$

2. Commencer par une somme finie

Pour $M \geq 1$,

$$\sum_{m=1}^M H_m = \frac{1}{a-b} \left(\frac{a^2(1-a^M)}{1-a} - \frac{b^2(1-b^M)}{1-b} \right).$$

Puisque $|a| < 1$ et $|b| < 1$, les puissances a^M, b^M tendent vers zéro. Cette identité prouve la convergence et donne

$$S = \frac{1}{a-b} \left(\frac{a^2}{1-a} - \frac{b^2}{1-b} \right) = \frac{a+b-ab}{(1-a)(1-b)}.$$

La dernière simplification vient de $a^2(1-b) - b^2(1-a) = (a-b)(a+b-ab)$.

3. Remplacer les paramètres

$$a + b - ab = \frac{1}{3} + \frac{4}{7} - \frac{4}{21} = \frac{5}{7}, \quad (1-a)(1-b) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{7} = \frac{2}{7}.$$

$$S = \frac{5/7}{2/7} = \frac{5}{2}.$$

PIÈGE / Ce ne sont pas des développements binomiaux

Le bloc $a^2 + ab + b^2$ n'est pas $(a+b)^2$, dont le coefficient de ab vaut 2. Ici tous les coefficients valent 1.

ASTUCE / Préserver le sens de la somme

On a sommé les blocs dans leur ordre, à partir d'identités finies. Aucun réarrangement non justifié d'une série infinie n'est nécessaire.

PROBLÈME GUIDÉ / 05

Quatre entiers en progression

Énoncé

Quatre entiers a_1, a_2, a_3, a_4 forment une suite arithmétique de raison entière ℓ . Ils vérifient

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 48, \quad a_1 a_2 a_3 a_4 + \ell^4 = 361.$$

Déterminer le plus grand des quatre termes.

1. Centrer la progression

Le centre vaut $48/4 = 12$. Posons

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) = (12 - 3h, 12 - h, 12 + h, 12 + 3h), \quad \ell = 2h.$$

Puisque $12 - h = a_2$ est entier, h est entier.

2. Reconnaître un carré parfait

En regroupant les facteurs symétriques, la seconde condition devient

$$(144 - 9h^2)(144 - h^2) + 16h^4 = 361.$$

Au lieu de développer de grands nombres, observons l'identité générale

$$(m^2 - 9h^2)(m^2 - h^2) + 16h^4 = m^4 - 10m^2h^2 + 25h^4 = (m^2 - 5h^2)^2.$$

Ainsi $(144 - 5h^2)^2 = 19^2$, d'où deux possibilités :

$$144 - 5h^2 = 19 \Rightarrow h^2 = 25, \quad 144 - 5h^2 = -19 \Rightarrow h^2 = \frac{163}{5}.$$

La seconde est impossible pour un entier h . La première donne $h = \pm 5$.

3. Interpréter le signe et vérifier

Pour $h = 5$, les termes sont $-3, 7, 17, 27$; pour $h = -5$, leur ordre est inversé. Le plus grand est donc le même dans les deux cas :

$$\max(a_1, a_2, a_3, a_4) = 27.$$

On vérifie bien $-3 + 7 + 17 + 27 = 48$ et

$$(-3) \cdot 7 \cdot 17 \cdot 27 + 10^4 = -9639 + 10000 = 361.$$

ASTUCE / Une identité réutilisable

Pour quatre termes centrés sur m et de raison $2h$, le produit des termes augmenté de la quatrième puissance de la raison est toujours $(m^2 - 5h^2)^2$.

PIÈGE / Ne pas imposer la positivité des termes

L'énoncé impose des entiers, pas des entiers positifs. Écarter -3 ferait perdre la solution.

PROBLÈME GUIDÉ / 06

Une série alternée factorielle

Énoncé

Calculer la série

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k(k+1)}{k!}.$$

1. Vérifier que les manipulations sont permises

Pour $v_k = k(k+1)/k! > 0$, on a

$$\frac{v_{k+1}}{v_k} = \frac{k+2}{k(k+1)} \rightarrow 0.$$

À partir d'un certain rang, les termes sont donc majorés par ceux d'une suite géométrique de raison $1/2$. La série converge absolument : on peut la décomposer en deux séries convergentes.

2. Adapter le numérateur à la factorielle

Écrivons $k(k+1) = k(k-1) + 2k$. Pour $k \geq 2$,

$$\frac{k(k+1)}{k!} = \frac{1}{(k-2)!} + \frac{2}{(k-1)!}.$$

À $k = 1$, la première contribution $k(k-1)/k!$ est nulle, et la seconde vaut 2. Ainsi la décomposition correcte est

$$S = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k-2)!} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k-1)!}.$$

3. Changer les indices avec leurs signes

Dans la première série, $j = k-2$ donne $(-1)^{k+1} = -(-1)^j$. Dans la seconde, $j = k-1$ donne $(-1)^{k+1} = (-1)^j$. Donc

$$S = - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} + 2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} = -e^{-1} + 2e^{-1}.$$

$$\boxed{S = \frac{1}{e}.$$

PIÈGE / Le terme initial n'a pas été supprimé

La première série commence à 2 parce que sa contribution à $k = 1$ vaut zéro dans l'expression d'origine. La seconde commence bien à 1. Commencer les deux à 2 ferait perdre 2 et donnerait une réponse fausse.

ASTUCE / Une méthode générale

Décomposer les polynômes selon les produits k , $k(k-1)$, $k(k-1)(k-2)$ permet de faire disparaître le numérateur contre la factorielle.

PROBLÈME GUIDÉ / 07

Un quartique télescopique

Énoncé

Écrire sous forme irréductible p/q la somme

$$S = \sum_{r=1}^{25} \frac{r}{r^4 + r^2 + 1},$$

puis calculer $p + q$.

1. Factoriser pour créer une différence

On utilise

$$r^4 + r^2 + 1 = (r^2 - r + 1)(r^2 + r + 1),$$

puis la différence des deux facteurs, égale à $2r$:

$$\frac{r}{r^4 + r^2 + 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r^2 - r + 1} - \frac{1}{r^2 + r + 1} \right).$$

Les dénominateurs sont strictement positifs : par exemple $r^2 - r + 1 = (r - 1/2)^2 + 3/4$.

2. Identifier les termes de bord

En posant $v_r = 1/(r^2 - r + 1)$, on a $v_{r+1} = 1/(r^2 + r + 1)$. Ainsi

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{13}\right) + \dots \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{601} - \frac{1}{651}\right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{651}\right) = \frac{325}{651}. \end{aligned}$$

3. Vérifier que la fraction est irréductible

Comme $651 = 2 \cdot 325 + 1$, tout diviseur commun de 325 et 651 divise 1. La fraction est donc irréductible.

$$p = 325, \quad q = 651, \quad p + q = 976.$$

THÉORÈME / La formule générale

Pour tout entier $N \geq 1$,

$$\sum_{r=1}^N \frac{r}{r^4 + r^2 + 1} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{N^2 + N + 1}\right).$$

La série infinie a donc pour somme $1/2$.

PROBLÈME GUIDÉ / 08

Une moyenne et un second degré

Énoncé / variante pédagogique

Les réels $a, 4, \alpha, b$ sont, dans cet ordre, en progression arithmétique. On suppose $ab \neq 0, a > 2$ et

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = \frac{5}{16}.$$

Déterminer a, α, b , puis résoudre

$$\alpha x^2 - ax + 2(\alpha - 2b) = 0.$$

1. Ne garder qu'une inconnue

En notant d la raison, $a = 4 - d, \alpha = 4 + d$ et $b = 4 + 2d$. La condition de moyenne devient $8(a + b) = 5ab$, soit

$$8(8 + d) = 5(4 - d)(4 + 2d).$$

En développant et en divisant par 2,

$$5d^2 - 6d - 8 = 0 \iff (d - 2)(5d + 4) = 0.$$

2. Appliquer l'inégalité stricte

Si $d = 2$, alors $a = 2$, ce qui contredit $a > 2$. On doit donc prendre $d = -4/5$. Ainsi

$$a = \frac{24}{5}, \quad \alpha = \frac{16}{5}, \quad b = \frac{12}{5}.$$

La moyenne vaut bien $\frac{1}{2}(5/24 + 5/12) = 5/16$.

3. Résoudre l'équation obtenue

$$\frac{16}{5}x^2 - \frac{24}{5}x - \frac{16}{5} = 0 \iff 2x^2 - 3x - 2 = (2x + 1)(x - 2) = 0.$$

$$x = -\frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad x = 2.$$

La racine négative appartient à $] -2, 0[$; la racine positive appartient à $]1, 4[$. En revanche, 2 n'appartient pas à l'intervalle ouvert $]0, 2[$.

PIÈGE / Trois détails décisifs

Une progression peut être décroissante ; une solution fractionnaire est parfaitement admissible ; une borne exclue ne devient pas incluse parce qu'elle est une racine.

La forme finale de l'équation a été explicitée dans cette variante pour lever une ambiguïté de transcription. Toutes les étapes portent sur l'énoncé affiché ci-dessus.

PROBLÈME GUIDÉ / 09

Arithmétique et géométrie à la fois

Énoncé

Les réels $a < b < c$ sont en progression arithmétique et $a + b + c = 1$. Les nombres $a^2, 2b^2, c^2$, dans cet ordre, sont en progression géométrique. Déterminer a, b, c et calculer $9(a^2 + b^2 + c^2)$.

1. Commencer par le terme central

La progression arithmétique donne $a + c = 2b$. Comme $a + b + c = 1$, on obtient $3b = 1$, puis

$$b = \frac{1}{3}, \quad a + c = \frac{2}{3}.$$

La condition géométrique impose $(2b^2)^2 = a^2c^2$, donc

$$ac = \pm 2b^2 = \pm \frac{2}{9}.$$

2. Sélectionner le signe compatible avec des réels

Si $ac = 2/9$, alors

$$(a - c)^2 = (a + c)^2 - 4ac = \frac{4}{9} - \frac{8}{9} = -\frac{4}{9},$$

ce qui est impossible. Ainsi $ac = -2/9$. Les nombres a, c sont les racines de

$$t^2 - \frac{2}{3}t - \frac{2}{9} = 0 \iff 9t^2 - 6t - 2 = 0.$$

L'ordre $a < c$ permet de conclure :

$$a = \frac{1 - \sqrt{3}}{3}, \quad b = \frac{1}{3}, \quad c = \frac{1 + \sqrt{3}}{3}.$$

Leur raison arithmétique est $\sqrt{3}/3 > 0$. Les trois carrés de l'énoncé sont non nuls et vérifient bien la relation géométrique.

3. Calculer sans développer les radicaux

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a + c)^2 - 2ac + b^2 = \frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = 1.$$

$$9(a^2 + b^2 + c^2) = 9.$$

PIÈGE / La racine carrée d'un carré donne une valeur absolue

De $(ac)^2 = 4b^4$, on déduit $|ac| = 2b^2$, et non nécessairement $ac = 2b^2$. Dans ce problème, seul le signe négatif est possible.

ASTUCE / Calculer seulement ce qui est nécessaire

Si l'on demandait uniquement la somme des carrés, connaître $b, a + c$ et ac suffirait ; les valeurs individuelles de a et c seraient superflues.

ENTRAÎNEMENT / NIVEAU 1

Installer les automatismes

Exercice 1 / Retrouver une progression

Une suite arithmétique $(u_n)_{n \geq 1}$ vérifie $u_4 = 11$ et $u_{10} = 29$.

1. Déterminer la raison et le premier terme.
2. Calculer u_{20} et $u_1 + u_2 + \dots + u_{20}$.

Exercice 2 / Une somme et sa précision

Soit $u_n = 3/2^{n-1}$ pour $n \geq 1$, et $S_N = \sum_{n=1}^N u_n$.

1. Donner une formule pour S_N et déterminer sa limite S .
2. Trouver le plus petit entier N tel que $|S - S_N| \leq 10^{-2}$.

Exercice 3 / Une somme polynomiale

Pour $n \geq 1$, simplifier

$$A_n = \sum_{k=1}^n (3k^2 - 2k + 1).$$

Écrire le résultat sous une forme factorisée, puis calculer A_5 .

Exercice 4 / Trois termes symétriques

Trois nombres réels $a < b < c$ sont en progression arithmétique. Leur somme vaut 21 et leur produit vaut 315. Déterminer les trois nombres.

Avant de consulter les solutions

Dans l'exercice 1, compter les écarts entre les rangs 4 et 10. Dans l'exercice 2, travailler sur le reste exact. Dans l'exercice 3, séparer les trois sommes. Dans l'exercice 4, commencer par le terme central.

ASTUCE / Un contrôle par exercice

Réinjecter les valeurs dans les données de départ. Pour une formule de somme, vérifier au moins le cas $n = 1$ avant de calculer une valeur plus grande.

ENTRAÎNEMENT / NIVEAU 2

Transformer avant de calculer

Exercice 5 / Une correction rationnelle

On pose $a_1 = 3$ et, pour $n \geq 1$,

$$a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{3n}.$$

Déterminer a_n , puis calculer $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 1/n)$.

Exercice 6 / Un télescopage de pas deux

Pour $n \geq 1$, calculer

$$T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+2)},$$

puis déterminer la somme de la série correspondante. Attention : plusieurs termes de bord subsistent.

Exercice 7 / Produit puis racine

La suite 4, 16, 64, 256, ... est géométrique. On note P_n le produit de ses n premiers termes. Déterminer P_n , puis calculer

$$B = \sum_{n=1}^8 \sqrt[n]{P_n}.$$

Exercice 8 / Centrer une somme de carrés

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\sum_{k=1}^5 (x - k)^2 = 20.$$

Proposer une résolution en développant les sommes et une résolution en posant $y = x - 3$.

Ce que ces exercices entraînent

Changer de suite, aligner les indices, additionner des exposants et exploiter une symétrie : quatre façons de rendre le calcul plus court tout en conservant sa justification.

PIÈGE / Une somme finie n'exige pas $|q| < 1$

Dans l'exercice 7, la suite des racines peut avoir une raison supérieure à 1. La formule de somme finie reste valable ; la condition $|q| < 1$ concerne le passage à l'infini.

ENTRAÎNEMENT / NIVEAU 3

Combiner plusieurs idées

Exercice 9 / Deux séries factorielles

Justifier la convergence absolue, puis calculer

$$U = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k!}, \quad V = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k^2}{k!}.$$

Préciser les bornes après chaque changement d'indice.

Exercice 10 / Deux progressions imbriquées

Les réels $a < b < c$ sont arithmétiques, avec $a + b + c = 6$. Les nombres $a^2, 2b^2, c^2$ sont géométriques. Déterminer a, b, c , puis calculer $a^2 + b^2 + c^2$ sans développer les radicaux.

Exercice 11 / Quatre entiers et un carré

Les entiers u_1, u_2, u_3, u_4 forment une progression arithmétique de raison ℓ et vérifient

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 28, \quad u_1 u_2 u_3 u_4 + \ell^4 = 841.$$

Déterminer toutes les progressions ordonnées possibles.

Exercice 12 / Somme par blocs et reste exact

Avec $a = 1/4$ et $b = 1/2$, on pose

$$H_m = \sum_{k=0}^m a^{m-k} b^k \quad (m \geq 1), \quad S_N = \sum_{m=1}^N H_m.$$

Donner une formule pour H_m et S_N , puis calculer $S = \lim S_N$ et le reste $S - S_N$.

Le niveau attendu dans une rédaction

Les réponses numériques ne suffisent pas. Justifier les signes retenus, traiter les indices initiaux et expliquer pourquoi une solution d'équation est admise ou rejetée.

ASTUCE / Chercher un invariant simple

Dans une progression arithmétique, la moyenne peut être connue avant les termes. Dans une somme infinie, la formule exacte des sommes partielles peut donner simultanément la limite et le reste.

CORRIGÉS / 01 ET 02

Progressions et précision

Exercice 1 / Six écarts entre deux rangs

La raison d vérifie

$$u_{10} - u_4 = (10 - 4)d = 6d = 29 - 11 = 18.$$

Donc $d = 3$. Comme $u_4 = u_1 + 3d$, on obtient $u_1 = 11 - 9 = 2$, puis

$$u_n = 2 + 3(n - 1) = 3n - 1, \quad u_{20} = 59.$$

La somme des vingt termes est

$$\sum_{k=1}^{20} u_k = \frac{20}{2}(u_1 + u_{20}) = 10(2 + 59) = 610.$$

Réponse et contrôle

$d = 3$, $u_1 = 2$, $u_{20} = 59$ et $S_{20} = 610$. La formule donne bien $u_4 = 11$ et $u_{10} = 29$. La moyenne des vingt termes vaut 30,5, cohérente avec $610/20$.

Exercice 2 / Contrôler l'erreur avec le reste

La suite est géométrique de premier terme 3 et de raison $1/2$. Pour $N \geq 1$,

$$S_N = 3 \frac{1 - 2^{-N}}{1 - 1/2} = 6(1 - 2^{-N}).$$

La raison est de valeur absolue inférieure à 1, donc $S = 6$. Le reste est positif et vaut

$$|S - S_N| = 6 \cdot 2^{-N}.$$

La précision souhaitée équivaut à

$$6 \cdot 2^{-N} \leq \frac{1}{100} \iff 2^N \geq 600.$$

Or $2^9 = 512 < 600$ et $2^{10} = 1024 \geq 600$. Comme 2^N est strictement croissante,

$$N_{\min} = 10.$$

À $N = 9$, le reste vaut $6/512 \approx 0,01172$; à $N = 10$, il vaut $6/1024 \approx 0,00586$.

ASTUCE / Le mot « plus petit » demande une vérification

Il faut montrer que $N = 10$ convient et que $N = 9$ ne convient pas. La monotonie du reste permet ensuite d'exclure tous les entiers inférieurs.

CORRIGÉS / 03 ET 04

Sommes classiques et symétrie

Exercice 3 / Séparer puis factoriser

La linéarité de la somme donne

$$\begin{aligned} A_n &= 3 \sum_{k=1}^n k^2 - 2 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} - n(n+1) + n \\ &= \frac{n(n+1)(2n-1)}{2} + n \\ &= \frac{n(2n^2 + n + 1)}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi $A_5 = 5(50 + 5 + 1)/2 = 140$. Pour vérifier, les cinq termes sont 2, 9, 22, 41, 66, dont la somme vaut bien 140. Au rang $n = 1$, la formule donne 2, comme l'expression initiale.

PIÈGE / Un contrôle ne remplace pas la démonstration

Tester $n = 1$ et $n = 5$ peut détecter une erreur, mais ne prouve pas une identité pour tous les entiers n . Ici, la preuve est fournie par les égalités de sommes.

Exercice 4 / Le centre d'abord

Comme $a + c = 2b$ et $a + b + c = 21$, on obtient $b = 7$. Écrivons donc

$$a = 7 - d, \quad b = 7, \quad c = 7 + d.$$

L'ordre strict $a < b < c$ impose $d > 0$. La condition de produit devient

$$(7 - d) \cdot 7 \cdot (7 + d) = 315 \iff 7(49 - d^2) = 315.$$

En divisant par 7, $49 - d^2 = 45$, donc $d^2 = 4$. Le signe positif donne $d = 2$.

$$(a, b, c) = (5, 7, 9).$$

Vérification : $5 + 7 + 9 = 21$, $5 \cdot 7 \cdot 9 = 315$ et les deux différences valent 2.

ASTUCE / Pourquoi la symétrie aide

Le produit des termes extrêmes devient $7^2 - d^2$. On évite trois inconnues et l'on conserve une seule équation du second degré.

CORRIGÉS / 05 ET 06

Récurrence et termes de bord

Exercice 5 / Soustraire $1/n$

Posons $b_n = a_n - 1/n$. La récurrence se réécrit exactement

$$a_{n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{3} \left(a_n - \frac{1}{n} \right).$$

Ainsi $b_{n+1} = b_n/3$ et $b_1 = 3 - 1 = 2$. On en déduit

$$b_n = \frac{2}{3^{n-1}}, \quad \boxed{a_n = \frac{1}{n} + \frac{2}{3^{n-1}}}.$$

La série demandée est géométrique, de raison $1/3$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n - \frac{1}{n} \right) = \frac{2}{1 - 1/3} = \boxed{3}.$$

La formule donne $a_2 = 1/2 + 2/3 = 7/6$, ce que confirme la récurrence.

Exercice 6 / Deux termes de chaque côté

La décomposition adaptée est

$$\frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right).$$

Par conséquent,

$$T_n = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{j=3}^{n+2} \frac{1}{j} \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right).$$

Cette identité est valable aussi pour $n = 1$, par calcul direct. En simplifiant,

$$\boxed{T_n = \frac{3}{4} - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2(n+2)}}.$$

Les deux derniers termes tendent vers zéro. La série converge donc vers $\boxed{3/4}$.

PIÈGE / Le décalage vaut deux

Le terme négatif au rang k annule le terme positif au rang $k+2$. C'est pourquoi les deux premières contributions positives et les deux dernières négatives restent présentes.

ASTUCE / Reste exact

La somme des termes après le rang n vaut $\frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)}$. Elle est positive, ce qui est cohérent avec la positivité de tous les termes de la série.

CORRIGÉS / 07 ET 08

Exposants et centrage

Exercice 7 / Additionner les exposants

Le terme de rang k est 4^k . Ainsi

$$P_n = \prod_{k=1}^n 4^k = 4^{n(n+1)/2}, \quad \sqrt[n]{P_n} = 4^{(n+1)/2} = 2^{n+1}.$$

Pour $n = 1$, la racine vaut bien 4. Pour $n = 2$, elle vaut $\sqrt{4 \cdot 16} = 8$: la raison est 2.

$$B = \sum_{n=1}^8 2^{n+1} = 4(1 + 2 + \cdots + 2^7) = 4 \frac{2^8 - 1}{2 - 1} = \boxed{1020}.$$

Exercice 8 / Première méthode : les formules de somme

En développant les cinq carrés,

$$\sum_{k=1}^5 (x - k)^2 = 5x^2 - 2x \sum_{k=1}^5 k + \sum_{k=1}^5 k^2 = 5x^2 - 30x + 55.$$

L'équation devient $5x^2 - 30x + 35 = 0$, puis $x^2 - 6x + 7 = 0$. En complétant le carré,

$$(x - 3)^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 3 \pm \sqrt{2}}.$$

Deuxième méthode : utiliser le centre

Posons $y = x - 3$. Les termes $x - k$ deviennent $y + 2, y + 1, y, y - 1, y - 2$. Les termes linéaires se compensent :

$$(y + 2)^2 + (y + 1)^2 + y^2 + (y - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5y^2 + 10.$$

L'équation $5y^2 + 10 = 20$ donne directement $y^2 = 2$.

THÉORÈME / Une identité de centrage générale

Si $\bar{c} = (c_1 + \cdots + c_n)/n$, alors

$$\sum_{k=1}^n (x - c_k)^2 = n(x - \bar{c})^2 + \sum_{k=1}^n (c_k - \bar{c})^2.$$

Elle se démontre en développant et en utilisant $\sum (c_k - \bar{c}) = 0$.

Cette identité montre aussi que la somme de carrés est minimale lorsque x est la moyenne des c_k . Ici, le minimum vaut 10, atteint pour $x = 3$.

CORRIGÉS / 09 ET 10

Factorielles et signes

Exercice 9 / Décomposer k^2

Écrivons $k^2 = k(k-1) + k$. Les deux séries sont absolument convergentes, car le rapport de deux termes positifs $k^2/k!$ successifs vaut $(k+1)/k^2$ et tend vers zéro.

$$U = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-2)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} = e + e = \boxed{2e}.$$

Pour la série alternée,

$$V = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k-2)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k-1)!}.$$

Les substitutions $j = k-2$ et $j = k-1$ donnent respectivement $-e^{-1}$ et e^{-1} , donc $\boxed{V=0}$. À $k=1$, la contribution $k(k-1)/k!$ est nulle, mais $k/k! = 1$ est conservée. Il n'y a donc aucun terme initial perdu.

Exercice 10 / Déterminer le signe du produit

La progression arithmétique et la somme donnent $3b = 6$, donc $b = 2$ et $a + c = 4$. La progression géométrique impose

$$(2b^2)^2 = a^2 c^2 \implies ac = \pm 2b^2 = \pm 8.$$

Le signe positif est impossible, car il donnerait $(a-c)^2 = 4^2 - 4 \cdot 8 = -16$. Donc $ac = -8$. Les nombres a, c sont les racines de $t^2 - 4t - 8 = 0$, soit $2 \pm 2\sqrt{3}$. L'ordre des termes donne

$$\boxed{a = 2 - 2\sqrt{3}, \quad b = 2, \quad c = 2 + 2\sqrt{3}.}$$

Les différences valent $2\sqrt{3} > 0$. Les termes au carré sont non nuls et leur relation géométrique est bien vérifiée. Enfin,

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a+c)^2 - 2ac + b^2 = 16 + 16 + 4 = \boxed{36}.$$

ASTUCE / Deux façons d'éviter un calcul inutile

Dans la série alternée, les deux séries exponentielles s'annulent exactement. Dans la somme des carrés, la somme et le produit des extrêmes suffisent : aucun développement de radical n'est requis.

CORRIGÉS / 11 ET 12

Carré parfait et reste exact

Exercice 11 / Exploiter l'intégralité

Le centre vaut $28/4 = 7$. Écrivons les quatre termes $7 - 3h, 7 - h, 7 + h, 7 + 3h$, de raison $\ell = 2h$. Comme $7 - h$ est entier, h l'est aussi. L'identité du problème 5 donne

$$(49 - 5h^2)^2 = 841 = 29^2.$$

Ainsi $49 - 5h^2 = 29$ ou $49 - 5h^2 = -29$, soit

$$h^2 = 4 \quad \text{ou} \quad h^2 = \frac{78}{5}.$$

L'intégralité élimine la seconde possibilité. Pour $h = 2$ et $h = -2$, on trouve exactement

$$(1, 5, 9, 13) \quad \text{et} \quad (13, 9, 5, 1).$$

Le contrôle donne $1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 13 + 4^4 = 585 + 256 = 841$. Le signe de la raison ne change ni la somme ni cette condition.

Exercice 12 / Réduire chaque bloc

Comme $a \neq b$, l'identité de différence de puissances donne

$$H_m = \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{b - a} = 4(2^{-m-1} - 4^{-m-1}) = 2^{1-m} - 4^{-m}.$$

En sommant deux progressions géométriques finies,

$$\begin{aligned} S_N &= 2(1 - 2^{-N}) - \frac{1}{3}(1 - 4^{-N}) \\ &= \frac{5}{3} - 2^{1-N} + \frac{4^{-N}}{3}. \end{aligned}$$

Les deux puissances tendent vers zéro, donc

$$S = \frac{5}{3}, \quad S - S_N = 2^{1-N} - \frac{4^{-N}}{3}.$$

À $N = 1$, $S_1 = 3/4 = a + b$. Le reste est strictement positif, comme attendu puisque tous les blocs sont positifs.

ASTUCE / Une borne simple pour la précision

Le reste exact entraîne $0 < S - S_N < 2^{1-N}$. Pour garantir une erreur inférieure à 10^{-3} , il suffit donc de prendre $N = 11$, car $2^{-10} < 10^{-3}$.

SYNTHÈSE / À CONSERVER

Les formules et les bons réflexes

THÉORÈME / Suites usuelles / premier terme d'indice 1

Arithmétique : $u_n = u_1 + (n-1)d, \quad S_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n).$

Géométrie : $u_n = u_1 q^{n-1}, \quad S_n = u_1 \frac{1-q^n}{1-q} \quad (q \neq 1).$

Série géométrique : $S_\infty = \frac{u_1}{1-q} \quad \text{si } |q| < 1.$

THÉORÈME / Sommes et transformations

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2, \quad \sum_{k=1}^n (v_k - v_{k+1}) = v_1 - v_{n+1}.$$

$$a_{n+1} = qa_n + g_{n+1} - qg_n \Rightarrow a_n - g_n = (a_1 - g_1)q^{n-1}.$$

THÉORÈME / Factorisations à reconnaître

$$a^{m+1} - b^{m+1} = (a-b) \sum_{k=0}^m a^{m-k} b^k,$$

$$r^4 + r^2 + 1 = (r^2 - r + 1)(r^2 + r + 1),$$

$$(m^2 - 9h^2)(m^2 - h^2) + (2h)^4 = (m^2 - 5h^2)^2.$$

THÉORÈME / Séries factorielles

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad \frac{k}{k!} = \frac{1}{(k-1)!} \quad (k \geq 1), \quad \frac{k(k-1)}{k!} = \frac{1}{(k-2)!} \quad (k \geq 2).$$

Les cinq vérifications finales

1. Ai-je conservé le bon premier indice et le bon nombre de termes ?
2. Ai-je justifié le passage à l'infini ?
3. Ai-je traité les indices exclus par une simplification ?
4. Ai-je conservé tous les signes avant de sélectionner les solutions ?
5. Ma réponse vérifie-t-elle les conditions initiales ?

ASTUCE / L'idée à retenir

La formule vient après la structure : identifier ce qui est constant, ce qui se décale et ce qui s'annule permet de choisir le calcul juste.