

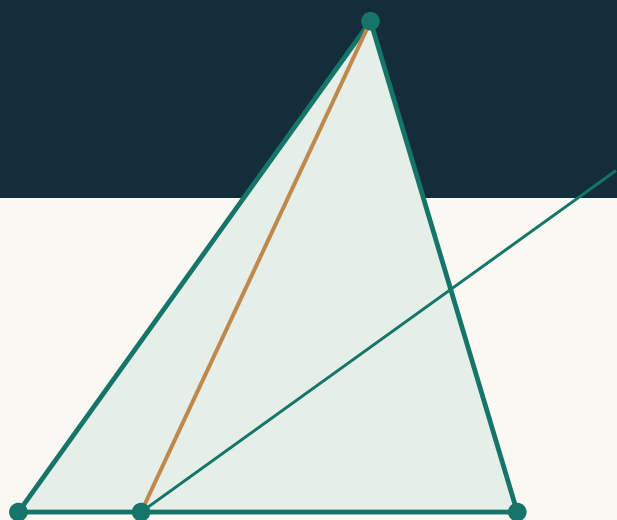
COMPRENDRE • DÉMONTRER • RÉSOUDRE

10 problèmes, 10 stratégies

Un cahier de mathématiques olympiques
en français, pour aller au-delà du résultat.

ALGÈBRE / ARITHMÉTIQUE

PROBABILITÉS / GÉOMÉTRIE



$$x^y = y^x$$

1, 1, 2, 6, 24...

Observer un motif.

Choisir le bon outil.

Justifier chaque étape.

10

problèmes corrigés

08

applications

18

pages structurées

NIVEAU AVANCÉ • ENTRAÎNEMENT AUX OLYMPIADES

Édition pédagogique française : Maths Olympiad

Énoncés • Solutions détaillées • Astuces • Pièges

POUR BIEN COMMENCER

Le parcours du cahier

Chercher d'abord. Lire ensuite. Refaire sans le corrigé.

Boîte à outils : algèbre	03
Boîte à outils : probabilités	04
01 Puissances croisées	05
02 Diviseurs au hasard	06
03 Un cadre articulé	07
04 Logarithmes imbriqués	08
05 Une pièce déséquilibrée	09
06 Une récurrence bien cachée	10
07 Décimales périodiques	11
08 Géométrie : préparer et résoudre	12-13
09 Un polynôme à coefficients entiers	14
10 Marcher sur un triangle	15
Carte des méthodes	16
Atelier : huit applications	17
Corrigés de l'atelier	18

COMMENT TRAVAILLER

Consacrer 10 à 20 minutes à un problème avant de consulter la solution. Noter l'idée décisive, puis refaire le raisonnement le lendemain. Les huit applications de la page 17 permettent de vérifier le transfert de méthode.

À PROPOS DE CETTE ÉDITION

Adaptation française du fichier **Dpp5.txt**, transcription automatique d'une séance de **Prince Garg (Olympiad Corner)**. Les répétitions orales sont regroupées et les raisonnements sont vérifiés. Les énoncés sont reconstitués à partir des calculs ; les précisions sensibles sont signalées dans les problèmes 3, 4 et 8.

Prérequis conseillés : fractions, puissances, factorisation et géométrie du triangle. Les logarithmes, les factorielles et les probabilités nécessaires sont rappelés. Source vidéo indiquée dans le fichier : youtube.com/watch?v=lo_e7GPvcS8.

BOÎTE À OUTILS • 1/2

Changer de forme pour simplifier

Les écritures qui révèlent une structure.

1. Puissances positives : rendre les exposants comparables

Pour des bases strictement positives, les règles des puissances sont valables pour des exposants réels. En particulier, si $t \neq 0$, l'égalité $A^t = B^t$ entraîne $A = B$. Une relation telle que $y = kx$ permet donc de supprimer un exposant commun.

$$(uv)^t = u^t v^t, \quad (u^s)^t = u^{st}, \quad \frac{u^s}{u^t} = u^{s-t}$$

2. Logarithmes : lire une équation à l'envers

Pour $b > 0$, $b \neq 1$ et $u > 0$, le nombre $\log_b(u)$ est l'exposant qu'il faut donner à b pour obtenir u . Avec des logarithmes imbriqués, commencer par celui qui se trouve le plus à l'extérieur.

$$\log_b(u) = v \iff u = b^v$$

$$\log_b(uv) = \log_b u + \log_b v, \quad \log_b(u^t) = t \log_b u$$

PIÈGE

Le domaine fait partie du raisonnement : une base de logarithme doit être positive et différente de 1 ; son argument doit être strictement positif.

3. Factorielles et quotients consécutifs

La notation $n!$ désigne le produit $1 \times 2 \times \dots \times n$; on pose $0! = 1$. Lorsqu'une suite comporte des produits ou des carrés de termes consécutifs, essayer le quotient u_n/u_{n-1} , après avoir vérifié que le dénominateur est non nul.

$$\frac{(n+2)!}{n!} = (n+2)(n+1), \quad \prod_{k=1}^n (k+2) = \frac{(n+2)!}{2}$$

4. Écriture décimale périodique

Si un bloc de k chiffres, représentant un entier N , se répète immédiatement après la virgule, multiplier par 10^k puis soustraire élimine la partie périodique.

$$0,\overline{ab} = \frac{10a+b}{99}, \quad 0,\overline{abc} = \frac{100a+10b+c}{999}$$

BOÎTE À OUTILS • 2/2

Compter avant de calculer

Diviseurs, événements indépendants et cas disjoints.

1. Chaque exposant est un choix

Pour $N = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$, un diviseur choisit indépendamment, pour chaque premier p_i , un exposant entre 0 et α_i . Un carré impose des exposants pairs ; 1 est bien un carré.

$$\tau(N) = \prod_{i=1}^k (\alpha_i + 1)$$

$$\#\{\text{diviseurs carrés}\} = \prod_{i=1}^k \left(\left\lfloor \frac{\alpha_i}{2} \right\rfloor + 1 \right)$$

2. Choisir deux objets distincts

Parmi D objets, il existe $D(D - 1)$ couples ordonnés d'objets distincts. Si l'ordre ne compte pas, chaque paire a été comptée deux fois. Il faut donc diviser par 2.

$$\binom{D}{2} = \frac{D(D-1)}{2}$$

COHÉRENCE DU COMPTAGE

Utiliser le même modèle au numérateur et au dénominateur. Si une classe contient A objets et l'autre B , les paires non ordonnées avec un objet de chaque classe sont au nombre de AB .

3. Multiplier dans un scénario, additionner entre scénarios

Pour des événements indépendants, multiplier les probabilités. Pour des cas incompatibles, additionner. Si deux expériences indépendantes ont la même loi $q_k = P(X = k)$, la probabilité d'obtenir le même résultat est la somme des carrés des q_k .

$$P(X=Y) = \sum_k q_k^2$$

Une expérience se répète ? Décrire l'état après n étapes et le relier à l'état précédent permet souvent d'écrire une récurrence.

PIÈGE

« Être revenu après n étapes » et « revenir pour la première fois à la n -ième étape » sont deux événements différents.

PROBLÈME 01 • ALGÈBRE

Puissances croisées

Idée clé : utiliser la relation entre les variables avant tout calcul.

ÉNONCÉ

Deux réels strictement positifs x et y vérifient $y = 3x/4$ et $x^y = y^x$. On écrit $x + y = r/s$ sous forme irréductible, avec r et s entiers positifs. Calculer $r + s$.

Étape 1 • Une seule variable, puis un exposant commun

Remplacer y par $3x/4$. Comme $x > 0$, élever les deux membres à la puissance $4/x$ conserve l'égalité et élimine les exposants qui dépendent de x .

$$x^{3x/4} = \left(\frac{3x}{4}\right)^x \implies x^3 = \left(\frac{3x}{4}\right)^4$$

Étape 2 • Isoler x sans logarithme

Développer la puissance quatrième, puis diviser par x^3 , qui est strictement positif. La simplification est légitime ; elle ne supprime aucune solution admissible.

$$x^3 = \frac{81}{256}x^4 \implies x = \frac{256}{81}, \quad y = \frac{64}{27}$$

Étape 3 • Réduire la somme

$$x + y = \frac{256}{81} + \frac{192}{81} = \frac{448}{81}$$

Le dénominateur est une puissance de 3. Or $4 + 4 + 8 = 16$, donc 448 n'est pas divisible par 3. La fraction est irréductible.

RÉSULTAT

$$r + s = 448 + 81 = 529$$

AUTRE MÉTHODE

Prendre le logarithme donne $(3x/4) \ln x = x[\ln(3/4) + \ln x]$. Après simplification par x , on obtient $\ln x = 4 \ln(4/3)$, puis le même résultat. La méthode par les puissances est ici plus directe.

À RETENIR

Si $y = kx$ avec $k > 0$ et $k \neq 1$, la même idée conduit à $x^{k-1} = k$, puis $x = k^{1/(k-1)}$. Toujours vérifier les conditions sur les bases.

PROBLÈME 02 • ARITHMÉTIQUE ET PROBABILITÉS

Diviseurs au hasard

Idée clé : séparer les carrés parfaits des autres diviseurs.

ÉNONCÉ

On choisit uniformément deux diviseurs positifs distincts de 2010^2 . La probabilité qu’exactement l’un des deux soit un carré parfait est m/n , fraction irréductible. Calculer $m + n$.

Étape 1 • Factoriser le nombre

$$2010 = 2 \times 3 \times 5 \times 67, \qquad 2010^2 = 2^2 3^2 5^2 67^2$$

Chaque diviseur s’écrit $2^a 3^b 5^c 67^d$, avec a, b, c et d dans $\{0, 1, 2\}$. Il y a donc trois choix pour chacun des quatre exposants.

Catégorie	Choix par exposant	Nombre
Tous les diviseurs	0, 1 ou 2	$3^4 = 81$
Carrés parfaits	0 ou 2	$2^4 = 16$
Non-carrés	Par différence	$81 - 16 = 65$

Étape 2 • Compter les paires favorables

Une paire favorable est déterminée par le choix d’un carré parmi 16 et d’un non-carré parmi 65 : il y en a 16×65 . Le nombre total de paires de diviseurs distincts est $81 \times 80/2$.

$$p = \frac{16 \times 65}{\binom{81}{2}} = \frac{1040}{3240} = \frac{26}{81}$$

RÉSULTAT

$$m + n = 26 + 81 = 107$$

VÉRIFICATION PAR UN TIRAGE ORDONNÉ

Carré puis non-carré : $(16/81)(65/80)$. Non-carré puis carré : $(65/81)(16/80)$. En additionnant les deux cas, on retrouve $26/81$.

PIÈGE

« Exactement un carré » exclut le cas où les deux diviseurs sont des carrés. Et le deuxième tirage se fait parmi 80 diviseurs : les deux choix doivent être distincts.

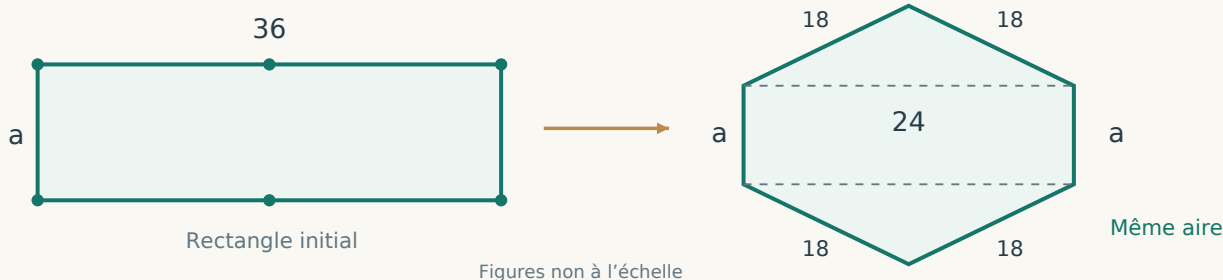
PROBLÈME 03 • GÉOMÉTRIE

Un cadre articulé

Idée clé : décomposer un hexagone en un rectangle et deux triangles.

ÉNONCÉ RECONSTITUÉ

Un cadre rectangulaire de côtés a et 36 est articulé aux quatre sommets et aux milieux des côtés de longueur 36 . On rapproche les côtés de longueur a , qui restent parallèles, pour former l'hexagone convexe symétrique ci-dessous. Leur distance devient 24 . On impose que l'hexagone et le rectangle initial aient la même aire. Calculer a^2 .



Étape 1 • Trouver la hauteur d'un triangle

Chacun des deux triangles ajoutés au rectangle central a pour côtés 18 , 18 et 24 . Sa hauteur coupe la base en deux segments de longueur 12 . Le théorème de Pythagore donne :

$$h = \sqrt{18^2 - 12^2} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}, \quad \mathcal{A}_{\triangle} = \frac{24h}{2} = 72\sqrt{5}$$

Étape 2 • Traduire la condition sur les aires

$$36a = 24a + 2 \times 72\sqrt{5} \implies a = 12\sqrt{5}$$

RÉSULTAT

$$a^2 = 144 \times 5 = \mathbf{720}$$

PIÈGE CORRIGÉ

Un cadre articulé conserve les longueurs de ses barres, mais ne conserve pas automatiquement l'aire enfermée. Ici, l'égalité des aires est une **hypothèse nécessaire à la reconstruction de l'énoncé**, et non une conséquence de l'articulation.

Autre calcul possible : la formule de Héron, avec $s = (18 + 18 + 24)/2 = 30$, donne $\sqrt{(30 \times 12 \times 12 \times 6)} = 72\sqrt{5}$. Le demi-périmètre se calcule en divisant par 2, jamais par 3.

PROBLÈME 04 • LOGARITHMES ET DIVISIBILITÉ

Défaire les logarithmes

Idée clé : résoudre de l'extérieur vers l'intérieur.

Énoncé reconstitué. Trouver les couples d'entiers strictement positifs (a, b) satisfaisant l'équation ci-dessous, puis sommer les valeurs de a + b obtenues. La notation imbriquée est rétablie à partir des équivalences présentes dans la transcription.

$$\log_2(\log_{2^a}(\log_{2^b}(2^{1000}))) = 0$$

Étape 1 • Retirer les deux logarithmes extérieurs

Un logarithme de base 2 vaut 0 si et seulement si son argument vaut 1. Le logarithme de base 2^a vaut alors 1 ; son propre argument doit donc être 2^a .

$$\log_{2^a}(\log_{2^b}(2^{1000})) = 1 \implies \log_{2^b}(2^{1000}) = 2^a$$

Étape 2 • Transformer l'équation en divisibilité

$$\frac{1000}{b} = 2^a \iff b 2^a = 1000 = 2^3 \times 5^3$$

Comme b doit être entier, 2^a doit diviser 1000. La puissance maximale de 2 dans 1000 est 2^3 , et a est strictement positif : les seules valeurs possibles sont 1, 2 et 3.

a	b = 1000 / 2 ^a	a + b
1	500	501
2	250	252
3	125	128

RÉSULTAT

$$501 + 252 + 128 = 881$$

VÉRIFIER LE DOMAINE

Pour chacun des trois couples, les bases 2^a et 2^b sont supérieures à 1. Le logarithme intérieur vaut $2^a > 0$ et le logarithme suivant vaut $1 > 0$: tous les logarithmes sont définis.

PROBLÈME 05 • PROBABILITÉS

Une pièce déséquilibrée

Idée clé : déterminer une loi complète, puis la comparer à elle-même.

ÉNONCÉ

Deux joueurs lancent chacun trois pièces : deux pièces équilibrées et une troisième qui donne pile avec probabilité $\frac{4}{7}$. Tous les lancers sont indépendants. La probabilité que les deux joueurs obtiennent le même nombre de piles est $\frac{m}{n}$, sous forme irréductible. Calculer $m + n$.

Étape 1 • Répartir les résultats d'un seul joueur

Notons X le nombre de piles. Pour la pièce déséquilibrée, $P(\text{pile}) = \frac{4}{7}$ et $P(\text{face}) = \frac{3}{7}$. Pour les deux pièces équilibrées, chaque configuration a une probabilité $\frac{1}{4}$. Regroupons les cas selon le nombre total de piles.

k	Calcul de $P(X = k)$	$P(X = k)$
0	$(\frac{1}{4}) \times (\frac{3}{7})$	$\frac{3}{28}$
1	$(\frac{2}{4}) \times (\frac{3}{7}) + (\frac{1}{4}) \times (\frac{4}{7})$	$\frac{10}{28}$
2	$(\frac{1}{4}) \times (\frac{3}{7}) + (\frac{2}{4}) \times (\frac{4}{7})$	$\frac{11}{28}$
3	$(\frac{1}{4}) \times (\frac{4}{7})$	$\frac{4}{28}$

Contrôle indispensable : $(3 + 10 + 11 + 4)/28 = 1$. Les probabilités associées à un et à deux piles sont différentes, car la troisième pièce n'est pas équilibrée.

Étape 2 • Faire coïncider les deux nombres de piles

Si Y désigne le résultat du second joueur, les événements $X = k$ et $Y = k$ sont indépendants. Les quatre cas d'égalité sont incompatibles : on additionne donc leurs probabilités.

$$P(X = Y) = \frac{3^2 + 10^2 + 11^2 + 4^2}{28^2} = \frac{246}{784} = \frac{123}{392}$$

RÉSULTAT

$$m + n = 123 + 392 = 515$$

PIÈGE

Les huit configurations de trois pièces ne sont pas équiprobables. On ne peut pas compter les configurations favorables et diviser simplement par 8.

PROBLÈME 06 • SUITES

Une récurrence bien cachée

Idée clé : remplacer les termes par leurs quotients consécutifs.

Énoncé. On définit $a_0 = a_1 = 1$, $b_0 = 1$ et $b_1 = 3$. Pour $n \geq 2$, les suites vérifient les relations suivantes. Calculer b_{32}/a_{32} .

$$a_n = a_{n-1} + \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-2}}, \quad b_n = b_{n-1} + \frac{b_{n-1}^2}{b_{n-2}}$$

Étape 1 • Passer aux quotients

Tous les termes sont positifs, par récurrence à partir des valeurs initiales. Les quotients $r_n = a_n/a_{n-1}$ et $s_n = b_n/b_{n-1}$ sont donc définis pour $n \geq 1$.

$$r_n = 1 + r_{n-1}, \quad r_1 = 1; \quad s_n = 1 + s_{n-1}, \quad s_1 = 3$$

Ainsi $r_n = n$ et $s_n = n + 2$. Le quotient consécutif progresse de 1 à chaque étape : la relation non linéaire s'est transformée en une suite arithmétique.

Étape 2 • Reconstituer les termes par un produit

$$a_n = n!, \quad b_n = 3 \times 4 \times \cdots \times (n+2) = \frac{(n+2)!}{2}$$

Les formules donnent bien $a_0 = 1$ et $b_0 = 1$. Elles n'exigent aucun calcul d'un grand terme : seuls quelques facteurs vont rester dans le quotient demandé.

$$\frac{b_{32}}{a_{32}} = \frac{34!}{2 \times 32!} = \frac{34 \times 33}{2}$$

RÉSULTAT

$$\frac{b_{32}}{a_{32}} = 561$$

RÉFLEXE À RETENIR

La présence de u_{n-1} et de u_{n-1}^2/u_{n-2} invite à diviser par u_{n-1} . Ne définir le quotient qu'à partir de l'indice 1 : u_{-1} n'est pas donné.

PROBLÈME 07 • ARITHMÉTIQUE

Décimales périodiques

Idée clé : coder un bloc de chiffres par un seul entier.

Énoncé. Les chiffres a , b et c , qui peuvent être égaux, vérifient l'égalité ci-dessous. Déterminer a , b et c , puis l'entier à trois chiffres qu'ils forment.

$$0,\overline{ab} + 0,\overline{abc} = \frac{33}{37}$$

Étape 1 • Poser $X = 10a + b$

Le bloc abc représente alors $10X + c$. Les deux développements périodiques donnent des fractions de dénominateurs 99 et 999. Leur plus petit dénominateur commun est $10\,989 = 99 \times 111 = 999 \times 11$.

$$\frac{X}{99} + \frac{10X+c}{999} = \frac{33}{37} \implies 221X + 11c = 9801$$

Étape 2 • Un petit modulo évite un grand calcul

L'égalité donne $X \equiv 0$ modulo 11, car $221 \equiv 1$ modulo 11 et 9801 est divisible par 11. Or $0 \leq X \leq 99$, donc $X = 11t$ pour un entier t compris entre 0 et 9.

$$221t + c = 891, \quad 0 \leq c \leq 9$$

Si $t \leq 3$, le membre de gauche est au plus 672 ; si $t \geq 5$, il est au moins 1105. Donc $t = 4$, puis $c = 891 - 884 = 7$. Ainsi $X = 44$: $a = b = 4$.

RÉSULTAT

$$(a, b, c) = (4, 4, 7) \quad \mathbf{447}$$

Vérification exacte

$$\frac{44}{99} + \frac{447}{999} = \frac{148}{333} + \frac{149}{333} = \frac{297}{333} = \frac{33}{37}$$

ASTUCE

Le bloc $10a + b$ apparaît deux fois. Le remplacer par X réduit une équation à trois chiffres inconnus à une équation à deux inconnues, avec des bornes très serrées.

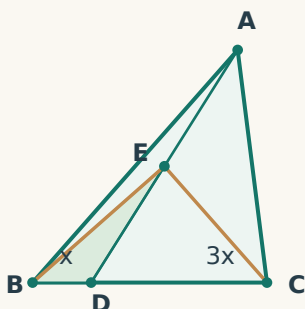
PROBLÈME 08 • GÉOMÉTRIE • 1/2

Une petite aire suffit

Idée clé : utiliser les rapports d'aires avant de chercher les longueurs.

ÉNONCÉ RECONSTITUÉ

Dans un triangle ABC tel que $AC = BC$, le point D appartient à $[BC]$ et vérifie $CD = 3BD$. Le point E est le milieu de $[AD]$. On donne $BE = 3$ et $CE = \sqrt{7}$. L'aire de ABC s'écrit m/n , avec m et n entiers positifs et n sans facteur carré supérieur à 1. Calculer $m + n$.



$$AC = BC = 4x$$

$$AE = ED = t$$

$$BE = 3 ; CE = \sqrt{7}$$

La zone colorée est le triangle BED.

PRÉCISION DE TRANSCRIPTION

Le radical de CE n'est pas transcrit explicitement. La valeur **CE = $\sqrt{7}$** est rétablie à partir des équations du fichier, qui utilisent $CE^2 = 7$, et du résultat annoncé. Avec $CE = 7$, les calculs seraient différents.

1. Relier la grande aire à la petite

Les triangles ABD et ACD ont la même hauteur issue de A. Le rapport de leurs aires est donc $BD/CD = 1/3$: l'aire de ABC vaut quatre fois celle de ABD. Comme E est le milieu de AD, les triangles ABE et EBD ont la même aire.

$$[ABC] = 4[ABD] = 8[BED]$$

2. Préparer les deux relations métriques

Pour les calculs des longueurs, poser $BD = x$, $CD = 3x$ et $AE = ED = t$. La lettre t évite de confondre la demi-longueur AD avec le coefficient m demandé dans l'aire finale. On a donc $AC = BC = 4x$.

L'OUTIL DU MILIEU

Dans un triangle UVW, si M est le milieu de $[UV]$, le théorème de la médiane donne $WU^2 + WV^2 = 2WM^2 + UV^2/2$. Il s'obtient en plaçant U et V de part et d'autre de leur milieu et en additionnant deux identités de Pythagore.

PROBLÈME 08 • GÉOMÉTRIE • 2/2

Des longueurs à l'aire

Une médiane, une cévienne, puis la formule de Héron.

Étape 1 • La médiane CE dans le triangle ACD

$$(4x)^2 + (3x)^2 = 2(\sqrt{7})^2 + 2t^2 \implies 25x^2 = 14 + 2t^2$$

Étape 2 • La cévienne ED dans le triangle BEC

Pour un point D sur BC, le théorème de Stewart s'écrit $EC^2 \cdot BD + EB^2 \cdot DC = BC(ED^2 + BD \cdot DC)$. La correspondance des côtés doit être respectée : le carré de EC multiplie BD, et celui de EB multiplie DC.

$$7x + 9(3x) = 4x(t^2 + 3x^2) \implies 2t^2 + 6x^2 = 17$$

Remplacer $2t^2$ par $25x^2 - 14$. On obtient $31x^2 = 31$, donc $x = 1$ puisque x est une longueur. Puis $2t^2 = 11$, d'où $t = \sqrt{11/2}$.

Étape 3 • L'aire du triangle BED

Ses trois côtés sont 1, 3 et $t = \sqrt{11/2}$. Son demi-périmètre est $s = 2 + t/2$. Dans la formule de Héron, regrouper les facteurs par paires conjuguées évite de développer des racines.

$$[BED]^2 = (2 + t/2)(2 - t/2)(1 + t/2)(t/2 - 1)$$

$$[BED]^2 = \left(4 - \frac{11}{8}\right) \left(\frac{11}{8} - 1\right) = \frac{63}{64}$$

$$[ABC] = 8[BED] = 8 \times \frac{3\sqrt{7}}{8} = 3\sqrt{7}$$

RÉSULTAT

$$m + n = 3 + 7 = 10$$

POURQUOI CETTE STRATÉGIE EST EFFICACE

On ne calcule ni AB ni la hauteur de ABC. Les rapports d'aires ramènent d'abord la question à BED, puis deux relations métriques suffisent pour connaître ses trois côtés.

PROBLÈME 09 • POLYNÔMES ET ARITHMÉTIQUE

Très peu de données, beaucoup de force

Idée clé : un polynôme entier impose des divisibilités.

ÉNONCÉ

Un polynôme P à coefficients entiers vérifie $P(17) = 10$ et $P(24) = 17$. L'équation $P(n) = n + 3$ possède deux solutions entières distinctes n_1 et n_2 . Calculer leur produit.

Étape 1 • Une propriété à démontrer

Pour tous entiers $u \neq v$, $u - v$ divise $P(u) - P(v)$. En effet, chaque différence $u^k - v^k$ est divisible par $u - v$; une combinaison de ces différences à coefficients entiers garde cette propriété.

$$u^k - v^k = (u - v)(u^{k-1} + u^{k-2}v + \dots + v^{k-1})$$

Étape 2 • Appliquer la propriété à une solution n

Les valeurs 17 et 24 ne sont pas solutions de $P(n) = n + 3$. Pour toute autre solution entière, on a $n - 17 \mid n - 7$ et $n - 24 \mid n - 14$. En retranchant respectivement $n - 17$ et $n - 24$, il reste :

$$n - 17 \mid 10, \quad n - 24 \mid 10$$

Étape 3 • Deux diviseurs séparés de 7

Les deux nombres $n - 17$ et $n - 24$ sont des diviseurs entiers non nuls de 10, et leur différence vaut 7. Dans $\{-10, -5, -2, -1, 1, 2, 5, 10\}$, les seuls couples ordonnés de différence 7 sont $(2, -5)$ et $(5, -2)$.

$$n \in \{19, 22\}$$

L'énoncé garantit deux solutions distinctes. Elles sont donc nécessairement 19 et 22, dans un ordre quelconque.

RÉSULTAT

$$n_1 n_2 = 19 \times 22 = 418$$

PIÈGE CORRIGÉ

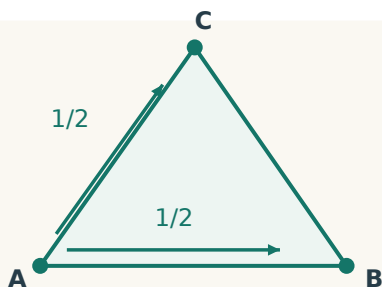
On ne connaît pas le degré de P . Le fait que $Q(17) = Q(24) = 0$ permet d'écrire $Q(X) = (X - 17)(X - 24)R(X)$, avec R un polynôme entier ; rien ne permet de remplacer R par une constante. La preuve par les différences fonctionne à tout degré.

PROBLÈME 10 • PROBABILITÉS ET SUITES

Marcher sur un triangle

Idée clé : distinguer « au point de départ » et « ailleurs ».

Énoncé. Un insecte part du sommet A d'un triangle. À chaque étape, il choisit l'un des deux autres sommets avec probabilité $1/2$ et s'y déplace. La probabilité d'être en A après dix déplacements s'écrit m/n sous forme irréductible. Calculer $m + n$. Des retours intermédiaires sont autorisés.



À chaque déplacement

Deux destinations possibles.

Chacune a la probabilité $1/2$.

Le sommet occupé doit être quitté.

Étape 1 • Écrire la récurrence

Notons p_k la probabilité d'être en A après k étapes. S'il est déjà en A, l'insecte doit quitter A. Sinon, il y revient au prochain déplacement avec probabilité $1/2$. Ainsi :

$$p_0 = 1, \quad p_{k+1} = \frac{1-p_k}{2}$$

Étape 2 • Centrer autour du point fixe

Le nombre $1/3$ vérifie $L = (1-L)/2$. Posons $u_k = p_k - 1/3$. La suite u est géométrique de raison $-1/2$ et son premier terme vaut $2/3$.

$$u_{k+1} = -\frac{1}{2}u_k \implies p_k = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^k$$

$$p_{10} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3 \times 1024} = \frac{171}{512}$$

RÉSULTAT

$$m + n = 171 + 512 = \mathbf{683}$$

CONTRÔLE PAR LES PREMIERS TERMES

On obtient $p_1 = 0$, $p_2 = 1/2$, $p_3 = 1/4$, $p_4 = 3/8$. Ces valeurs vérifient la formule. La probabilité oscille autour de $1/3$; elle n'est pas exactement $1/3$ à chaque étape.

SYNTHÈSE

La carte des dix stratégies

Repérer le signal, choisir l'outil, puis vérifier.

01 Puissances croisées

Deux variables liées par un rapport → remplacer l'une, puis supprimer l'exposant commun.

02 Diviseurs et carrés

Factorisation première → choix des exposants ; un carré exige des exposants pairs.

03 Figure articulée

Dessiner la figure finale → rectangle central + deux triangles ; écrire la condition d'aire.

04 Logarithmes imbriqués

Partir de l'extérieur → convertir chaque logarithme en puissance, puis utiliser la divisibilité.

05 Même résultat aléatoire

Calculer toute la loi q_k → additionner les q_{k^2} pour deux essais indépendants.

06 Récurrence non linéaire

Présence de termes consécutifs au quotient → essayer u_n/u_{n-1} ; retrouver un produit.

07 Chiffres répétés

Convertir les décimales en fractions → coder le bloc commun par X et utiliser un modulo.

08 Aire d'un triangle

Comparer les bases et les hauteurs → viser un petit triangle dont les côtés sont accessibles.

09 Polynôme entier

Deux valeurs numériques connues → employer $u - v \mid P(u) - P(v)$.

10 Marche aléatoire

Regrouper les positions par état → écrire une récurrence et chercher son point fixe.

LES TROIS QUESTIONS DE CONTRÔLE

Ai-je utilisé toutes les hypothèses ? Ai-je justifié les divisions, domaines et exclusions ? Puis-je vérifier le résultat par substitution, une borne ou un second raisonnement ?

ATELIER • À CHERCHER SANS LE CORRIGÉ

Huit applications nouvelles

Réinvestir les méthodes sur des données différentes.

A1 • Puissances

x et y sont strictement positifs, $y = 2x/3$ et $x^y = y^x$. Écrire $x + y = r/s$ sous forme irréductible et calculer $r + s$.

A2 • Diviseurs

On choisit deux diviseurs positifs distincts de 42^2 , uniformément. Calculer la probabilité qu'exactement l'un d'eux soit un carré parfait.

A3 • Cadre articulé

Reprendre la configuration symétrique du problème 3 avec des côtés initiaux a et 28, puis une distance de 20 entre les deux côtés parallèles de longueur a . Les aires initiale et finale sont imposées égales. Calculer a^2 .

A4 • Logarithmes

Reprendre l'équation du problème 4 en remplaçant 1000 par 96. Déterminer tous les couples d'entiers strictement positifs (a, b) , puis la somme des $a + b$.

A5 • Pièces

Deux joueurs lancent indépendamment les mêmes trois types de pièces : deux équilibrées et une donnant pile avec probabilité $1/3$. Quelle est la probabilité d'obtenir le même nombre de piles ?

A6 • Suite

On pose $c_0 = 1$, $c_1 = 2$ et $c_n = c_{n-1} + c_{n-1}^2/c_{n-2}$ pour $n \geq 2$. Calculer $c_{10}/10!$.

A7 • Décimales

Des chiffres a, b et c vérifient $0,\mathbf{ab}ab\dots + 0,\mathbf{abc}abc\dots = 446/999$. Les blocs ab et abc se répètent indéfiniment. Déterminer l'entier de chiffres a, b, c .

A8 • Retour

Pour la marche du problème 10, calculer la probabilité d'être en A après six étapes. Calculer ensuite la probabilité de revenir en A pour la première fois à la sixième étape. Expliquer la différence.

AUTO-ÉVALUATION

Pour chaque application, noter séparément : idée trouvée / démonstration complète / calcul exact. Une bonne intuition sans justification n'est pas encore une solution achevée.

ATELIER • CORRIGÉS

Vérifier, puis expliquer

Les résultats sont accompagnés de l'étape décisive.

A1 • Résultat : 53

En élevant à la puissance $3/x$: $x^2 = (2x/3)^3$. Donc $x = 27/8$, $y = 9/4$ et $x + y = 45/8$. La fraction est irréductible ; $45 + 8 = \mathbf{53}$.

A2 • Probabilité : 152/351

$42^2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2$ possède 27 diviseurs, dont 8 carrés et 19 non-carrés. La probabilité vaut $8 \times 19 / [27 \times 26/2] = \mathbf{152/351}$.

A3 • Résultat : 600

Chaque triangle a pour côtés 14, 14 et 20. Sa hauteur vaut $\sqrt{(14^2 - 10^2)} = 4\sqrt{6}$ et son aire $40\sqrt{6}$. L'égalité $28a = 20a + 80\sqrt{6}$ donne $a = 10\sqrt{6}$, donc $\mathbf{a^2 = 600}$.

A4 • Somme : 108

L'équation devient $b \cdot 2^a = 96 = 2^5 \cdot 3$. Les couples sont (1,48), (2,24), (3,12), (4,6) et (5,3). Les sommes valent 49, 26, 15, 10 et 8, soit $\mathbf{108}$ au total.

A5 • Probabilité : 23/72

La loi du nombre de piles est $(2, 5, 4, 1)/12$ pour $k = 0, 1, 2, 3$. La probabilité d'égalité vaut $(2^2 + 5^2 + 4^2 + 1^2)/12^2 = 46/144 = \mathbf{23/72}$.

A6 • Résultat : 11

Le quotient c_n/c_{n-1} vaut $n + 1$, car son premier terme vaut 2 et qu'il augmente de 1. Ainsi $c_n = (n + 1)!$, puis $c_{10}/10! = \mathbf{11}$.

A7 • Nombre : 224

Avec $X = 10a + b$, on obtient $221X + 11c = 4906$. Modulo 11, X est multiple de 11 : $X = 11t$. Alors $221t + c = 446$. Comme $0 \leq c \leq 9$, $t = 2$ et $c = 4$; donc $X = 22$ et le nombre est $\mathbf{224}$.

A8 • Deux probabilités différentes

La formule du problème 10 donne $p_6 = \mathbf{11/32}$. Pour un premier retour à l'étape 6, le premier départ est libre ; aux étapes 2 à 5, il faut éviter A, puis y revenir à l'étape 6. Chacune de ces cinq décisions a probabilité $1/2$: $\mathbf{1/32}$.