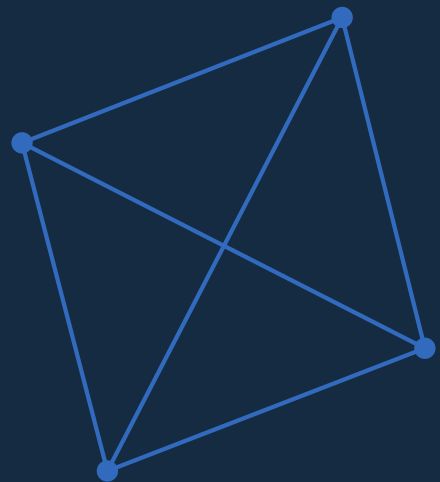


MATHS OLYMPIAD

COLLECTION D'ENTRAÎNEMENT / ADAPTATION FRANÇAISE

Identités trigonométriques

Angles, transformations & équations



69

problèmes • énoncés et réponses

Comprendre. Chercher. Progresser.

Lycée avancé • préparation au supérieur

Votre parcours d'entraînement

Ce livret reprend les **69 problèmes** du document transmis, dans leur ordre d'origine. Les consignes sont traduites en français ; les données, les notations et les choix de réponse sont conservés.

Les formules et les figures font partie intégrante des énoncés. Les lettres des choix de réponse restent A, B, C et D.

Notations. Les angles sont en radians sauf indication de degrés. Les notations $\sec$, $\csc$ et $\cot$ désignent respectivement $1/\cos$, $1/\sin$ et $\cos/\sin$. Dans le livret de trigonométrie réciproque, $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ et $\tan^{-1}$ désignent arcsin, arccos et arctan ; il ne s'agit pas de puissances.

Mode d'emploi. Cherchez d'abord sans consulter la grille. Justifiez votre réponse, puis comparez-la à la réponse fournie. Reprenez ensuite les questions qui vous ont résisté.

À la fin du livret. La grille reproduit les réponses du document fourni. Elle ne constitue pas un corrigé détaillé. Un tiret signale une réponse qui n'était pas précisée dans ce document.

Repères dans le livret

Questions à choix multiples · problèmes 1 à 60

Réponses numériques · problèmes 61 à 69

Questions à choix multiples

PROBLÈME 001

Soient $\tan A$ et $\tan B$ les racines de $x^2 - 2x - 5 = 0$, avec $A, B \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Alors $20\sin^2(\frac{A+B}{2})$ vaut :

- (A) $10 + \sqrt{10}$ (B) $10 - 2\sqrt{10}$ (C) $10 - 3\sqrt{10}$ (D) $10 - \sqrt{10}$

PROBLÈME 002

On considère $P = \{\theta \in [0, 4\pi] : \tan^2 \theta \neq 1\}$ et $S = \{a \in \mathbb{Z} : 2(\cos^8 \theta - \sin^8 \theta) \sec 2\theta = a^2, \theta \in P\}$. Alors $n(S)$ vaut :

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

PROBLÈME 003

Si $\sin(\frac{\pi}{18}) \sin(\frac{5\pi}{18}) \sin(\frac{7\pi}{18}) = K$, alors la valeur de $\sin(\frac{10K\pi}{3})$ est :

- (A) $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ (B) $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) $\frac{1}{2}$

PROBLÈME 004

Si $\frac{\tan(A-B)}{\tan A} + \frac{\sin^2 C}{\sin^2 A} = 1$, $A, B, C \in (0, \frac{\pi}{2})$, alors :

- (A) $\tan A, \tan C, \tan B$ sont en progression arithmétique.
 (B) $\tan A, \tan C, \tan B$ sont en progression géométrique.
 (C) $\tan A, \tan B, \tan C$ sont en progression géométrique.
 (D) $\tan A, \tan B, \tan C$ sont en progression arithmétique.

PROBLÈME 005

La valeur de $\frac{\sqrt{3} \operatorname{cosec} 20^\circ - \sec 20^\circ}{\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ}$ vaut :

- (A) 32 (B) 64 (C) 12 (D) 16

PROBLÈME 006

Si $\cot x = \frac{5}{12}$ pour un certain $x \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$, alors $\sin 7x (\cos \frac{13x}{2} + \sin \frac{13x}{2}) + \cos 7x (\cos \frac{13x}{2} - \sin \frac{13x}{2})$ vaut

- (A) $\frac{5}{\sqrt{13}}$ (B) $\frac{6}{\sqrt{26}}$ (C) $\frac{4}{\sqrt{26}}$ (D) $\frac{1}{\sqrt{13}}$

PROBLÈME 007

On considère $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ et $\cot \theta = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$. Alors la valeur de $\sin(\frac{15\theta}{2})(\cos 8\theta + \sin 8\theta) + \cos(\frac{15\theta}{2})(\cos 8\theta - \sin 8\theta)$ vaut :

- (A) $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ (C) $\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ (D) $-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

PROBLÈME 008

La valeur de $\operatorname{cosec} 10^\circ - \sqrt{3} \sec 10^\circ$ vaut :

- (A) 2 (B) 6 (C) 8 (D) 4

PROBLÈME 009

Si, pour $\theta \in [-\frac{\pi}{3}, 0]$, les points $(x, y) = (3 \tan(\theta + \frac{\pi}{3}), 2 \tan(\theta + \frac{\pi}{6}))$ appartiennent à $xy + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$, alors $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ vaut :

- (A) 75 (B) 96 (C) 80 (D) 72

PROBLÈME 010

Si $10 \sin^4 \theta + 15 \cos^4 \theta = 6$, alors la valeur de $\frac{27 \operatorname{cosec}^6 \theta + 8 \sec^6 \theta}{16 \sec^8 \theta}$ est

- (A) $\frac{2}{5}$ (B) $\frac{3}{5}$ (C) $\frac{1}{5}$ (D) $\frac{3}{4}$

PROBLÈME 011

Si $\sin x + \sin^2 x = 1$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, alors

$(\cos^{12} x + \tan^{12} x) + 3(\cos^{10} x + \tan^{10} x + \cos^8 x + \tan^8 x) + (\cos^6 x + \tan^6 x)$ vaut :

- (A) 3 (B) 4 (C) 2 (D) 1

PROBLÈME 012

Si $\sum_{r=1}^{13} \left\{ \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{4} + (r-1)\frac{\pi}{6}) \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{r\pi}{6})} \right\} = a\sqrt{3} + b$, $a, b \in \mathbb{Z}$, alors $a^2 + b^2$ vaut :

- (A) 10 (B) 4 (C) 8 (D) 2

PROBLÈME 013

L'ensemble des valeurs prises par la fonction

$f(x) = 6 + 16 \cos x \cdot \cos(\frac{\pi}{3} - x) \cdot \cos(\frac{\pi}{3} + x) \cdot \sin 3x \cdot \cos 6x$, $x \in \mathbb{R}$ est $[\alpha, \beta]$. Alors la distance du point (α, β) à la droite $3x + 4y + 12 = 0$ vaut :

- (A) 11 (B) 10 (C) 8 (D) 9

PROBLÈME 014

La valeur de $(\sin 70^\circ)(\cot 10^\circ \cot 70^\circ - 1)$ vaut :

- (A) 0 (B) $\frac{2}{3}$ (C) 1 (D) $\frac{3}{2}$

PROBLÈME 015

Si $\frac{3\cos 36^\circ + 5\sin 18^\circ}{5\cos 36^\circ - 3\sin 18^\circ} = \frac{a\sqrt{5} - b}{c}$, où a, b, c sont des entiers naturels et $\operatorname{pgcd}(a, c) = 1$, alors $a + b + c$ vaut :

- (A) 54 (B) 52 (C) 50 (D) 40

PROBLÈME 016

Si $\sin x = -\frac{3}{5}$, où $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, alors $80(\tan^2 x - \cos x)$ vaut :

- (A) 109 (B) 108 (C) 19 (D) 18

PROBLÈME 017

Supposons que $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$ soit une solution de $4 \cos \theta - 3 \sin \theta = 1$. Alors $\cos \theta$ vaut :

- (A) $\frac{6-\sqrt{6}}{(3\sqrt{6}-2)}$ (B) $\frac{4}{(3\sqrt{6}+2)}$
 (C) $\frac{6+\sqrt{6}}{(3\sqrt{6}+2)}$ (D) $\frac{4}{(3\sqrt{6}-2)}$

PROBLÈME 018

Si $\tan A = \frac{1}{\sqrt{x(x^2+x+1)}}$, $\tan B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+x+1}}$ et $\tan C = (x^{-3} + x^{-2} + x^{-1})^{1/2}$, $0 < A, B, C < \frac{\pi}{2}$, alors $A + B$ vaut :

- (A) C (B) $\pi - C$ (C) $2\pi - C$ (D) $\frac{\pi}{2} - C$

PROBLÈME 019

Le nombre de solutions de l'équation $e^{\sin x} - 2e^{-\sin x} = 2$ vaut :

- (A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) plus de 2

PROBLÈME 020

Pour $\alpha, \beta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a $3\sin(\alpha + \beta) = 2\sin(\alpha - \beta)$. Si le réel k vérifie $\tan \alpha = k \tan \beta$, alors k vaut :

- (A) 5 (B) $-2/3$ (C) -5 (D) $2/3$

PROBLÈME 021

$96 \cos \frac{\pi}{33} \cos \frac{2\pi}{33} \cos \frac{4\pi}{33} \cos \frac{8\pi}{33} \cos \frac{16\pi}{33}$ vaut :

- (A) 4 (B) 2 (C) 1 (D) 3

PROBLÈME 022

La valeur de $36(4 \cos^2 9^\circ - 1)(4 \cos^2 27^\circ - 1)(4 \cos^2 81^\circ - 1)(4 \cos^2 243^\circ - 1)$ vaut :

- (A) 18 (B) 36 (C) 54 (D) 27

PROBLÈME 023

Si $\tan 15^\circ + \frac{1}{\tan 75^\circ} + \frac{1}{\tan 105^\circ} + \tan 195^\circ = 2a$, alors la valeur de $(a + \frac{1}{a})$ est :

- (A) $5 - \frac{3}{2}\sqrt{3}$ (B) $4 - 2\sqrt{3}$ (C) 2 (D) 4

PROBLÈME 024

L'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles l'équation $\cos^2 2x - 2\sin^4 x - 2\cos^2 x = \lambda$ admet une solution réelle x , est :

- (A) $[-2, -1]$ (B) $[-\frac{3}{2}, -1]$
(C) $[-2, -\frac{3}{2}]$ (D) $[-1, -\frac{1}{2}]$

PROBLÈME 025

On considère $f(\theta) = 3(\sin^4(\frac{3\pi}{2} - \theta) + \sin^4(3\pi + \theta)) - 2(1 - \sin^2 2\theta)$ et $S = \{\theta \in [0, \pi] : f'(\theta) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\}$. Si $4\beta = \sum_{\theta \in S} \theta$, alors $f(\beta)$ vaut

- (A) $\frac{9}{8}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{5}{4}$ (D) $\frac{11}{8}$

PROBLÈME 026

$2 \sin\left(\frac{\pi}{22}\right) \sin\left(\frac{3\pi}{22}\right) \sin\left(\frac{5\pi}{22}\right) \sin\left(\frac{7\pi}{22}\right) \sin\left(\frac{9\pi}{22}\right)$ vaut :

- (A) $\frac{3}{16}$ (B) $\frac{1}{16}$ (C) $\frac{1}{32}$ (D) $\frac{9}{32}$

PROBLÈME 027

Si $\cot \alpha = 1$ et $\sec \beta = -\frac{5}{3}$, où $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$, alors la valeur de $\tan(\alpha + \beta)$ et le quadrant auquel $\alpha + \beta$ appartient valent respectivement:

- (A) $-\frac{1}{7}$ et quatrième quadrant.
 (B) 7 et premier quadrant.
 (C) -7 et quatrième quadrant.
 (D) $\frac{1}{7}$ et premier quadrant.

PROBLÈME 028

$\alpha = \sin 36^\circ$ est une racine de laquelle des équations suivantes ?

- (A) $16x^4 - 10x^2 - 5 = 0$ (B) $16x^4 + 20x^2 - 5 = 0$
 (C) $16x^4 - 20x^2 + 5 = 0$ (D) $4x^4 - 10x^2 + 5 = 0$

PROBLÈME 029

La valeur de $\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)$ vaut :

- (A) -1 (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $-\frac{1}{3}$ (D) $-\frac{1}{4}$

PROBLÈME 030

$16 \sin(20^\circ) \sin(40^\circ) \sin(80^\circ)$ vaut :

- (A) $\sqrt{3}$ (B) $2\sqrt{3}$ (C) 3 (D) $4\sqrt{3}$

PROBLÈME 031

La valeur de $2\sin(12^\circ) - \sin(72^\circ)$ est :

- (A) $\frac{\sqrt{5}(1-\sqrt{3})}{4}$ (B) $\frac{1-\sqrt{5}}{8}$
 (C) $\frac{\sqrt{3}(1-\sqrt{5})}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{3}(1-\sqrt{5})}{4}$

PROBLÈME 032

La valeur de $2 \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{8}\right) \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) \sin\left(\frac{5\pi}{8}\right) \sin\left(\frac{6\pi}{8}\right) \sin\left(\frac{7\pi}{8}\right)$ est :

- (A) $\frac{1}{4\sqrt{2}}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{8}$ (D) $\frac{1}{8\sqrt{2}}$

PROBLÈME 033

Si $\tan\left(\frac{\pi}{9}\right), x, \tan\left(\frac{7\pi}{18}\right)$ sont en progression arithmétique et $\tan\left(\frac{\pi}{9}\right), y, \tan\left(\frac{5\pi}{18}\right)$ sont aussi en progression arithmétique, alors $|x - 2y|$ vaut :

- (A) 4 (B) 3 (C) 0 (D) 1

PROBLÈME 034

Si $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}$, alors $16(\sin(2\theta) + \cos(4\theta) + \sin(6\theta))$ vaut :

- (A) 23 (B) -27 (C) -23 (D) 27

PROBLÈME 035

La valeur de $\cot \frac{\pi}{24}$ est :

- (A) $\sqrt{2} + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{6}$ (B) $\sqrt{2} + \sqrt{3} + 2 + \sqrt{6}$
(C) $\sqrt{2} - \sqrt{3} - 2 + \sqrt{6}$ (D) $3\sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{6}$

PROBLÈME 036

Si $15\sin^4 \alpha + 10\cos^4 \alpha = 6$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $27\sec^6 \alpha + 8\operatorname{cosec}^6 \alpha$ vaut :

- (A) 500 (B) 400 (C) 250 (D) 350

PROBLÈME 037

Pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a $\log_{10}(\sin x) + \log_{10}(\cos x) = -1$ et $\log_{10}(\sin x + \cos x) = \frac{1}{2}(\log_{10} n - 1)$, avec $n > 0$. Alors n vaut :

- (A) 16 (B) 9 (C) 12 (D) 20

PROBLÈME 038

Si $0 < x, y < \pi$ et $\cos x + \cos y - \cos(x + y) = \frac{3}{2}$, alors $\sin x + \cos y$ vaut :

- (A) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

PROBLÈME 039

Si $e^{(\cos^2 x + \cos^4 x + \cos^6 x + \dots \infty) \log_e 2}$ vérifie l'équation $t^2 - 9t + 8 = 0$, alors la valeur de $\frac{2 \sin x}{\sin x + \sqrt{3} \cos x}$ ($0 < x < \frac{\pi}{2}$) est :

- (A) $\sqrt{3}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) $2\sqrt{3}$ (D) $\frac{1}{2}$

PROBLÈME 040

Si $L = \sin^2(\frac{\pi}{16}) - \sin^2(\frac{\pi}{8})$ et $M = \cos^2(\frac{\pi}{16}) - \sin^2(\frac{\pi}{8})$, alors :

- (A) $L = -\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{8}$ (B) $M = \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{8}$
(C) $M = \frac{1}{4\sqrt{2}} + \frac{1}{4} \cos \frac{\pi}{8}$ (D) $L = \frac{1}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{4} \cos \frac{\pi}{8}$

PROBLÈME 041

Si l'équation $\cos^4 \theta + \sin^4 \theta + \lambda = 0$ admet des solutions réelles en θ , alors λ appartient à l'intervalle :

- (A) $[-\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}]$ (B) $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}]$
(C) $(-\frac{5}{4}, -1]$ (D) $[-1, -\frac{1}{2}]$

PROBLÈME 042

Si $x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \tan^{2n} \theta$ et $y = \sum_{n=0}^{\infty} \cos^{2n} \theta$ pour $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$, alors :

- (A) $x(1+y) = 1$ (B) $y(1-x) = 1$ (C) $y(1+x) = 1$ (D) $x(1-y) = 1$

PROBLÈME 043

La valeur de $\cos^3\left(\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \sin^3\left(\frac{\pi}{8}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ est :

- (A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$

PROBLÈME 044

L'équation $y = \sin x \sin(x+2) - \sin^2(x+1)$ représente une droite située :

- (A) dans les premier, deuxième et quatrième quadrants ;
 (B) dans les premier, troisième et quatrième quadrants ;
 (C) uniquement dans les deuxième et troisième quadrants ;
 (D) uniquement dans les troisième et quatrième quadrants.

PROBLÈME 045

La valeur de $\sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ$ est :

- (A) $\frac{1}{36}$ (B) $\frac{1}{16}$ (C) $\frac{1}{32}$ (D) $\frac{1}{18}$

PROBLÈME 046

La valeur de $\cos^2(10^\circ) - \cos(10^\circ)\cos(50^\circ) + \cos^2(50^\circ)$ est :

- (A) $\frac{3}{2} + \cos 20^\circ$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{3}{2}(1 + \cos 20^\circ)$ (D) $\frac{3}{2}$

PROBLÈME 047

Si $\cos(\alpha + \beta) = \frac{3}{5}$, $\sin(\alpha - \beta) = \frac{5}{13}$ et $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{4}$, alors $\tan(2\alpha)$ vaut :

- (A) $21/16$ (B) $63/52$ (C) $33/52$ (D) $63/16$

PROBLÈME 048

La valeur maximale de $3 \cos \theta + 5 \sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)$ pour toute valeur réelle de θ est :

- (A) $\sqrt{34}$ (B) $\sqrt{31}$ (C) $\sqrt{19}$ (D) $\frac{\sqrt{79}}{2}$

PROBLÈME 049

La valeur de $\cos \frac{\pi}{2^2} \cdot \cos \frac{\pi}{2^3} \cdot \dots \cdot \cos \frac{\pi}{2^{10}} \cdot \sin \frac{\pi}{2^{10}}$ vaut :

- (A) $\frac{1}{256}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{1024}$ (D) $\frac{1}{512}$

PROBLÈME 050

Pour tout $\theta \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$, l'expression $3(\cos \theta - \sin \theta)^4 + 6(\sin \theta + \cos \theta)^2 + 4\sin^6 \theta$ vaut :

- (A) $13 - 4\cos^2 \theta + 6\sin^2 \theta \cos^2 \theta$
 (B) $13 - 4\cos^6 \theta$
 (C) $13 - 4\cos^2 \theta + 6\cos^4 \theta$
 (D) $13 - 4\cos^4 \theta + 2\sin^2 \theta \cos^2 \theta$

PROBLÈME 051

Si $5(\tan^2 x - \cos^2 x) = 2 \cos 2x + 9$, alors la valeur de $\cos 4x$ est :

- (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{2}{9}$ (C) $-\frac{7}{9}$ (D) $-\frac{3}{5}$

PROBLÈME 052

Si m et M sont les valeurs minimale et maximale de $4 + \frac{1}{2}\sin^2(2x) - 2\cos^4 x$, pour $x \in \mathbb{R}$, alors $M - m$ vaut :

- (A) $\frac{15}{4}$ (B) $\frac{9}{4}$ (C) $\frac{7}{4}$ (D) $\frac{1}{4}$

PROBLÈME 053

On considère $f_k(x) = \frac{1}{k}(\sin^k x + \cos^k x)$ où $x \in \mathbb{R}$ et $k \geq 1$. Alors $f_4(x) - f_6(x)$ vaut :

- (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{12}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) $\frac{1}{3}$

PROBLÈME 054

L'expression $\frac{\tan A}{1 - \cot A} + \frac{\cot A}{1 - \tan A}$ peut s'écrire:

- (A) $\sin A \cos A + 1$ (B) $\sec A \cos ec A + 1$
(C) $\tan A + \cot A$ (D) $\sec A + \cos ec A$

PROBLÈME 055

Si $A = \sin^2 x + \cos^4 x$, alors, pour tout réel x :

- (A) $\frac{13}{16} \leq A \leq 1$ (B) $1 \leq A \leq 2$
(C) $\frac{3}{4} \leq A \leq \frac{13}{16}$ (D) $\frac{3}{4} \leq A \leq 1$

PROBLÈME 056

On considère $\cos(\alpha + \beta) = \frac{4}{5}$ et $\sin(\alpha - \beta) = \frac{5}{13}$, où $0 \leq \alpha, \beta \leq \frac{\pi}{4}$. Alors $\tan 2\alpha =$

- (A) $\frac{56}{33}$ (B) $\frac{19}{12}$ (C) $\frac{20}{7}$ (D) $\frac{25}{16}$

PROBLÈME 057

Soient les affirmations A et B définies par A: $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 0$ B: $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 0$ Si $\cos(\beta - \gamma) + \cos(\gamma - \alpha) + \cos(\alpha - \beta) = -\frac{3}{2}$, alors:

- (A) A est fausse et B est vraie ;
(B) A et B sont vraies ;
(C) A et B sont fausses ;
(D) A est vraie et B est fausse.

PROBLÈME 058

Si $0 < x < \pi$ et $\cos x + \sin x = \frac{1}{2}$, alors $\tan x$ est :

- (A) $\frac{(1-\sqrt{7})}{4}$ (B) $\frac{(4-\sqrt{7})}{3}$
(C) $-\frac{(4+\sqrt{7})}{3}$ (D) $\frac{(1+\sqrt{7})}{4}$

PROBLÈME 059

On considère α, β tels que $\pi < \alpha - \beta < 3\pi$. Si $\sin \alpha + \sin \beta = -\frac{21}{65}$ et $\cos \alpha + \cos \beta = -\frac{27}{65}$ alors la valeur de $\cos \frac{\alpha - \beta}{2}$:

- (A) $-\frac{6}{65}$ (B) $\frac{3}{\sqrt{130}}$ (C) $\frac{6}{65}$ (D) $-\frac{3}{\sqrt{130}}$

PROBLÈME 060

Si $u = \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} + \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}$ alors la différence entre les valeurs maximale et minimale de u^2 est donné par:

- (A) $(a - b)^2$ (B) $2\sqrt{a^2 + b^2}$ (C) $(a + b)^2$ (D) $2(a^2 + b^2)$

Réponses numériques

PROBLÈME 061

Si $A = \frac{\sin 3^\circ}{\cos 9^\circ} + \frac{\sin 9^\circ}{\cos 27^\circ} + \frac{\sin 27^\circ}{\cos 81^\circ}$ et $B = \tan 81^\circ - \tan 3^\circ$, alors $\frac{B}{A}$ vaut ____.

PROBLÈME 062

Soient $\vec{a}_k = (\tan \theta_k) \hat{i} + \hat{j}$ et $\vec{b}_k = \hat{i} - (\cot \theta_k) \hat{j}$, où $\theta_k = \frac{2^{k-1}\pi}{2^n+1}$, pour un entier $n \in \mathbb{N}$ avec $n > 5$.

Calculer $\frac{\sum_{k=1}^n |\vec{a}_k|^2}{\sum_{k=1}^n |\vec{b}_k|^2}$.

PROBLÈME 063

On a $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{1}{10}$ et $\sin(\alpha - \beta) = \frac{3}{8}$, avec $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$ et $0 < \beta < \frac{\pi}{4}$. Si $\tan(2\alpha) = \frac{3(1-r\sqrt{5})}{\sqrt{11(s+\sqrt{5})}}$, où $r, s \in \mathbb{N}$, calculer $r + s$.

PROBLÈME 064

Si $\frac{\cos^2 48^\circ - \sin^2 12^\circ}{\sin^2 24^\circ - \sin^2 6^\circ} = \frac{\alpha + \beta\sqrt{5}}{2}$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, alors $\alpha + \beta$ vaut ____.

PROBLÈME 065

L'ensemble des valeurs de $a \in \mathbb{R}$ pour lesquelles l'équation $\cos 2x + a \sin x = 2a - 7$ admet une solution est $[p, q]$ et $r = \tan 9^\circ - \tan 27^\circ - \frac{1}{\cot 63^\circ} + \tan 81^\circ$, alors pqr vaut ____.

PROBLÈME 066

La valeur de $\tan 9^\circ - \tan 27^\circ - \tan 63^\circ + \tan 81^\circ$ est ____.

PROBLÈME 067

Si $\sin^2(10^\circ) \sin(20^\circ) \sin(40^\circ) \sin(50^\circ) \sin(70^\circ) = \alpha - \frac{1}{16} \sin(10^\circ)$, alors $16 + \alpha^{-1}$ vaut ____.

PROBLÈME 068

Le nombre de valeurs entières de k pour lesquelles l'équation $3 \sin x + 4 \cos x = k + 1$ admet une solution, avec $k \in \mathbb{R}$ est ____.

PROBLÈME 069

Si $\frac{\sqrt{2} \sin \alpha}{\sqrt{1 + \cos(2\alpha)}} = \frac{1}{7}$ et $\sqrt{\frac{1 - \cos(2\beta)}{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$, avec $\alpha, \beta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, calculer $\tan(\alpha + 2\beta)$.

Grille des réponses

Réponses reprises du document fourni. « — » : réponse non précisée.

1	C	15	B	29	B	43	D	57	B
2	A	16	A	30	B	44	D	58	C
3	A	17	D	31	D	45	B	59	D
4	B	18	A	32	C	46	B	60	A
5	B	19	A	33	C	47	D	61	2
6	D	20	C	34	C	48	C	62	3
7	C	21	D	35	B	49	D	63	20
8	D	22	B	36	C	50	B	64	4
9	A	23	D	37	C	51	C	65	48
10	A	24	B	38	A	52	B	66	4
11	C	25	C	39	D	53	B	67	80
12	C	26	B	40	B	54	B	68	11
13	A	27	A	41	D	55	D	69	1
14	C	28	C	42	B	56	A		