

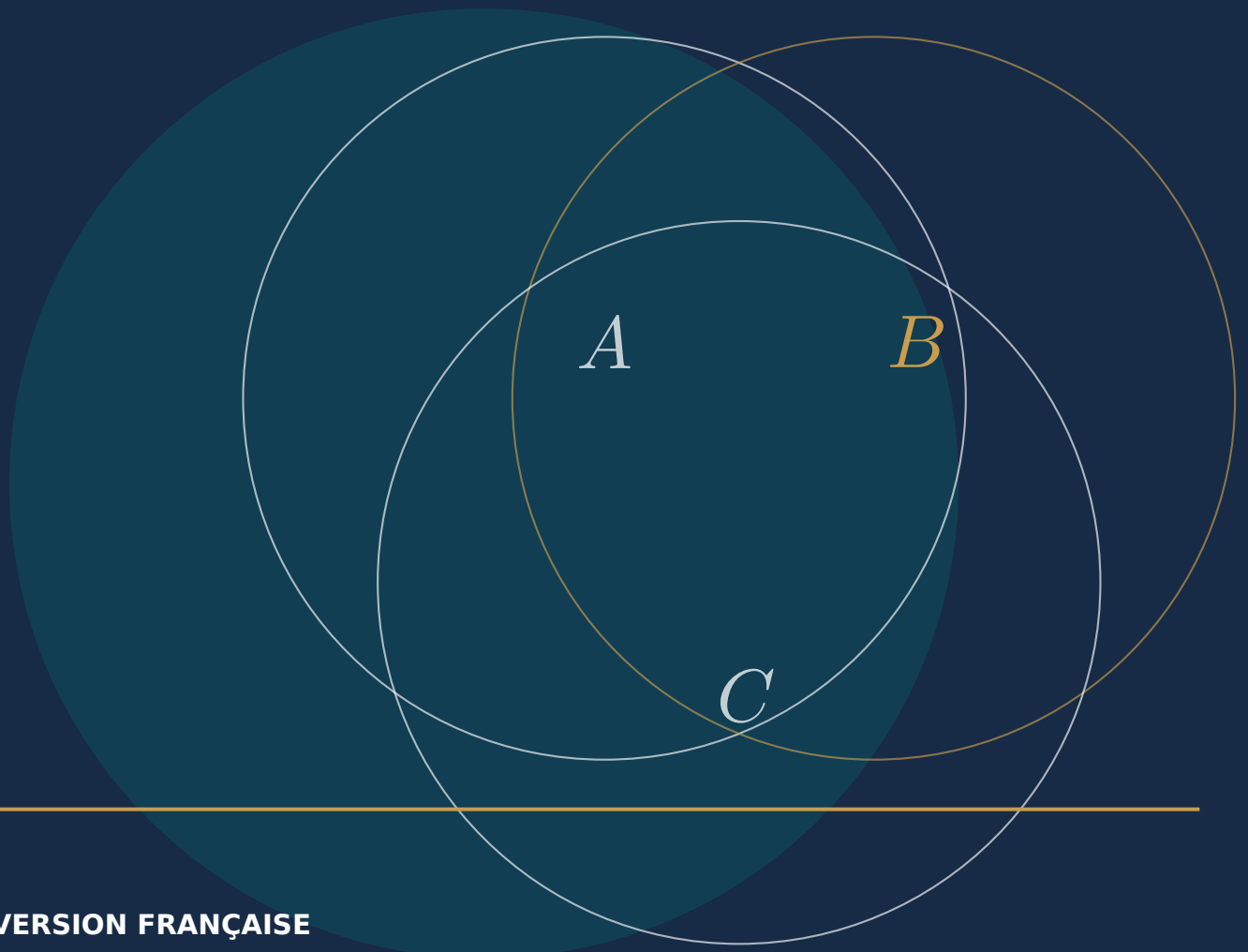
MATHS OLYMPIAD

COLLECTION MATHÉMATIQUES

Ensembles & relations

120 problèmes résolus

Énoncés • Réponses • Corrigés commentés



VERSION FRANÇAISE

85 QCM | 35 questions numériques

LE LIVRET

Comprendre. Chercher. Résoudre.

Ce livret rassemble les **120 problèmes du document fourni**, avec leurs données, leur numérotation et leurs choix de réponses. La présentation française comprend des repères, deux grilles de réponses et un corrigé commenté pour chaque question.

	Repères essentiels	3
01		
02	Questions à choix multiple 1 à 85	5
03	Questions numériques 86 à 120	21
04	Grilles de réponses	27
05	Corrigés commentés 1 à 120	29

CONVENTIONS

Dans ce livret, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, conformément aux problèmes. L'ensemble $\mathbb{N} \cup \{0\}$ comprend aussi zéro. $\text{Card}(E)$ désigne le cardinal de E , et $P(E)$ l'ensemble de ses parties. Le signe $\setminus$ désigne une différence d'ensembles. Les couples sont ordonnés.

Pour progresser. Chercher d'abord sans consulter la réponse, puis rédiger une justification. Le lien « Corrigé » mène à l'explication ; le lien « Énoncé » permet de revenir au problème.

01 / LES OUTILS

Repères essentiels

Lire les ensembles, reconnaître une relation, choisir une méthode.

ENSEMBLES : LE VOCABULAIRE

$A \cap B$ contient les éléments communs ; $A \cup B$, ceux qui appartiennent à au moins un ensemble ; $A \setminus B$, ceux de A qui ne sont pas dans B . Dans un univers E fixé, $A^c = E \setminus A$. Vérifier les bornes : $[a, b]$ contient ses extrémités, tandis que $]a, b[$ les exclut.

RELATIONS : LES TROIS TESTS

Réflexivité xRx , pour tout x de l'ensemble de référence.

Symétrie $xRy \implies yRx$.

Transitivité xRy et $yRz \implies xRz$.

Un seul contre-exemple réfute une propriété. Une preuve doit traiter tous les éléments.

ÉQUIVALENCE : RAISONNER PAR CLASSES

Une équivalence est réflexive, symétrique et transitive. Ses classes constituent une partition : elles sont non vides, disjointes deux à deux et couvrent tout l'ensemble. Si leurs tailles sont $n_1, \dots, n_k$, alors

$$\text{Card}(R) = n_1^2 + \dots + n_k^2.$$

Pour compléter une relation en équivalence, regrouper les éléments reliés, puis compléter tous les couples de chaque bloc.

COMPLÉTER UNE RELATION

Réflexivité : ajouter les diagonales manquantes.

Symétrie : ajouter les réciproques manquants.

Transitivité : ajouter les liens imposés par les chemins, puis recommencer jusqu'à stabilité.

Les réflexes de dénombrement

1. INCLUSION-EXCLUSION

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B).$$

Pour trois ensembles, additionner les cardinaux, soustraire les trois intersections deux à deux, puis ajouter l'intersection triple. Les intersections deux à deux comprennent les éléments présents dans les trois ensembles.

2. COMPTER DES PARTIES ET DES RELATIONS

Un ensemble de n éléments possède 2^n parties. Si $\text{Card}(A) = p$ et $\text{Card}(B) = q$, alors

$$\text{Card}(A \times B) = pq, \quad \#\{\text{relations de } A \text{ vers } B\} = 2^{pq}.$$

Sur n éléments, le nombre de relations à la fois réflexives et symétriques vaut

$$2^{n(n-1)/2}.$$

Chaque paire de points distincts donne un choix binaire ; les diagonales sont imposées.

3. RECONNAÎTRE UNE ÉGALITÉ CACHÉE

Chercher à écrire xRy sous la forme $f(x) = f(y)$, ou sous la forme d'une congruence. Par exemple,

$$a + d = b + c \iff a - b = c - d.$$

Vérifier le domaine avant de diviser : un élément nul peut changer les propriétés de la relation.

4. COMPTER AUTREMENT

Par valeurs : si deux expressions sont égales, compter leurs occurrences de chaque côté, multiplier ces effectifs, puis additionner.

Par complément : pour « au moins un », compter le total moins « aucun ».

Par double comptage : compter les mêmes appartenances de deux façons.

02 / S'ENTRAÎNER

Questions à choix multiple

85 problèmes. Une seule réponse correcte par question.

PROBLÈME 001[Corrigé →](#)

Sur $E = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, on définit R par $(a, b) \in R$ si et seulement si $1 + ab > 0$.

I. La relation R contient 17 couples.

II. R est une relation d'équivalence. Quelle proposition est vraie ?

- A.** Seule I est vraie. **B.** Seule II est vraie.
C. I et II sont vraies. **D.** Ni I ni II n'est vraie.

PROBLÈME 002[Corrigé →](#)

Sur $E = \{1, 2, 3, 4\} \times \{1, 2, 3, 4\}$, on définit

$$R = \{((a, b), (c, d)) \in E \times E : 2a + 3b = 3c + 4d\}.$$

Combien R contient-elle de couples ?

- A.** 6 **B.** 15 **C.** 12 **D.** 18

PROBLÈME 003[Corrigé →](#)

Soit $A = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. On pose xRy si et seulement si $|x - y|$ est un multiple de 3.

I. $\text{Card}(R) = 36$.

II. R est une relation d'équivalence. Choisir la proposition correcte.

- A.** I est vraie et II est fausse. **B.** I et II sont vraies.
C. I et II sont fausses. **D.** I est fausse et II est vraie.

PROBLÈME 004[Corrigé →](#)

Soit $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$. On définit xRy par $2x + y \leq 2$. Soit $\ell = \text{Card}(R)$. On note m et n les nombres minimaux de couples à ajouter à R pour la rendre, respectivement, réflexive et symétrique, ces deux opérations étant considérées séparément. Calculer $\ell + m + n$.

- A.** 34 **B.** 32 **C.** 33 **D.** 35

PROBLÈME 005

Corrigé →

Combien la relation $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : 4x^2 + y^2 < 52\}$ contient-elle de couples ?

- A. 86 B. 67 C. 89 D. 77

PROBLÈME 006

Corrigé →

Sur $M = \{1, 2, 3, \dots, 16\}$, on considère $R = \{(x, y) \in M^2 : 4y = 5x - 3\}$. Quel est le nombre minimal de couples à ajouter à R pour la rendre symétrique ?

- A. 4 B. 3 C. 1 D. 2

PROBLÈME 007

Corrigé →

Soient $A = \{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 10| \leq 6\}$ et $B = \{x \in \mathbb{R} : |x - 2| > 1\}$. Quelle égalité est vraie ?

- A. $A \cup B =]-\infty, 1] \cup]2, +\infty[$ B. $B \setminus A =]-\infty, -4[\cup]-2, 1[\cup]4, +\infty[$
C. $A \setminus B = [2, 3[$ D. $A \cap B = [-4, -2] \cup [3, 4]$

PROBLÈME 008

Corrigé →

Soit $A = \{2, 3, 5, 7, 9\}$. On définit xRy par $2x \leq 3y$. Soient $\ell = \text{Card}(R)$ et m le nombre minimal de couples à ajouter à R pour la rendre symétrique. Calculer $\ell + m$.

- A. 21 B. 25 C. 23 D. 27

PROBLÈME 009

Corrigé →

Combien de relations sur $\{a, b, c, d\}$ sont à la fois réflexives et symétriques ?

- A. 16 B. 64 C. 256 D. 1 024

PROBLÈME 010

Corrigé →

Sur $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, on pose $(x, y) \in R$ si et seulement si $\max(x, y) \in \{3, 4\}$.

$S_1 : R$ contient 18 couples.

$S_2 : R$ est symétrique, mais ni réflexive ni transitive. Quelle proposition est vraie ?

- A. S_1 et S_2 sont fausses. B. Seule S_1 est vraie.
C. Seule S_2 est vraie. D. S_1 et S_2 sont vraies.

PROBLÈME 011[Corrigé →](#)

On considère les ensembles

$$A = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : |\alpha - 1| \leq 4 \text{ et } |\beta - 5| \leq 6\},$$

$$B = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : 16(\alpha - 2)^2 + 9(\beta - 6)^2 \leq 144\}.$$

Quelle proposition est vraie ?

A. $A \subset B$ **B.** $B \subset A$ **C.** Ni $A \subset B$ ni $B \subset A$ **D.** $A \cup B = \{(x, y) : -4 \leq x \leq 4, -1 \leq y \leq 11\}$ **PROBLÈME 012**[Corrigé →](#)

Soit $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. On pose xRy si et seulement si $2x - y \in \{0, 1\}$. Soit $\ell = \text{Card}(R)$. On note m et n les nombres minimaux de couples à ajouter à R pour la rendre, séparément, réflexive et symétrique. Calculer $\ell + m + n$.

A. 17**B.** 18**C.** 15**D.** 16**PROBLÈME 013**[Corrigé →](#)

Soient

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 25\},$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 9y^2 = 144\},$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\} \text{ et } D = A \cap B.$$

Combien existe-t-il d'applications injectives de D dans C ?

A. 15 120**B.** 18 290**C.** 17 160**D.** 19 320**PROBLÈME 014**[Corrigé →](#)

Sur $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, on définit xRy par $y = \max(x, 1)$. Soit $\ell = \text{Card}(R)$. On note m et n les nombres minimaux de couples à ajouter à R pour la rendre, séparément, réflexive et symétrique. Calculer $\ell + m + n$.

A. 11**B.** 12**C.** 14**D.** 13**PROBLÈME 015**[Corrigé →](#)

Soit $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. On définit xRy par $0 \leq x^2 + 2y \leq 4$. Soient $\ell = \text{Card}(R)$ et m le nombre minimal de couples à ajouter pour rendre R réflexive. Calculer $\ell + m$.

A. 18**B.** 20**C.** 17**D.** 19

PROBLÈME 016

Corrigé →

Sur $A = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$, on définit $R = \{(a, b) \in A^2 : a = 2b + 1\}$. On cherche une suite de couples de R de la forme $(a_1, a_2), (a_2, a_3), \dots, (a_k, a_{k+1})$. Quelle est la plus grande valeur possible de l'entier k ?

- A.** 6 **B.** 8 **C.** 7 **D.** 5

PROBLÈME 017

Corrigé →

Soit A l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$. On définit R par $fRg \iff f(0) = g(1)$ et $f(1) = g(0)$. La relation R est :

- A.** symétrique et transitive, mais non réflexive ; **B.** symétrique, mais ni réflexive ni transitive ;
C. transitive, mais ni réflexive ni symétrique ; **D.** réflexive, mais ni symétrique ni transitive.

PROBLÈME 018

Corrigé →

Soit $S = \mathbb{N} \cup \{0\}$. On définit une relation de S vers $\mathbb{R}$ par

$$R = \{(x, y) \in S \times \mathbb{R} : \ln(y) = x \ln(\frac{2}{5})\}.$$

Quelle est la somme de tous les éléments de l'ensemble image de R ?

- A.** $\frac{3}{2}$ **B.** $\frac{10}{9}$ **C.** $\frac{5}{2}$ **D.** $\frac{5}{3}$

PROBLÈME 019

Corrigé →

Sur l'intervalle $[0, \pi/2[$, on définit xRy par $\sec^2(x) - \tan^2(y) = 1$, où $\sec(x) = 1/\cos(x)$. La relation R est :

- A.** réflexive et symétrique, mais non transitive ; **B.** réflexive et transitive, mais non symétrique ;
C. réflexive, mais ni symétrique ni transitive ; **D.** une relation d'équivalence.

PROBLÈME 020

Corrigé →

Sur $\mathbb{Z}$, on considère $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x + y \text{ est pair}\}$. La relation R est :

- A.** réflexive et transitive, mais non symétrique ; **B.** réflexive et symétrique, mais non transitive ;
C. une relation d'équivalence ; **D.** symétrique et transitive, mais non réflexive.

PROBLÈME 021

Corrigé →

Soient

$$A = \{x \in]0, \pi[\setminus \{\pi/2\} : \log_{2/\pi} |\sin(x)| + \log_{2/\pi} |\cos(x)| = 2\},$$

$$B = \{x \geq 0 : \sqrt{x}(\sqrt{x} - 4) - 3|\sqrt{x} - 2| + 6 = 0\}.$$

Calculer $\text{Card}(A \cup B)$. Dans A , les logarithmes sont en base $2/\pi$.

- A.** 4 **B.** 8 **C.** 6 **D.** 2

PROBLÈME 022

Corrigé →

Sur $X = \mathbb{R}^2$, on définit $(a_1, b_1)R(a_2, b_2) \iff b_1 = b_2$.

I. R est une relation d'équivalence.

II. Pour un point $(a, b) \in X$, l'ensemble $S = \{(x, y) \in X : (x, y)R(a, b)\}$ est une droite parallèle à $y = x$. Choisir la proposition correcte.

A. I et II sont vraies.

B. I est vraie et II est fausse.

C. I et II sont fausses.

D. I est fausse et II est vraie.

PROBLÈME 023

Corrigé →

Soient

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x + y| \geq 3\},$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 3\},$$

$$C = \{(x, y) \in A \cap B : x = 0 \text{ ou } y = 0\}.$$

Calculer la somme des $|x + y|$ lorsque (x, y) parcourt C .

A. 18

B. 24

C. 15

D. 12

PROBLÈME 024

Corrigé →

Sur $\{1, 2, 3, 4\}$, on considère $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 3)\}$. Quel est le nombre minimal de couples à ajouter à R pour en faire une relation d'équivalence ?

A. 9

B. 8

C. 7

D. 10

PROBLÈME 025

Corrigé →

Soit $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ et

$$B = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in A, m < n \text{ et } \text{pgcd}(m, n) = 1 \right\}.$$

Calculer $\text{Card}(B)$.

A. 29

B. 31

C. 37

D. 36

PROBLÈME 026

Corrigé →

Combien existe-t-il de relations d'équivalence non vides sur $\{1, 2, 3\}$?

A. 7

B. 4

C. 5

D. 6

PROBLÈME 027

Corrigé →

Soient

 $A = \{2, 3, 6, 8, 9, 11\}$ et $B = \{1, 4, 5, 10, 15\}$. Sur $A \times B$, on définit $(a, b)R(c, d) \iff 3ad - 7bc$ est pair. La relation R est :

- A.** réflexive, mais non symétrique ; **B.** une relation d'équivalence ;
C. réflexive et symétrique, mais non transitive ; **D.** transitive, mais non symétrique.

PROBLÈME 028

Corrigé →

Sur $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, on pose $xRy \iff 4x \leq 5y$. Soient $m = \text{Card}(R)$ et n le nombre minimal de couples de $A \times A$ à ajouter à R pour la rendre symétrique. Calculer $m + n$.

- A.** 23 **B.** 26 **C.** 25 **D.** 24

PROBLÈME 029

Corrigé →

Soit $A = \{n \in [100, 700] \cap \mathbb{N} : n \text{ n'est multiple ni de 3 ni de 4}\}$. Calculer $\text{Card}(A)$.

- A.** 300 **B.** 310 **C.** 290 **D.** 280

PROBLÈME 030

Corrigé →

Sur $X = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$, on considère

$$R_1 = \{(x, y) \in X^2 : 2x - 3y = 2\},$$

$$R_2 = \{(x, y) \in X^2 : -5x + 4y = 0\}.$$

Si M et N sont les nombres minimaux de couples à ajouter respectivement à R_1 et R_2 pour les rendre symétriques, calculer $M + N$.

- A.** 16 **B.** 12 **C.** 8 **D.** 10

PROBLÈME 031

Corrigé →

Sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, on définit $(x_1, y_1)R(x_2, y_2) \iff x_1 \leq x_2$ ou $y_1 \leq y_2$.

I. R est réflexive, mais non symétrique.

II. R est transitive. Quelle proposition est vraie ?

- A.** Seule *II* est vraie. **B.** *I* et *II* sont vraies.
C. Ni *I* ni *II* n'est vraie. **D.** Seule *I* est vraie.

PROBLÈME 032

Corrigé →

On définit R_1 sur $\mathbb{R}$ par $aR_1b \iff a^2 + b^2 = 1$, et R_2 sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ par $(a, b)R_2(c, d) \iff a + d = b + c$. Quelle proposition est vraie ?

- A.** R_1 et R_2 sont des relations d'équivalence. **B.** Seule R_1 est une relation d'équivalence.
C. Seule R_2 est une relation d'équivalence. **D.** Ni R_1 ni R_2 n'est une relation d'équivalence.

PROBLÈME 033

Corrigé →

Soit R la plus petite relation d'équivalence sur $\{1, 2, 3, 4\}$ contenant $\{(1, 2), (1, 3)\}$. Calculer $\text{Card}(R)$.

- A.** 15 **B.** 10 **C.** 12 **D.** 8

PROBLÈME 034

Corrigé →

Sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, on définit $(a, b)R(c, d) \iff ad - bc$ est divisible par 5. La relation R est :

- A.** réflexive et transitive, mais non symétrique ; **B.** réflexive et symétrique, mais non transitive ;
C. réflexive, mais ni symétrique ni transitive ; **D.** réflexive, symétrique et transitive.

PROBLÈME 035

Corrigé →

Les ensembles finis A et B ont respectivement m et n éléments. Le nombre de parties de A dépasse de 56 celui de B . Quelle est la distance entre $P(m, n)$ et $Q(-2, -3)$?

- A.** 8 **B.** 10 **C.** 4 **D.** 6

PROBLÈME 036

Corrigé →

Soit $S = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ et $M = P(S)$, l'ensemble de ses parties. Sur M , on définit $R = \{(A, B) \in M^2 : A \cap B \neq \emptyset\}$. La relation R est :

- A.** symétrique seulement ; **B.** réflexive seulement ;
C. symétrique et réflexive seulement ; **D.** symétrique et transitive seulement.

PROBLÈME 037

Corrigé →

Soient

$A = \{1, 3, 4, 6, 9\}$ et $B = \{2, 4, 5, 8, 10\}$. Sur $A \times B$, on définit

$$R = \{((a_1, b_1), (a_2, b_2)) : a_1 \leq b_2 \text{ et } b_1 \leq a_2\}.$$

Calculer $\text{Card}(R)$.

- A.** 180 **B.** 26 **C.** 52 **D.** 160

PROBLÈME 038

Corrigé →

Une organisation a remis 48 médailles dans l'épreuve A , 25 dans B et 18 dans C . Au total, 60 hommes ont reçu au moins une médaille et 5 ont été médaillés dans les trois épreuves. Combien ont été médaillés dans exactement deux épreuves ?

- A.** 10 **B.** 15 **C.** 21 **D.** 9

PROBLÈME 039

Corrigé →

Soient $A = \{2, 3, 4\}$ et $B = \{8, 9, 12\}$. Combien la relation

$$R = \{((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \in (A \times B)^2 : a_1 \text{ divise } b_2 \text{ et } a_2 \text{ divise } b_1\}$$

contient-elle de couples ?

- A.** 18 **B.** 24 **C.** 36 **D.** 12

PROBLÈME 040

Corrigé →

Sur $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, on définit

$$R = \{(x, y) \in A^2 : x + y = 7\}.$$

La relation R est :

- A.** réflexive, mais ni symétrique ni transitive; **B.** transitive, mais ni symétrique ni réflexive;
C. symétrique, mais ni réflexive ni transitive; **D.** une relation d'équivalence.

PROBLÈME 041

Corrigé →

Soit $S = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$. Sur $P(S)$, on définit

$$AR_1B \iff (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) = \emptyset,$$

$$AR_2B \iff A \cup B^c = B \cup A^c,$$

les complémentaires étant pris dans S . Quelle proposition est vraie ?

- A.** Seule R_2 est une relation d'équivalence. **B.** Ni R_1 ni R_2 n'est une relation d'équivalence.
C. R_1 et R_2 sont des relations d'équivalence. **D.** Seule R_1 est une relation d'équivalence.

PROBLÈME 042

Corrigé →

Sur $\mathbb{R}$, on définit $R = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : 3a - 3b + \sqrt{7} \text{ est irrationnel}\}$. La relation R est :

- A.** une relation d'équivalence; **B.** réflexive et symétrique, mais non transitive;
C. réflexive et transitive, mais non symétrique; **D.** réflexive, mais ni symétrique ni transitive.

PROBLÈME 043

Corrigé →

On considère

$$S = \{(a, b) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\})^2 : 2 + \frac{a}{b} > 0\},$$

$$T = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a^2 - b^2 \in \mathbb{Z}\}.$$

Quelle proposition est vraie ?

- A.** S est transitive, mais T ne l'est pas. **B.** S et T sont symétriques.
C. Ni S ni T n'est transitive. **D.** T est symétrique, mais S ne l'est pas.

PROBLÈME 044

Corrigé →

Sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, on définit $(a, b)R(c, d) \iff ad(b - c) = bc(a - d)$. La relation R est :

- A.** symétrique et transitive, mais non réflexive ; **B.** réflexive et symétrique, mais non transitive ;
C. transitive, mais ni réflexive ni symétrique ; **D.** symétrique, mais ni réflexive ni transitive.

PROBLÈME 045

Corrigé →

Sur $\{a, b, c\}$, on considère $R = \{(a, b), (b, c)\}$. Quel est le nombre minimal de couples à ajouter pour rendre R à la fois symétrique et transitive ?

- A.** 7 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5

PROBLÈME 046

Corrigé →

Sur $\mathbb{N}$, on définit aRb si $2a + 3b$ est un multiple de 5. La relation R est :

- A.** une relation d'équivalence ; **B.** non réflexive ;
C. symétrique, mais non transitive ; **D.** transitive, mais non symétrique.

PROBLÈME 047

Corrigé →

Sur $\mathbb{Z}$, on définit $R = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : \text{pgcd}(a, b) = 1 \text{ et } 2a \neq b\}$. La relation R est :

- A.** réflexive, mais non symétrique ; **B.** transitive, mais non réflexive ;
C. symétrique, mais non transitive ; **D.** ni symétrique ni transitive.

PROBLÈME 048

Corrigé →

Sur $E = \{1, 2, 3, \dots, 60\}$, on considère

$$R = \{(a, b) \in E^2 : b = pq, \text{ où } p \text{ et } q \text{ sont des nombres premiers } \geq 3\}.$$

Calculer $\text{Card}(R)$.

- A.** 600 **B.** 660 **C.** 540 **D.** 720

PROBLÈME 049

Corrigé →

Soit $\alpha \in \mathbb{N}$. Sur $\mathbb{N}$, on définit $R = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : 3x + \alpha y \text{ est un multiple de } 7\}$. R est une relation d'équivalence si et seulement si :

- A. $\alpha = 14$;
- B. α est un multiple de 4;
- C. le reste de la division de α par 10 vaut 4;
- D. le reste de la division de α par 7 vaut 4.

PROBLÈME 050

Corrigé →

Sur $\mathbb{R}$, on définit $aR_1b \iff ab \geq 0$ et $aR_2b \iff a \geq b$. Quelle proposition est vraie ?

- A. R_1 est une relation d'équivalence, mais pas R_2 .
- B. R_2 est une relation d'équivalence, mais pas R_1 .
- C. R_1 et R_2 sont des relations d'équivalence.
- D. Ni R_1 ni R_2 n'est une relation d'équivalence.

PROBLÈME 051

Corrigé →

Soit $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$, où $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour $i \neq j$. Sur A , on définit xRy si, pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, $y \in A_i$ si et seulement si $x \in A_i$. La relation R est :

- A. réflexive et symétrique, mais non transitive;
- B. réflexive et transitive, mais non symétrique;
- C. réflexive, mais ni symétrique ni transitive;
- D. une relation d'équivalence.

PROBLÈME 052

Corrigé →

Sur $\mathbb{N}$, on considère

$$R_1 = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 : |a - b| \leq 13\},$$

$$R_2 = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 : |a - b| \neq 13\}.$$

Quelle proposition est vraie ?

- A. R_1 et R_2 sont des relations d'équivalence.
- B. Ni R_1 ni R_2 n'est une relation d'équivalence.
- C. R_1 est une relation d'équivalence, mais pas R_2 .
- D. R_2 est une relation d'équivalence, mais pas R_1 .

PROBLÈME 053

Corrigé →

Parmi les affirmations suivantes concernant des relations sur $\mathbb{R}$, laquelle est incorrecte ?

- A. La relation $xRy \iff 0 < |x| - |y| \leq 1$ n'est ni transitive ni symétrique.
- B. La relation $xRy \iff 0 < |x - y| \leq 1$ est symétrique et transitive.
- C. La relation $xRy \iff |x| - |y| \leq 1$ est réflexive, mais non symétrique.
- D. La relation $xRy \iff |x - y| \leq 1$ est réflexive et symétrique.

PROBLÈME 054

Corrigé →

Dans un hôpital, 89 % des patients présentent une affection cardiaque et 98 % une infection pulmonaire. Si K % présentent les deux affections, auquel des ensembles suivants K ne peut-il pas appartenir ?

- A.** $\{80, 83, 86, 89\}$ **B.** $\{84, 86, 88, 90\}$ **C.** $\{79, 81, 83, 85\}$ **D.** $\{84, 87, 90, 93\}$

PROBLÈME 055

Corrigé →

Sur $\mathbb{N}$, on définit $R = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : x^3 - 3x^2y - xy^2 + 3y^3 = 0\}$. La relation R est :

- A.** symétrique, mais ni réflexive ni transitive ; **B.** réflexive, mais ni symétrique ni transitive ;
C. réflexive et symétrique, mais non transitive ; **D.** une relation d'équivalence.

PROBLÈME 056

Corrigé →

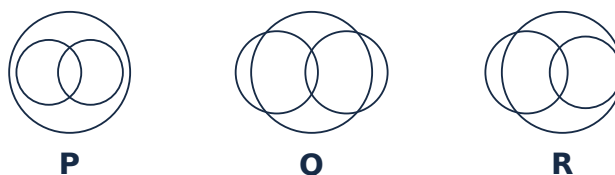
Sur l'ensemble des matrices réelles carrées de taille n , on définit ARB s'il existe une matrice inversible P telle que $PAP^{-1} = B$. Quelle proposition est vraie ?

- A.** R est réflexive et transitive, mais non symétrique. **B.** R est symétrique et transitive, mais non réflexive.
C. R est réflexive et symétrique, mais non transitive. **D.** R est une relation d'équivalence.

PROBLÈME 057

Corrigé →

Une école propose trois types de jeux. Certains élèves pratiquent deux types de jeux, mais aucun ne pratique les trois. Parmi les diagrammes de Venn P , Q et R ci-dessous, lesquels peuvent représenter cette situation ?



- A.** Q et R **B.** Aucun de ces diagrammes
C. P et R **D.** P et Q

PROBLÈME 058

Corrigé →

Soit $A = \{2, 3, 4, 5, \dots, 30\}$. Sur $A \times A$, on définit l'équivalence $(a, b) \simeq (c, d) \iff ad = bc$. Combien de couples appartiennent à la classe de $(4, 3)$?

- A.** 5 **B.** 6 **C.** 8 **D.** 7

PROBLÈME 059

Corrigé →

Combien l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} : (|x| - 3)|x + 4| = 6\}$ contient-il d'éléments ?

- A. 4 B. 2 C. 3 D. 1

PROBLÈME 060

Corrigé →

Dans le plan, on définit PRQ lorsque les points P et Q sont à la même distance de l'origine. Quelle est la classe d'équivalence du point $(1, -1)$?

- A. $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 = \sqrt{2}\}$ B. $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 2\}$
 C. $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ D. $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 4\}$

PROBLÈME 061

Corrigé →

Dans un bureau, 73 % des employés aiment le café et 65 % aiment le thé. Si x % aiment les deux, quelle valeur est impossible pour x ?

- A. 63 B. 36 C. 54 D. 38

PROBLÈME 062

Corrigé →

On a $X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_{50} = Y_1 \cup Y_2 \cup \dots \cup Y_n = T$. Chaque X_i contient 10 éléments et chaque Y_i en contient 5. Chaque élément de T appartient à exactement 20 des ensembles X_i et à exactement 6 des ensembles Y_i . Calculer n .

- A. 30 B. 50 C. 15 D. 45

PROBLÈME 063

Corrigé →

Dans une ville, 63 % des habitants lisent le journal A et 76 % lisent le journal B . Si x % lisent les deux journaux, laquelle des valeurs suivantes est possible ?

- A. 37 B. 65 C. 29 D. 55

PROBLÈME 064

Corrigé →

Sur $\mathbb{R}$, on considère

$$R_1 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a^2 + b^2 \in \mathbb{Q}\},$$

$$R_2 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a^2 + b^2 \notin \mathbb{Q}\}.$$

Quelle proposition est vraie ?

- A. Ni R_1 ni R_2 n'est transitive. B. R_2 est transitive, mais R_1 ne l'est pas.
 C. R_1 et R_2 sont transitives. D. R_1 est transitive, mais R_2 ne l'est pas.

PROBLÈME 065

Corrigé →

Soit A l'ensemble des réels m tels que les deux racines de $x^2 - (m + 1)x + m + 4 = 0$ soient réelles. Soit $B = [-3, 5]$. Quelle affirmation est fausse?

- A.** $A \cap B = \{-3\}$ **B.** $B \setminus A =]-3, 5[$
C. $A \cup B = \mathbb{R}$ **D.** $A \setminus B =]-\infty, -3[\cup]5, +\infty[$

PROBLÈME 066

Corrigé →

Sur $\mathbb{Z}$, on définit $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x^2 + 3y^2 \leq 8\}$. Quel est l'ensemble de départ effectif, ou domaine, de la relation réciproque R^{-1} ?

- A.** $\{0, 1\}$ **B.** $\{-2, -1, 1, 2\}$ **C.** $\{-1, 0, 1\}$ **D.** $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

PROBLÈME 067

Corrigé →

Soient $A = \{x \in \mathbb{R} : |x| < 2\}$ et $B = \{x \in \mathbb{R} : |x - 2| \geq 3\}$. Quelle proposition est vraie?

- A.** $A \setminus B = [-1, 2[$ **B.** $A \cup B = \mathbb{R} \setminus]2, 5[$ **C.** $A \cap B =]-2, -1[$ **D.** $B \setminus A = \mathbb{R} \setminus]-2, 5[$

PROBLÈME 068

Corrigé →

Soient A, B et C tels que $\emptyset \neq A \cap B \subseteq C$. Quelle affirmation n'est pas toujours vraie?

- A.** Si $A \setminus B \subseteq C$, alors $A \subseteq C$. **B.** $B \cap C \neq \emptyset$.
- C.** $(C \cup A) \cap (C \cup B) = C$. **D.** Si $A \setminus C \subseteq B$, alors $A \subseteq B$.

PROBLÈME 069

Corrigé →

Dans une ville, 25 % de la population lit le journal A , 20 % lit B et 8 % lit les deux. Parmi les lecteurs de A seulement, 30 % regardent les publicités; ce taux vaut 40 % chez les lecteurs de B seulement et 50 % chez les lecteurs des deux journaux. Quel pourcentage de la population regarde les publicités de ces journaux ?

- A.** 13,5 % **B.** 13 % **C.** 12,8 % **D.** 13,9 %

PROBLÈME 070

Corrigé →

Soient

$$A = \{x \in \mathbb{Z} : 2^{(x+2)(x^2-5x+6)} = 1\},$$

$$B = \{x \in \mathbb{Z} : -3 < 2x - 1 < 9\}.$$

Combien l'ensemble $A \times B$ possède-t-il de parties?

- A.** 2^{12} **B.** 2^{18} **C.** 2^{10} **D.** 2^{15}

PROBLÈME 071

Corrigé →

Soit $S = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$. Combien de parties non vides A de S ont un produit d'éléments pair ?

- A.** $2^{50} - 1$ **B.** $2^{50}(2^{50} - 1)$ **C.** $2^{100} - 1$ **D.** $2^{50} + 1$

PROBLÈME 072

Corrigé →

Les 140 élèves d'une classe sont numérotés de 1 à 140. Ceux dont le numéro est pair choisissent les mathématiques ; ceux dont le numéro est divisible par 3, la physique ; ceux dont le numéro est divisible par 5, la chimie. Combien d'élèves ne choisissent aucune de ces trois matières ?

- A.** 42 **B.** 102 **C.** 1 **D.** 38

PROBLÈME 073

Corrigé →

Sur $\mathbb{N}$, on définit

$$R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : 2x + y = 10\},$$

$$R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : x + 2y = 10\}.$$

Quelle proposition est vraie ?

- A.** L'ensemble image de R_1 est $\{2, 4, 8\}$. **B.** L'ensemble image de R_2 est $\{1, 2, 3, 4\}$.
C. R_1 et R_2 sont symétriques. **D.** R_1 et R_2 sont transitives.

PROBLÈME 074

Corrigé →

Soient

$$A = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : |a - 5| < 1 \text{ et } |b - 5| < 1\},$$

$$B = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : 4(a - 6)^2 + 9(b - 5)^2 \leq 36\}.$$

Quelle proposition est vraie ?

- A.** Ni $A \subset B$ ni $B \subset A$ **B.** $B \subset A$ **C.** $A \subset B$ **D.** $A \cap B = \emptyset$

PROBLÈME 075

Corrigé →

Sur $A = \{a, b, c\}$, on considère

$$R_1 = \{(c, a), (b, b), (a, c), (c, c), (b, c), (a, a)\},$$

$$R_2 = \{(a, b), (b, a), (c, c), (c, a), (a, a), (b, b), (a, c)\}.$$

Quelle proposition est vraie ?

- A.** Ni R_1 ni R_2 n'est symétrique. **B.** R_1 n'est pas symétrique, mais elle est transitive.
C. R_2 est symétrique, mais non transitive. **D.** R_1 et R_2 sont transitives.

PROBLÈME 076

Corrigé →

Soient $P = \{\theta \in \mathbb{R} : \sin(\theta) - \cos(\theta) = \sqrt{2} \cos(\theta)\}$, $Q = \{\theta \in \mathbb{R} : \sin(\theta) + \cos(\theta) = \sqrt{2} \sin(\theta)\}$. Quelle proposition est vraie ?

- A.** $P \subset Q$ et $Q \setminus P \neq \emptyset$ **B.** $Q \not\subset P$ **C.** $P \not\subset Q$ **D.** $P = Q$

PROBLÈME 077

Corrigé →

Les ensembles A et B contiennent respectivement 4 et 2 éléments. Combien de parties de $A \times B$ contiennent au moins 3 éléments ?

- A.** 219 **B.** 256 **C.** 275 **D.** 510

PROBLÈME 078

Corrigé →

Soit $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Combien de couples ordonnés (Y, Z) vérifient $Y \subseteq X, Z \subseteq X$ et $Y \cap Z = \emptyset$?

- A.** 3^5 **B.** 2^5 **C.** 5^3 **D.** 5^2

PROBLÈME 079

Corrigé →

On considère les deux affirmations suivantes.

I. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - x \text{ est entier}\}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.

II. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \alpha y \text{ pour un rationnel } \alpha\}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$. Choisir la proposition correcte.

- A.** *I* et *II* sont vraies, mais *II* n'explique pas *I*. **B.** *I* est vraie et *II* est fausse.
C. *I* est fausse et *II* est vraie. **D.** *I* et *II* sont vraies, et *II* explique *I*.

PROBLÈME 080

Corrigé →

On considère

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = wy \text{ pour un rationnel } w\},$$

$$S = \{(\frac{m}{n}, p/q) : m, n, p, q \in \mathbb{Z}, n \neq 0, q \neq 0 \text{ et } qm = pn\}.$$

Quelle proposition est vraie ?

- A.** R est une relation d'équivalence, mais pas S . **B.** Ni R ni S n'est une relation d'équivalence.
C. S est une relation d'équivalence, mais pas R . **D.** R et S sont des relations d'équivalence.

PROBLÈME 081

Corrigé →

Soient A, B et C tels que $A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C$. Que peut-on conclure ?

- A.** $A = C$ **B.** $B = C$ **C.** $A \cap B = \emptyset$ **D.** $A = B$

PROBLÈME 082

Corrigé →

On considère les relations sur $\mathbb{R}$:

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x + 1 \text{ et } 0 < x < 2\},$$

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y \text{ est entier}\}.$$

Quelle proposition est vraie ?

- | | |
|--|--|
| A. Ni S ni T n'est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$. | B. S et T sont des relations d'équivalence sur $\mathbb{R}$. |
| C. S est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$, mais pas T . | D. T est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$, mais pas S . |

PROBLÈME 083

Corrigé →

Soit W l'ensemble des mots d'un dictionnaire anglais. On définit xRy si les mots x et y ont au moins une lettre en commun. La relation R est :

- | | |
|--|---|
| A. réflexive et symétrique, mais non transitive ; | B. réflexive, symétrique et transitive ; |
| C. réflexive et transitive, mais non symétrique ; | D. symétrique et transitive, mais non réflexive. |

PROBLÈME 084

Corrigé →

Sur $A = \{3, 6, 9, 12\}$, on considère

$$R = \{(3, 3), (6, 6), (9, 9), (12, 12), (6, 12), (3, 9), (3, 12), (3, 6)\}.$$

La relation R est :

- | | |
|---|--|
| A. réflexive et symétrique seulement ; | B. une relation d'équivalence ; |
| C. réflexive seulement ; | D. réflexive et transitive seulement. |

PROBLÈME 085

Corrigé →

Sur $A = \{1, 2, 3, 4\}$, on considère $R = \{(1, 3), (4, 2), (2, 4), (2, 3), (3, 1)\}$. Quelle proposition est vraie ?

- | | |
|-------------------------------------|-------------------------------|
| A. R est une application. | B. R est transitive. |
| C. R n'est pas symétrique. | D. R est réflexive. |

03 / CALCULER

Questions numériques

35 problèmes. Donner une valeur numérique et conserver le raisonnement.

PROBLÈME 086

Corrigé →

Soit $R = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : \ln(x + y) \leq 2\}$. Quel est le nombre minimal de couples à ajouter à R pour la rendre transitive ?

RÉPONSE _____

PROBLÈME 087

Corrigé →

Soient $A = \{1, 4, 7\}$ et $B = \{2, 3, 8\}$. Calculer le nombre de couples dans

$$R = \{((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \in (A \times B)^2 : a_1 + b_2 \text{ divise } a_2 + b_1\}.$$

RÉPONSE _____

PROBLÈME 088

Corrigé →

Soit $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$. Sur $A \times A$, on définit $(x, y)R(z, w) \iff x \text{ divise } z \text{ et } y \leq w$. Calculer $\text{Card}(R)$.

RÉPONSE _____

PROBLÈME 089

Corrigé →

Soit S l'ensemble des 11 premiers entiers naturels strictement positifs. On pose

$$A = \{B \subseteq S : \text{Card}(B) \geq 2 \text{ et le produit des éléments de } B \text{ est pair}\}.$$

Calculer $\text{Card}(A)$.

RÉPONSE _____

PROBLÈME 090

Corrigé →

Sur $A = \{1, 2, 3\}$, combien existe-t-il de relations contenant $(1, 2)$, ayant au plus 6 couples, qui sont réflexives et transitives, mais non symétriques ?

RÉPONSE _____

PROBLÈME 091

Corrigé →

Pour $n \geq 2$, soit S_n l'ensemble des parties de $\{1, 2, \dots, n\}$ ne contenant pas deux entiers consécutifs. Par exemple, $\{1, 3, 5\} \in S_6$, mais $\{1, 2, 4\} \notin S_6$. Calculer $\text{Card}(S_5)$.

RÉPONSE _____

PROBLÈME 092

Corrigé →

Soit $S = \{p_1, p_2, \dots, p_{10}\}$, l'ensemble des dix premiers nombres premiers. On pose $A = S \cup P$, où P est l'ensemble de tous les produits d'éléments distincts de S . Combien de couples (x, y) , avec $x \in S$ et $y \in A$, vérifient x divise y ?

RÉPONSE _____

PROBLÈME 093

Corrigé →

Sur $A = \{1, 2, 3\}$, combien de relations contenant $(1, 2)$ et $(2, 3)$ sont réflexives et transitives, mais non symétriques?

RÉPONSE _____

PROBLÈME 094

Corrigé →

Soient

$$A = \{2, 3, 6, 7\} \text{ et } B = \{4, 5, 6, 8\}. \text{ Sur } A \times B, \text{ on pose}$$

$$(a_1, b_1)R(a_2, b_2) \iff a_1 + a_2 = b_1 + b_2. \text{ Calculer } \text{Card}(R).$$

RÉPONSE _____

PROBLÈME 095

Corrigé →

Une enquête porte sur 220 élèves. Entre 125 et 130 étudient les mathématiques; entre 85 et 95, la physique; entre 75 et 90, la chimie. On compte 30 élèves en physique et chimie, 50 en chimie et mathématiques, et 40 en mathématiques et physique. Dix élèves n'étudient aucune de ces matières. Soient m et n les nombres minimal et maximal d'élèves étudiant les trois matières. Calculer $m + n$.

RÉPONSE _____

PROBLÈME 096

Corrigé →

Sur $A = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$, on définit

$$R_1 = \{(a, b) \in A^2 : b \text{ est divisible par } a\},$$

$$R_2 = \{(a, b) \in A^2 : a \text{ est un multiple entier de } b\}.$$

Calculer $\text{Card}(R_1 \setminus R_2)$.

RÉPONSE _____

PROBLÈME 097

Corrigé →

Sur $A = \{1, 2, \dots, 100\}$, on pose $(x, y) \in R \iff 2x = 3y$. Soit R_1 une relation symétrique sur A contenant R . Quelle est la plus petite valeur possible de $n = \text{Card}(R_1)$?

RÉPONSE _____

PROBLÈME 098

Corrigé →

Sur $A = \{1, 2, 3, 4\}$, on considère $R = \{(1, 2), (2, 3), (1, 4)\}$. Soit S une relation d'équivalence sur A contenant R . Quelle est la plus petite valeur possible de $n = \text{Card}(S)$?

RÉPONSE _____

PROBLÈME 099

Corrigé →

Combien de relations sur $\{1, 2, 3, 4\}$ sont symétriques sans être réflexives ?

RÉPONSE _____

PROBLÈME 100

Corrigé →

Calculer le cardinal de $\{n \in \mathbb{N} : 10 \leq n \leq 100 \text{ et } 3^n - 3 \text{ est un multiple de } 7\}$.

RÉPONSE _____

PROBLÈME 101

Corrigé →

Soit $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Sur $A \times A$, on considère

$$R = \{((a, b), (c, d)) : 2a + 3b = 4c + 5d\}.$$

Calculer $\text{Card}(R)$.

RÉPONSE _____

PROBLÈME 102

Corrigé →

Soit $A = \{-4, -3, -2, 0, 1, 3, 4\}$ et

$$R = \{(a, b) \in A^2 : b = |a| \text{ ou } b^2 = a + 1\}.$$

Quel est le nombre minimal de couples à ajouter à R pour la rendre à la fois réflexive et symétrique ?

RÉPONSE _____

PROBLÈME 103

Corrigé →

Sur $\{1, 2, 3\}$, combien de relations contenant $(1, 2)$ et $(2, 3)$ sont réflexives et transitives, mais non symétriques ?

RÉPONSE _____

PROBLÈME 104

Corrigé →

Calculer le cardinal de $\{n \in \mathbb{Z} : |n^2 - 10n + 19| < 6\}$.

RÉPONSE _____

PROBLÈME 105

Corrigé →

Soit $A = \{0, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10\}$ et

$$R = \{(x, y) \in A^2 : x - y \text{ est un entier impair strictement positif ou } x - y = 2\}.$$

Quel est le nombre minimal de couples à ajouter pour rendre R symétrique ?

RÉPONSE _____

PROBLÈME 106

Corrigé →

Soient $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ et $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Calculer le nombre de couples dans

$$R = \{(a, b) \in A^2 : 2(a - b)^2 + 3(a - b) \in B\}.$$

RÉPONSE _____

PROBLÈME 107

Corrigé →

Soit $S = \{1, 2, 3, 5, 7, 10, 11\}$. Combien de parties non vides de S ont une somme d'éléments multiple de 3 ?

RÉPONSE _____

PROBLÈME 108

Corrigé →

Sur $\{a, b, c, d\}$, on considère $R = \{(a, b), (b, c), (b, d)\}$. Quel est le nombre minimal de couples à ajouter pour en faire une relation d'équivalence ?

RÉPONSE _____

PROBLÈME 109

Corrigé →

Soient $S = \{4, 6, 9\}$ et $T = \{9, 10, 11, \dots, 1\,000\}$. On pose

$$A = \{a_1 + a_2 + \dots + a_k : k \in \mathbb{N}, a_1, \dots, a_k \in S\}.$$

Calculer la somme de tous les éléments de $T \setminus A$.

RÉPONSE _____

PROBLÈME 110

Corrigé →

Soient $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ et $B = \{3, 6, 7, 9\}$. Calculer le cardinal de l'ensemble $\{C \subseteq A : C \cap B \neq \emptyset\}$.

RÉPONSE _____

PROBLÈME 111

Corrigé →

Soit $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. On définit

$$B = \{T \subseteq A : 1 \notin T \text{ ou } 2 \in T\},$$

$$C = \{T \subseteq A : \text{la somme des éléments de } T \text{ est un nombre premier}\}.$$

Calculer $\text{Card}(B \cup C)$.

RÉPONSE _____

PROBLÈME 112

Corrigé →

Sur $E = \{1, 2, \dots, 50\}$, on considère

$$R_1 = \{(p, p^n) \in E^2 : p \text{ est premier, } n \text{ est un entier } \geq 0\},$$

$$R_2 = \{(p, p^n) \in E^2 : p \text{ est premier et } n \in \{0, 1\}\}.$$

Calculer $\text{Card}(R_1 \setminus R_2)$.

RÉPONSE _____

PROBLÈME 113

Corrigé →

Soient

$$A = \{n \in \mathbb{N} : \text{pgcd}(n, 45) = 1\} \text{ et}$$

$$B = \{2k : k \in \{1, 2, \dots, 100\}\}.$$

Calculer la somme de tous les éléments de $A \cap B$.

RÉPONSE _____

PROBLÈME 114

Corrigé →

On pose

$$A = \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{10} \min(i, j), \quad B = \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{10} \max(i, j).$$

Autrement dit, chaque somme porte sur tous les couples (i, j) avec $1 \leq i \leq 10$ et $1 \leq j \leq 10$. Calculer $A + B$.

RÉPONSE _____

PROBLÈME 115

Corrigé →

Calculer la somme de tous les éléments de $\{\alpha \in \{1, 2, \dots, 100\} : \text{pgcd}(\alpha, 24) = 1\}$.

RÉPONSE _____

PROBLÈME 116

Corrigé →

Soient

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x - 2| > 1\},$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2 - 3} > 1\},$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} : |x - 4| \geq 2\}.$$

Combien l'ensemble $(A \cap B \cap C)^c \cap \mathbb{Z}$ possède-t-il de parties? Le complémentaire est pris dans $\mathbb{R}$.

RÉPONSE _____

PROBLÈME 117

Corrigé →

Soient

$$A = \{n \in \mathbb{N} : n^2 \leq n + 10\,000\},$$

$$B = \{3k + 1 : k \in \mathbb{N}\} \text{ et } C = \{2k : k \in \mathbb{N}\}.$$

Calculer la somme de tous les éléments de $A \cap (B \setminus C)$.

RÉPONSE _____

PROBLÈME 118

Corrigé →

Soient A l'ensemble des entiers naturels à trois chiffres, $B = \{9k + 2 : k \in \mathbb{N}\}$ et $C = \{9k + \ell : k \in \mathbb{N}\}$, avec $0 < \ell < 9$. Si la somme des éléments de $A \cap (B \cup C)$ vaut 274×400 , calculer ℓ .

RÉPONSE _____

PROBLÈME 119

Corrigé →

Les ensembles A et B ont respectivement m et n éléments. Le nombre de parties de A dépasse de 112 le nombre de parties de B . Calculer mn .

RÉPONSE _____

PROBLÈME 120

Corrigé →

Soit $X = \{n \in \mathbb{N} : 1 \leq n \leq 50\}$,

$$A = \{n \in X : n \text{ est un multiple de } 2\},$$

$$B = \{n \in X : n \text{ est un multiple de } 7\}.$$

Quel est le cardinal du plus petit sous-ensemble de X contenant à la fois A et B ?

RÉPONSE _____

04 / VÉRIFIER

Grilles de réponses

Chaque réponse renvoie au corrigé correspondant.

Questions à choix multiple

001	002 C	003 D	004 C	005 D
006 D	007 B	008 B	009 B	010 C
011 B	012	013 C	014 B	015
016 D	017 B	018 D	019 D	020 C
021 B	022 B	023 D	024 C	025 B
026 C	027 C	028 C	029	030 D
031 D	032 C	033 B	034 B	035 B
036	037 D	038 C	039 C	040 C
041 C	042 D	043 D	044 D	045
046	047 D	048 B	049 D	050 D
051 D	052 B	053 B	054 C	055 B
056 D	057 B	058 D	059 B	060 B
061 B	062	063 D	064	065 D
066 C	067 D	068 D	069 D	070 D
071 B	072 D	073 B	074 C	075 C
076 D	077	078	079 B	080 C
081 B	082 D	083	084 D	085 C

Le résultat se vérifie par un raisonnement : les corrigés commencent page 29.

Réponses numériques

086	15	087	18	088	120	089	1979	090	6
091	13	092	5120	093	3	094	25	095	45
096	46	097	66	098	16	099	960	100	15
101	6	102	7	103	3	104	6	105	19
106	18	107	43	108	13	109	11	110	112
111	107	112	8	113	5264	114	1100	115	1633
116	256	117	832	118	5	119	28	120	29

AVANT DE CONCLURE

Si votre résultat diffère, vérifier le domaine, les bornes, la présence de zéro, les couples réciproques et les éléments comptés plusieurs fois.

LES PIÈGES À ÉVITER

Confondre symétrie et transitivité ; oublier la partie vide ; traiter un couple comme une paire non ordonnée ; exclure les points de l'intersection triple des intersections deux à deux ; oublier de répéter la fermeture transitive.

05 / COMPRENDRE

Corrigés commentés

La réponse, puis le raisonnement essentiel pour chaque problème.

001 | RÉPONSE A[Énoncé →](#)

Les couples de même signe et ceux comportant 0 vérifient la condition : il y en a 17. La relation est réflexive et symétrique, mais pas transitive : $-1R0$ et $0R1$, alors que -1 n'est pas en relation avec 1. Seule I est donc vraie.

002 | RÉPONSE C[Énoncé →](#)

Regrouper les couples (a, b) selon la valeur de $2a + 3b$, puis les couples (c, d) selon $3c + 4d$. Les valeurs communes sont 7, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 18 et 20. Leurs contributions sont 1, 1, 2, 1, 2, 1, 1, 1, 1 et 1 : le total vaut 12.

003 | RÉPONSE D[Énoncé →](#)

La condition revient à $x \equiv y$ modulo 3. Les classes sont $\{0, 3, 6, 9\}$, $\{1, 4, 7\}$ et $\{2, 5, 8\}$. Ainsi $\text{Card}(R) = 4^2 + 3^2 + 3^2 = 34$, et non 36. La congruence est une équivalence : I est fausse et II est vraie.

004 | RÉPONSE C[Énoncé →](#)

Pour chaque x , compter les y de A tels que $y \leq 2 - 2x$: on trouve 7, 7, 5, 3, 1, 0 et 0 couples, soit $\ell = 23$. Les diagonales manquantes correspondent à $x = 1, 2, 3, 4$, donc $m = 4$. Six couples réciproques manquent, donc $n = 6$. Total : $23 + 4 + 6 = 33$.

005 | RÉPONSE D[Énoncé →](#)

On doit avoir $|x| \leq 3$. Pour $x = 0$, on dispose de 15 valeurs de y . Pour $x = \pm 1, \pm 2$ et ± 3 , les nombres de valeurs possibles de y sont respectivement 13, 11 et 7. Le total vaut $15 + 2(13 + 11 + 7) = 77$. Attention à l'inégalité stricte.

006 | RÉPONSE D[Énoncé →](#)

La congruence $5x - 3 \equiv 0$ modulo 4 impose $x \equiv 3$ modulo 4. Dans les bornes données, $R = \{(3, 3), (7, 8), (11, 13)\}$. Seuls $(8, 7)$ et $(13, 11)$ doivent être ajoutés : 2 couples.

007 | RÉPONSE B[Énoncé →](#)

On obtient $A = [-4, -2] \cup [2, 4]$ et $B =]-\infty, 1[\cup]3, +\infty[$. En retirant A de B , il reste $] -\infty, -4[\cup] -2, 1[\cup]4, +\infty[$. Les bornes 1 et 3 ne sont pas dans B .

008 | RÉPONSE B

Énoncé →

Pour tous $x, y > 0$, au moins l'une des inégalités $2x \leq 3y$ ou $2y \leq 3x$ est vraie. En effet, leur négation simultanée donnerait $4xy > 9xy$. La fermeture symétrique est donc A^2 , qui contient $5^2 = 25$ couples. Ainsi $\ell + m = 25$.

009 | RÉPONSE B

Énoncé →

Les quatre couples diagonaux sont imposés par la réflexivité. Pour chacune des 6 paires non ordonnées de points distincts, choisir simultanément les deux orientations, ou n'en choisir aucune. Il y a donc $2^6 = 64$ relations.

010 | RÉPONSE C

Énoncé →

Le nombre de couples de maximum 3 est $4^2 - 3^2 = 7$; celui de maximum 4 est $5^2 - 4^2 = 9$. Ainsi $\text{Card}(R) = 16$. La symétrie est immédiate; $(0, 0)$ manque et $0R3, 3R0$ n'entraînent pas $0R0$. Seule S_2 est vraie.

011 | RÉPONSE B

Énoncé →

L'ensemble A est le rectangle $[-3, 5] \times [-1, 11]$. Pour un point de B , on a $|\alpha - 2| \leq 3$ et $|\beta - 6| \leq 4$, donc $\alpha \in [-1, 5]$ et $\beta \in [2, 10]$. Ainsi $B \subset A$; l'inclusion est stricte.

012 | RÉPONSE A

Énoncé →

Les couples sont $(-1, -3), (-1, -2), (0, -1), (0, 0), (1, 1), (1, 2)$ et $(2, 3)$. Ainsi $\ell = 7$. Seuls $(0, 0)$ et $(1, 1)$ sont diagonaux, donc $m = 5$. Les cinq couples non diagonaux n'ont pas leur réciproque : $n = 5$. Total : 17.

013 | RÉPONSE C

Énoncé →

En soustrayant les équations, on obtient $8y^2 = 119$, puis $x^2 = \frac{81}{8}$. Les deux coordonnées sont non nulles : D contient 4 points. Dans C , les points entiers du disque de rayon 2 sont au nombre de 13. Le nombre d'injections de D dans C vaut $13 \times 12 \times 11 \times 10 = 17\,160$.

014 | RÉPONSE B

Énoncé →

Chaque x détermine un seul y , donc $\ell = 6$. Les diagonales présentes sont $(1, 1), (2, 2)$ et $(3, 3)$, d'où $m = 3$. Les couples $(-2, 1), (-1, 1), (0, 1)$ demandent chacun un réciproque, d'où $n = 3$. Total : 12.

015 | RÉPONSE A

Énoncé →

Pour $x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$, le nombre de y admissibles est respectivement 1, 3, 2, 3, 2, 3, 1, soit $\ell = 15$. Sur la diagonale, la condition est $0 \leq x^2 + 2x \leq 4$: elle est satisfaite pour $x = -3, -2, 0, 1$. Il manque 3 diagonales : $\ell + m = 18$.

016 | RÉPONSE D

Énoncé →

La relation impose $a_i = 2a_{i+1} + 1$. En partant du plus petit dernier terme possible, 1, les valeurs remontent selon 1, 3, 7, 15, 31, 63, 127. Cinq liens sont possibles dans $\{1, \dots, 100\}$, mais pas six. Donc $k = 5$.

017 | RÉPONSE B

Énoncé →

Échanger f et g conserve les deux égalités : R est symétrique. Une fonction avec $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$ n'est pas reliée à elle-même. En choisissant $g(0) = 1, g(1) = 0$, on a fRg et gRf sans fRf : la transitivité échoue aussi.

018 | RÉPONSE D

Énoncé →

L'équation donne $y = (\frac{2}{5})^x$ pour $x = 0, 1, 2, \dots$. Les valeurs sont distinctes. Leur somme est celle d'une série géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{2}{5} : 1/(1 - \frac{2}{5}) = \frac{5}{3}$.

019 | RÉPONSE D

Énoncé →

Comme $\sec^2(x) = 1 + \tan^2(x)$, l'équation équivaut à $\tan^2(x) = \tan^2(y)$. Sur $[0, \pi/2[$, la tangente est positive ou nulle et strictement croissante. On obtient $x = y : R$ est la relation d'égalité, donc une équivalence.

020 | RÉPONSE C

Énoncé →

La somme $x + y$ est paire si et seulement si x et y ont la même parité. La relation possède deux classes, les entiers pairs et les entiers impairs. Elle est réflexive, symétrique et transitive.

021 | RÉPONSE B

Énoncé →

L'équation de A devient $|\sin(2x)| = 8/\pi^2$, qui admet 4 solutions dans $]0, \pi[$. Pour B , poser $t = \sqrt{x}$ et $u = |t - 2|$: on obtient $u^2 - 3u + 2 = 0$, donc $u = 1$ ou 2 . Ainsi $B = \{0, 1, 9, 16\}$. Aucun de ces nombres n'est dans A ; $\text{Card}(A \cup B) = 8$.

022 | RÉPONSE B

Énoncé →

L'égalité des secondes coordonnées définit une équivalence. La classe de (a, b) est $\{(x, b) : x \in \mathbb{R}\}$, c'est-à-dire la droite horizontale $y = b$. Elle n'est pas parallèle à $y = x$. I est vraie et II est fausse.

023 | RÉPONSE D

Énoncé →

Sur les axes, les deux conditions imposent $|x| + |y| = 3$. Ainsi $C = \{(3, 0), (-3, 0), (0, 3), (0, -3)\}$. Chacun des quatre points contribue 3 à la somme, qui vaut donc 12.

024 | RÉPONSE C

Énoncé →

Les liens $1R2$ et $2R3$ imposent une même classe $\{1, 2, 3\}$. Le point 4 forme une classe isolée. La plus petite équivalence contient $3^2 + 1^2 = 10$ couples. Comme R en contient déjà 3, il faut en ajouter 7.

025 | RÉPONSE B

Énoncé →

Une fraction réduite $\frac{m}{n}$ avec $m < n$ est déterminée de façon unique par son dénominateur n et un numérateur premier avec lui. Pour $n = 2, \dots, 10$, les nombres possibles sont 1, 2, 2, 4, 2, 6, 4, 6 et 4. Leur somme vaut 31.

026 | RÉPONSE C

Énoncé →

Une équivalence correspond à une partition. Sur trois éléments, on a une partition en trois singletons, trois partitions formées d'une paire et d'un singleton, et une partition en un seul bloc. Total : $1 + 3 + 1 = 5$.

027 | RÉPONSE C

Énoncé →

Modulo 2, la condition devient $ad - bc \equiv 0$: elle est réflexive et symétrique. Prendre $u = (3, 4)$, $v = (2, 4)$, $w = (2, 1)$. On a uRv et vRw , mais uRw est faux, car $3 \times 3 \times 1 - 7 \times 4 \times 2$ est impair. La transitivité échoue.

028 | RÉPONSE C

Énoncé →

Pour des x, y strictement positifs, les inégalités $4x > 5y$ et $4y > 5x$ ne peuvent être vraies simultanément. Toute paire est donc présente dans R dans au moins une orientation. La fermeture symétrique est $A^2 : m + n = 25$.

029 | RÉPONSE A

Énoncé →

Il y a 601 entiers de 100 à 700 inclus, dont 200 multiples de 3 et 151 multiples de 4. Les multiples de 12, comptés deux fois, sont au nombre de 50. Le nombre demandé vaut $601 - 200 - 151 + 50 = 300$.

030 | RÉPONSE D

Énoncé →

R_1 contient 6 couples et R_2 en contient 4. Aucune ne comporte de couple diagonal ni de paire de couples réciproques. Il faut donc ajouter respectivement 6 et 4 couples : $M + N = 10$.

031 | RÉPONSE D

Énoncé →

La réflexivité est immédiate. Pour la symétrie, $(1, 1)R(2, 2)$, mais pas l'inverse. Pour la transitivité, prendre $u = (2, 2)$, $v = (3, 1)$, $w = (1, 1)$. On a uRv par la première coordonnée et vRw par la seconde, mais pas uRw . Seule I est vraie.

032 | RÉPONSE C

Énoncé →

R_1 n'est pas réflexive, puisque $0^2 + 0^2 \neq 1$. Pour R_2 , réécrire $a + d = b + c$ sous la forme $a - b = c - d$. C' est l'égalité des valeurs de l'application $(a, b) \mapsto a - b$; elle définit une équivalence.

033 | RÉPONSE B

Énoncé →

Les relations imposées regroupent 1, 2 et 3 dans une même classe, tandis que 4 peut rester seul. La plus petite équivalence est $\{1, 2, 3\}^2 \cup \{(4, 4)\}$, de cardinal $9 + 1 = 10$.

034 | RÉPONSE B

Énoncé →

Le déterminant $ad - bc$ est nul sur la diagonale et change de signe quand on inverse les deux couples : R est réflexive et symétrique. Mais $(1, 0)R(0, 0)$ et $(0, 0)R(0, 1)$, tandis que $(1, 0)$ n'est pas relié à $(0, 1)$, car le déterminant vaut 1.

035 | RÉPONSE B

Énoncé →

On a $2^m - 2^n = 56 = 2^3 \times 7$. Dans $2^n(2^{m-n} - 1)$, le second facteur est impair ; donc $n = 3$ et $m = 6$. La distance vaut $\sqrt{(6+2)^2 + (3+3)^2} = \sqrt{100} = 10$.

036 | RÉPONSE A

Énoncé →

La symétrie de l'intersection donne celle de R . La réflexivité échoue pour $\emptyset$. La transitivité échoue avec $\{1\}$, $\{1, 2\}$ et $\{2\}$: les deux premières intersections successives sont non vides, mais $\{1\} \cap \{2\} = \emptyset$.

037 | RÉPONSE D

Énoncé →

Les choix de (a_1, b_2) et (a_2, b_1) sont indépendants. Il existe 16 couples $(a, b) \in A \times B$ vérifiant $a \leq b$ et 10 vérifiant $b \leq a$. Ainsi $\text{Card}(R) = 16 \times 10 = 160$.

038 | RÉPONSE C

Énoncé →

Le total des attributions est $48 + 25 + 18 = 91$. Par rapport aux 60 personnes, chaque double médaillé est compté une fois en trop, et chaque triple médaillé deux fois en trop. Si d est le nombre cherché, $91 - 60 = d + 2 \times 5$, donc $d = 21$.

039 | RÉPONSE C

Énoncé →

Dans $A \times B$, les couples où a divise b sont au nombre de $6 : 2$ divise 8 et 12 ; 3 divise 9 et 12 ; 4 divise 8 et 12. Les deux conditions portent sur des couples indépendants, donc $\text{Card}(R) = 6 \times 6 = 36$.

040 | RÉPONSE C

Énoncé →

La condition $x + y = 7$ est symétrique. Aucun x entier n'a $2x = 7 : R$ n'est pas réflexive. De plus, $1R6$ et $6R1$, mais $1R1$ est faux. R n'est donc pas transitive.

041 | RÉPONSE C

Énoncé →

La condition de R_1 signifie que la différence symétrique de A et B est vide, donc $A = B$. Pour R_2 , un élément de $A \setminus B$ serait dans $A \cup B^c$ mais pas dans $B \cup A^c$; de même pour $B \setminus A$. L'égalité impose donc aussi $A = B$. Les deux relations sont des équivalences.

042 | RÉPONSE D

Énoncé →

Pour $a = b$, l'expression vaut $\sqrt{7} : R$ est réflexive. Avec $a = \sqrt{7}/3, b = 0, aRb$ est vrai mais bRa est faux. Enfin, pour $a = 0, b = \sqrt{7}/6, c = \sqrt{7}/3$, les expressions des deux liens successifs valent $\sqrt{7}/2$, mais celle de aRc vaut 0. R n'est ni symétrique ni transitive.

043 | RÉPONSE D

Énoncé →

Si $a^2 - b^2$ est entier, son opposé $b^2 - a^2$ l'est aussi : T est symétrique. En revanche, $(-1, 3) \in S$ puisque $2 - \frac{1}{3} > 0$, alors que $(3, -1) \notin S$ puisque $2 - 3 < 0$. S n'est pas symétrique.

044 | RÉPONSE D

Énoncé →

Les entiers étant strictement positifs, diviser l'égalité par $abcd$. On obtient $(1/a - 1/b) = -(1/c - 1/d)$. La relation est donc symétrique. Pour $u = (1, 2)$ et $v = (2, 1)$, on a uRv et vRu , mais pas uRu . Cela exclut à la fois la réflexivité et la transitivité.

045 | RÉPONSE A

Énoncé →

La symétrie crée les liens de retour, puis la transitivité relie tous les éléments a, b, c entre eux et crée les diagonales. La fermeture est donc $\{a, b, c\}^2$, qui possède 9 couples. Deux étant déjà présents, il en faut 7 de plus.

046 | RÉPONSE A

Énoncé →

Modulo 5, $2a + 3b \equiv 2(a - b)$. Comme 2 est inversible modulo 5, la condition équivaut à $a \equiv b$ modulo 5. La congruence est une relation d'équivalence.

047 | RÉPONSE D

Énoncé →

On a $(2, 1) \in R$, mais $(1, 2) \notin R$ à cause de $2a = b$: la symétrie échoue. Par ailleurs, $(2, 3)$ et $(3, 2)$ sont dans R , mais $(2, 2)$ n'y est pas puisque $\text{pgcd}(2, 2) = 2$. La transitivité échoue.

048 | RÉPONSE B

Énoncé →

Les valeurs admissibles de b sont 9, 15, 21, 25, 33, 35, 39, 49, 51, 55 et 57 : il y en a 11. Chaque valeur peut être associée à chacun des 60 choix de a . Ainsi $\text{Card}(R) = 60 \times 11 = 660$.

049 | RÉPONSE D

Énoncé →

La réflexivité impose $3 + \alpha \equiv 0$ modulo 7, en prenant $x = y = 1$. Donc $\alpha \equiv 4$ modulo 7. Réciproquement, avec cette condition, $3x + \alpha y \equiv 3(x - y)$ modulo 7 : la relation devient la congruence modulo 7, qui est une équivalence.

050 | RÉPONSE D

Énoncé →

R_1 n'est pas transitive : $1R_1 0$ et $0R_1(-1)$, mais pas $1R_1(-1)$. R_2 n'est pas symétrique : $2 \geq 1$, mais $1 \geq 2$ est faux. Aucune des deux relations n'est une équivalence.

051 | RÉPONSE D

Énoncé →

Deux éléments sont en relation lorsqu'ils appartiennent au même bloc A_i . Cette condition est réflexive et symétrique. Si x et y sont dans un même bloc, puis y et z dans un même bloc, la disjonction des blocs impose que ce soit le même ; x et z sont donc reliés.

052 | RÉPONSE B

Énoncé →

Pour R_1 , les nombres 1, 14, 27 donnent deux écarts de 13, puis un écart de 26 : la transitivité échoue. Pour R_2 , prendre 1, 2, 14 : les deux premiers écarts valent 1 et 12, mais le dernier vaut 13. Aucune des deux n'est une équivalence.

053 | RÉPONSE B

Énoncé →

L'affirmation B attribue à tort la transitivité à $0 < |x - y| \leq 1$. En effet, $0R1$ et $1R0$, mais $0R0$ est faux puisque l'écart nul est exclu. La relation est bien symétrique, ce qui ne suffit pas à la rendre transitive.

054 | RÉPONSE C

Énoncé →

L'inclusion-exclusion impose $K \geq 89 + 98 - 100 = 87$, et l'intersection ne peut dépasser 89 %. Donc $87 \leq K \leq 89$. Parmi les ensembles proposés, seul $\{79, 81, 83, 85\}$ ne contient aucune valeur admissible.

055 | RÉPONSE B

Énoncé →

Factoriser : $x^3 - 3x^2y - xy^2 + 3y^3 = (x - 3y)(x - y)(x + y)$. Sur $\mathbb{N}$, on a donc $x = y$ ou $x = 3y$. R est réflexive ; $3R1$ mais pas $1R3$, donc non symétrique ; $9R3$ et $3R1$ mais pas $9R1$, donc non transitive.

056 | RÉPONSE D

Énoncé →

Pour la réflexivité, choisir $P = I$. Si $B = PAP^{-1}$, alors $A = P^{-1}BP$, ce qui donne la symétrie. Si $C = QBQ^{-1}$, alors $C = (QP)A(QP)^{-1}$, d'où la transitivité. La similitude des matrices est une équivalence.

057 | RÉPONSE B

Énoncé →

Dans chacun des diagrammes P, Q et R , il existe une zone commune aux trois cercles. Ils ne représentent donc pas la condition « aucun élève ne pratique les trois jeux ». La réponse est : aucun de ces diagrammes.

058 | RÉPONSE D

Énoncé →

Un couple (c, d) de la classe de $(4, 3)$ vérifie $4d = 3c$. Comme 4 et 3 sont premiers entre eux, $c = 4k$ et $d = 3k$. Les bornes $2 \leq c, d \leq 30$ donnent $k = 1, \dots, 7$. La classe contient donc 7 couples.

059 | RÉPONSE B

Énoncé →

L'égalité impose $|x| > 3$. Sur $x > 3$, elle devient $x^2 + x - 18 = 0$ et donne une solution admissible, $(-1 + \sqrt{73})/2$. Sur $x < -4$, elle devient $x^2 + 7x + 6 = 0$ et donne $x = -6$. Sur $] -4, -3[$, le produit est au plus $\frac{1}{4}$. Il y a donc 2 solutions.

060 | RÉPONSE B

Énoncé →

La distance de $(1, -1)$ à l'origine vaut $\sqrt{2}$. Les points de sa classe vérifient donc $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2}$, soit $x^2 + y^2 = 2$. C' est le cercle de centre l'origine et de rayon $\sqrt{2}$.

061 | RÉPONSE B

Énoncé →

L'intersection vérifie $73 + 65 - 100 \leq x \leq \min(73, 65)$, soit $38 \leq x \leq 65$. Parmi les valeurs proposées, 36 est la seule impossible.

062 | RÉPONSE A

Énoncé →

Compter les appartenances aux X_i de deux façons : $50 \times 10 = 20 \text{ Card}(T)$, donc $\text{Card}(T) = 25$. Pour les Y_i , on a $5n = 6 \text{ Card}(T) = 150$. Ainsi $n = 30$.

063 | RÉPONSE D

Énoncé →

Pour deux ensembles de pourcentages 63 et 76, l'intersection est comprise entre $63 + 76 - 100 = 39$ et $\min(63, 76) = 63$. Seule la valeur 55 appartient à cet intervalle.

064 | RÉPONSE A

Énoncé →

Pour R_1 , prendre $a = c = \sqrt{\sqrt{2}}$ et $b = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$. Les sommes successives valent 2, mais $a^2 + c^2 = 2\sqrt{2}$ est irrationnel. Pour R_2 , prendre $a = c = 0$ et $b = \sqrt{\sqrt{2}}$: les sommes successives sont irrationnelles, tandis que $a^2 + c^2 = 0$. Aucune relation n'est transitive.

065 | RÉPONSE D

Énoncé →

Le discriminant vaut $(m+1)^2 - 4(m+4) = (m-5)(m+3)$. Ainsi $A =] -\infty, -3] \cup [5, +\infty[$. On en déduit $A \setminus B =] -\infty, -3] \cup [5, +\infty[$. La proposition D oublie le point 5 et est fausse.

066 | RÉPONSE C

Énoncé →

Le domaine de R^{-1} est l'ensemble image de R . Une valeur entière y est possible si $3y^2 \leq 8$, en prenant $x = 0$. Donc $y \in \{-1, 0, 1\}$. Toute autre valeur de y est impossible.

067 | RÉPONSE D

Énoncé →

On a $A =]-2, 2[$ et $B =]-\infty, -1] \cup [5, +\infty[$. Retirer A de B donne $] -\infty, -2] \cup [5, +\infty[$, soit $\mathbb{R} \setminus]-2, 5[$. Attention : le point -1 appartient à B et le point 2 n'appartient pas à A .

068 | RÉPONSE D

Énoncé →

Pour réfuter D , choisir $A = C = \{1, 2\}$ et $B = \{1\}$. On a $\emptyset \neq A \cap B \subseteq C$ et $A \setminus C = \emptyset \subseteq B$, mais $A \subseteq B$ est faux. Les trois autres affirmations découlent de $A \cap B \subseteq C$ et de la décomposition de A en $A \setminus B$ et $A \cap B$.

069 | RÉPONSE D

Énoncé →

Les lecteurs de A seulement représentent $25 - 8 = 17\%$, ceux de B seulement $20 - 8 = 12\%$. Le pourcentage demandé est $0,30 \times 17 + 0,40 \times 12 + 0,50 \times 8 = 5,1 + 4,8 + 4 = 13,9\%$.

070 | RÉPONSE D

Énoncé →

Comme la base est 2, l'exposant doit être nul : $(x+2)(x-2)(x-3) = 0$. Donc $A = \{-2, 2, 3\}$. L'inégalité de B équivaut à $-1 < x < 5$, donc $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. $A \times B$ contient 15 éléments et possède 2^{15} parties.

071 | RÉPONSE B

Énoncé →

Un produit est impair si tous les éléments choisis sont impairs. S contient 50 nombres impairs. Parmi les 2^{100} parties, les 2^{50} parties formées uniquement d'impairs comprennent aussi la partie vide. Les parties de produit pair sont donc $2^{100} - 2^{50} = 2^{50}(2^{50} - 1)$.

072 | RÉPONSE D

Énoncé →

Compter l'union des multiples de 2, 3 et 5 : $70 + 46 + 28 - 23 - 14 - 9 + 4 = 102$. Les termes soustraits correspondent aux multiples de 6, 10 et 15, puis on rétablit ceux de 30. Il reste $140 - 102 = 38$ élèves.

073 | RÉPONSE B

Énoncé →

Dans R_2 , $x = 10 - 2y$ doit être strictement positif, donc $y = 1, 2, 3$ ou 4 ; toutes ces valeurs conviennent. L'ensemble image de R_1 est $\{2, 4, 6, 8\}$, et non $\{2, 4, 8\}$. La proposition B est correcte.

074 | RÉPONSE C

Énoncé →

Pour $(a, b) \in A$, on a $4 < a < 6$ et $4 < b < 6$. Donc $4(a-6)^2 + 9(b-5)^2 < 16 + 9 = 25 < 36 : A \subset B$. L'inclusion est stricte, puisque $(6, 5)$ appartient à B mais pas à A .

075 | RÉPONSE C

Énoncé →

Dans R_2 , chaque couple a son réciproque, donc la relation est symétrique. Mais (b, a) et (a, c) sont présents sans (b, c) , donc elle n'est pas transitive. Pour R_1 , (b, c) n'a pas de réciproque et la chaîne $bRcRa$ ne donne pas bRa .

076 | RÉPONSE D

Énoncé →

L'équation de P donne $\sin(\theta) = (1 + \sqrt{2}) \cos(\theta)$. Celle de Q donne $\cos(\theta) = (\sqrt{2} - 1) \sin(\theta)$. Comme $(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) = 1$, ces deux équations sont équivalentes. Ainsi $P = Q$.

077 | RÉPONSE A[Énoncé →](#)

$A \times B$ possède $4 \times 2 = 8$ éléments. Sur ses $2^8 = 256$ parties, retirer la partie vide, les 8 singletons et les $C(8, 2) = 28$ paires. Le nombre de parties d'au moins trois éléments vaut $256 - 1 - 8 - 28 = 219$.

078 | RÉPONSE A[Énoncé →](#)

Chaque élément de X a trois positions possibles : dans Y seulement, dans Z seulement, ou dans aucun des deux. L'appartenance simultanée est interdite. Ces choix étant indépendants pour les cinq éléments, le nombre de couples vaut 3^5 .

079 | RÉPONSE B[Énoncé →](#)

I est vraie : une différence entière définit une congruence additive, réflexive, symétrique et transitive. II est fausse sur $\mathbb{R}$ à cause de 0 : le couple $(0, 1)$ est admis avec $\alpha = 0$, mais $(1, 0)$ est impossible. B n'est donc pas symétrique.

080 | RÉPONSE C[Énoncé →](#)

La relation R n'est pas symétrique : $0 = 0 \times 1$, mais 1 ne peut être un multiple rationnel de 0. Pour S , la condition $qm = pn$ est précisément $\frac{m}{n} = p/q$. S est donc la relation d'égalité sur $\mathbb{Q}$, et c'est une équivalence.

081 | RÉPONSE B[Énoncé →](#)

L'égalité des intersections impose que B et C coïncident à l'intérieur de A . L'égalité des unions impose qu'ils coïncident hors de A : $B \setminus A = C \setminus A$. En réunissant les parties intérieure et extérieure, on obtient $B = C$.

082 | RÉPONSE D[Énoncé →](#)

S n'est pas réflexive puisque ses couples vérifient $y = x + 1$. Pour T , $x - y$ entier reste vrai en changeant de signe et en additionnant deux différences. La relation T est donc réflexive, symétrique et transitive.

083 | RÉPONSE A[Énoncé →](#)

Un mot partage ses lettres avec lui-même et le partage est symétrique. Mais «cat» et «tap» ont une lettre commune, de même que «tap» et «pen», tandis que «cat» et «pen» n'en ont aucune. La transitivité échoue.

084 | RÉPONSE D[Énoncé →](#)

R est exactement la divisibilité restreinte à $\{3, 6, 9, 12\}$. Tout élément se divise lui-même et la divisibilité est transitive. Elle n'est pas symétrique : 3 divise 6, mais 6 ne divise pas 3.

085 | RÉPONSE C[Énoncé →](#)

Le couple $(2, 3)$ appartient à R , alors que $(3, 2)$ n'y appartient pas : R n'est pas symétrique. Ce n'est pas une application, car 2 a deux images. La réflexivité échoue et la chaîne $1R3R1$ ne donne pas $1R1$.

086 | RÉPONSE 15

Énoncé →

Comme $7 < e^2 < 8$, la condition équivaut à $x + y \leq 7$. Les coordonnées possibles vont de 1 à 6, et R contient $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$ couples. Pour tous $i, j \in \{1, \dots, 6\}$, $iR1$ et $1Rj$; la transitivité impose donc les 36 couples. Il faut en ajouter $36 - 21 = 15$.

087 | RÉPONSE 18

Énoncé →

Les sommes $a + b$ prennent les valeurs 3, 4, 6, 7, 9, 10, 12, 15, avec multiplicité 2 pour 9 et 1 pour les autres. Pour chaque somme s , compter les sommes multiples de s en tenant compte des multiplicités. Les contributions sont 6, 2, 2, 1, 4, 1, 1, 1, soit 18 couples.

088 | RÉPONSE 120

Énoncé →

Dans A^2 , les couples (x, z) tels que x divise z sont au nombre de $3 + 2 + 1 + 1 + 1 = 8$. Indépendamment, les couples (y, w) avec $y \leq w$ sont au nombre de $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$. Ainsi $\text{Card}(R) = 8 \times 15 = 120$.

089 | RÉPONSE 1979

Énoncé →

Dans $\{1, \dots, 11\}$, il y a 6 impairs et 5 pairs. Les parties contenant au moins un pair sont au nombre de $2^{11} - 2^6 = 1\,984$. Pour imposer au moins deux éléments, retirer les cinq singletons pairs. On obtient $1\,984 - 5 = 1\,979$.

090 | RÉPONSE 6

Énoncé →

Les trois diagonales sont imposées. Les six choix possibles de couples hors diagonale sont : $\{(1, 2)\}$; $\{(1, 2), (1, 3)\}$; $\{(1, 2), (3, 2)\}$; $\{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$; $\{(1, 2), (1, 3), (3, 2)\}$; $\{(1, 2), (3, 1), (3, 2)\}$. Chacun donne une relation transitive non symétrique d'au plus 6 couples. Les autres choix violent l'une des conditions.

091 | RÉPONSE 13

Énoncé →

Noter u_n le nombre de parties admissibles. Celles qui ne contiennent pas n sont comptées par u_{n-1} . Celles qui le contiennent excluent $n-1$ et sont comptées par u_{n-2} . Donc $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$, avec $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$. On obtient $u_2 = 3, u_3 = 5, u_4 = 8$ et $u_5 = 13$.

092 | RÉPONSE 5120

Énoncé →

Fixer x parmi les dix nombres premiers. Pour que x divise y , inclure x dans le produit; chacun des neuf autres nombres premiers est choisi ou non. Cela donne 2^9 possibilités. L'unicité de la factorisation garantit des produits distincts. Total : $10 \times 2^9 = 5\,120$.

093 | RÉPONSE 3

Énoncé →

Aux trois diagonales et aux deux couples imposés, la transitivité ajoute $(1, 3)$. On peut ensuite n'ajouter aucun couple, ajouter seulement $(2, 1)$, ou ajouter seulement $(3, 2)$. Ajouter $(3, 1)$, ou ajouter les deux autres à la fois, impose la relation complète, qui serait symétrique. Il reste 3 relations.

094 | RÉPONSE 25

Énoncé →

Compter les représentations d'une même somme dans A^2 et dans B^2 . Les sommes communes sont 8, 9, 10, 12, 13, 14. Leurs contributions valent $2 \times 1, 4 \times 2, 2 \times 3, 1 \times 3, 2 \times 2, 1 \times 2$. Le total est $2 + 8 + 6 + 3 + 4 + 2 = 25$.

095 | RÉPONSE 45

Énoncé →

L' union contient 210 élèves. Si t est le triple effectif, l'inclusion-exclusion donne $t = 330 - (M + P + C)$. Le maximum de cette somme est 315, d'où $t \geq 15$. De plus, $t \leq 30$, car il ne dépasse pas l'intersection physique-chimie. Les valeurs 15 et 30 sont réalisables, respectivement avec $(M, P, C) = (130, 95, 90)$ et $(125, 90, 85)$. Donc $m + n = 45$.

096 | RÉPONSE 46

Énoncé →

R_1 compte $\sum_{a=1}^{20} \lfloor 20/a \rfloor = 66$ couples. Pour des entiers strictement positifs, a divise b et b divise a équivaut à $a = b$. L'intersection $R_1 \cap R_2$ comprend donc les 20 diagonales. Ainsi $\text{Card}(R_1 \setminus R_2) = 66 - 20 = 46$.

097 | RÉPONSE 66

Énoncé →

Les couples de R sont $(3k, 2k)$, avec $k = 1, \dots, 33$. Il y en a 33. Aucun n'est diagonal et aucun réciproque n'est déjà présent. La plus petite relation symétrique contenant R possède donc $2 \times 33 = 66$ couples.

098 | RÉPONSE 16

Énoncé →

Les liens donnés rassemblent 1, 2, 3 et 4 dans une seule classe. Toute équivalence contenant R doit donc contenir A^2 . Son cardinal minimal est $4^2 = 16$.

099 | RÉPONSE 960

Énoncé →

Une relation symétrique sur quatre éléments se choisit par 4 diagonales et 6 paires réciproques, soit 2^{10} relations. Parmi elles, 2^6 sont réflexives, les diagonales étant imposées. Le nombre demandé vaut $2^{10} - 2^6 = 1024 - 64 = 960$.

100 | RÉPONSE 15

Énoncé →

Modulo 7, les puissances de 3 ont une période de 6. On a $3^n \equiv 3$ si et seulement si $n \equiv 1$ modulo 6. Entre 10 et 100, les valeurs sont 13, 19, ..., 97. Il y en a $(97 - 13)/6 + 1 = 15$.

101 | RÉPONSE 6

Énoncé →

Regrouper les couples selon les valeurs de $2a + 3b$ et $4c + 5d$. Les valeurs communes sont 9, 13, 14, 17 et 18. La valeur 14 apparaît deux fois du premier côté ; chacune des autres apparaît une fois. Le second côté offre un couple pour chaque valeur. Total : $1 + 1 + 2 + 1 + 1 = 6$.

102 | RÉPONSE 7

Énoncé →

Il manque les diagonales $(-4, -4), (-3, -3), (-2, -2)$. Pour la symétrie, il faut ajouter $(4, -4), (3, -3), (-2, 3)$ et $(1, 0)$. Ces sept couples sont distincts et suffisent à obtenir une relation à la fois réflexive et symétrique.

103 | RÉPONSE 3

Énoncé →

C' est le même problème que la question 93, conservé avec sa numérotation. Après avoir imposé les diagonales et $(1, 3)$, on a trois possibilités : aucun ajout, ajout de $(2, 1)$, ou ajout de $(3, 2)$. Toute autre possibilité admissible rend la relation symétrique. Réponse : 3.

104 | RÉPONSE 6

Énoncé →

Écrire $n^2 - 10n + 19 = (n - 5)^2 - 6$. L'inégalité devient $0 < (n - 5)^2 < 12$. Donc $n - 5$ vaut $\pm 1, \pm 2$ ou ± 3 , soit $n \in \{2, 3, 4, 6, 7, 8\}$. Il y a 6 éléments.

105 | RÉPONSE 19

Énoncé →

A contient 5 nombres pairs et 3 impairs. Chaque paire de parités opposées donne exactement un écart impair positif, soit 15 couples. Les écarts égaux à 2 ajoutent $(6, 4), (8, 6), (9, 7), (10, 8)$, soit 4 couples. Tous sont orientés du plus grand vers le plus petit : leurs 19 réciproques manquent.

106 | RÉPONSE 18

Énoncé →

Poser $d = a - b$. Pour un entier d , la condition $2d^2 + 3d \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ donne $d = 0$ ou $d = -2$. La première valeur fournit 10 couples diagonaux ; la seconde, 8 couples avec $b = a + 2$. Total : 18.

107 | RÉPONSE 43

Énoncé →

Modulo 3, S contient un élément de reste 0, trois de reste 1 et trois de reste 2. Si i et j sont les nombres choisis dans les deux derniers groupes, il faut $i \equiv j$ modulo 3. On obtient $\sum_{i=0}^3 C(3, i)^2 + 2 = 22$ choix. L'élément de reste 0 peut être pris ou non : 44 parties, dont la vide. Réponse : 43.

108 | RÉPONSE 13

Énoncé →

Les liens donnés relient les quatre éléments dans une seule composante ; une équivalence contenant R doit donc avoir une classe unique. Elle contient $4^2 = 16$ couples. Comme 3 sont déjà présents, il faut en ajouter 13.

109 | RÉPONSE 11

Énoncé →

Les nombres 9 et 10 sont représentables, mais pas 11. Les nombres 12, 13, 14 et 15 le sont : $12 = 6 + 6$, $13 = 9 + 4$, $14 = 6 + 4 + 4$, $15 = 9 + 6$. Ajouter 4 permet ensuite de représenter tous les entiers supérieurs. Ainsi $T \setminus A = \{11\}$, de somme 11.

110 | RÉPONSE 112

Énoncé →

Seuls 3, 6 et 7 peuvent appartenir à $C \cap B$, puisque $9 \notin A$. Sur les 2^7 parties de A , les parties ne contenant aucun de ces trois éléments sont les 2^4 parties de $\{1, 2, 4, 5\}$. Le nombre demandé vaut $128 - 16 = 112$.

111 | RÉPONSE 107

Énoncé →

Le complémentaire de B est formé des parties contenant 1 mais pas 2, soit $2^5 = 32$ parties. Donc $\text{Card}(B) = 96$. Parmi ces 32 parties, 11 ont une somme première et appartiennent à C ; on les compte en choisissant les éléments de $\{3, 4, 5, 6, 7\}$ à ajouter à 1. Ainsi $\text{Card}(B \cup C) = 96 + 11 = 107$.

112 | RÉPONSE 8

Énoncé →

Après retrait de R_2 , seuls les exposants $n \geq 2$ restent. Pour $p = 2 : 4, 8, 16, 32$; pour $p = 3 : 9, 27$; pour $p = 5 : 25$; pour $p = 7 : 49$. Les autres carrés premiers dépassent 50. On compte $4 + 2 + 1 + 1 = 8$ couples.

113 | RÉPONSE 5264

Énoncé →

Les éléments de B sont les nombres pairs de 2 à 200. Il faut retirer ceux divisibles par 3 ou par 5, donc les multiples de 6 ou de 10, puis rétablir ceux de 30. La somme vaut $10\,100 - 3\,366 - 2\,100 + 630 = 5\,264$.

114 | RÉPONSE 1100

Énoncé →

Pour tout couple (i, j) , $\min(i, j) + \max(i, j) = i + j$. Chaque valeur de i apparaît dix fois et il en va de même pour j . Donc $A + B = 10(1 + \dots + 10) + 10(1 + \dots + 10) = 20 \times 55 = 1\,100$.

115 | RÉPONSE 1633

Énoncé →

Être premier avec 24 revient à n'être divisible ni par 2 ni par 3. La somme cherchée vaut la somme de 1 à 100, moins celles des multiples de 2 et de 3, plus celle des multiples de 6. On obtient $5\,050 - 2\,550 - 1\,683 + 816 = 1\,633$.

116 | RÉPONSE 256

Énoncé →

On a $A =]-\infty, 1[\cup]3, +\infty[$, $B =]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$ et $C =]-\infty, 2] \cup [6, +\infty[$. Donc $A \cap B \cap C =]-\infty, -2[\cup [6, +\infty[$. Son complémentaire est $[-2, 6[$, qui contient les huit entiers de -2 à 5 . Le nombre de parties est $2^8 = 256$.

117 | RÉPONSE 832

Énoncé →

L'inégalité $n^2 \leq n + 10\,000$ donne $A = \{1, \dots, 100\}$. Dans $B \setminus C$, on garde les nombres $3k + 1$ impairs, avec $k \geq 1$. Il s'agit de 7, 13, 19, ..., 97, soit 16 termes. Leur somme vaut $16(7 + 97)/2 = 832$.

118 | RÉPONSE 5

Énoncé →

$A \cap B$ est la progression 101, 110, ..., 992, de somme 54 650. Si ℓ n'est pas entier, C n'apporte aucun entier; si $\ell = 2$, il n'apporte rien de nouveau. Sinon, pour $\ell \in \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, la somme de $A \cap C$ vaut $54\,450 + 100\ell$. L'égalité $109\,100 + 100\ell = 274 \times 400$ donne $\ell = 5$.

119 | RÉPONSE 28

Énoncé →

On a $2^m - 2^n = 112 = 2^4 \times 7$. Factoriser en $2^n(2^{m-n} - 1)$, dont le second facteur est impair. Ainsi $n = 4$ et $2^{m-n} - 1 = 7$, donc $m - n = 3$ et $m = 7$. Le produit mn vaut 28.

120 | RÉPONSE 29

Énoncé →

Le plus petit ensemble contenant A et B est $A \cup B$. Dans $\{1, \dots, 50\}$, on compte 25 multiples de 2, 7 multiples de 7 et 3 multiples communs, ceux de 14. Donc $\text{Card}(A \cup B) = 25 + 7 - 3 = 29$.