

MATHS OLYMPIAD

COLLECTION D'ENTRAÎNEMENT / ADAPTATION FRANÇAISE

Nombres complexes

Formes algébriques, modules & géométrie



206

problèmes • énoncés et réponses

Comprendre. Chercher. Progresser.

Lycée avancé • préparation au supérieur

Votre parcours d'entraînement

Ce livret reprend les **206 problèmes** du document transmis, dans leur ordre d'origine. Les consignes sont traduites en français ; les données, les notations et les choix de réponse sont conservés.

Les formules et les figures font partie intégrante des énoncés. Les lettres des choix de réponse restent A, B, C et D.

Mode d'emploi. Cherchez d'abord sans consulter la grille. Justifiez votre réponse, puis comparez-la à la réponse fournie. Reprenez ensuite les questions qui vous ont résisté.

À la fin du livret. La grille reproduit les réponses du document fourni. Elle ne constitue pas un corrigé détaillé. Un tiret signale une réponse qui n'était pas précisée dans ce document.

Repères dans le livret

Questions à choix multiples · problèmes 1 à 167

Réponses numériques · problèmes 168 à 206

Questions à choix multiples

PROBLÈME 001

Le nombre de valeurs de $z \in \mathbb{C}$ vérifiant les équations $|z - (4 + 8i)| = \sqrt{10}$ et $|z - (3 + 5i)| + |z - (5 + 11i)| = 4\sqrt{5}$, est :

- (A) 0 (B) 2 (C) 1 (D) 4

PROBLÈME 002

On considère $S = \{z \in \mathbb{C} : z^2 + \sqrt{6}iz - 3 = 0\}$. Alors $\sum_{z \in S} z^8$ vaut :

- (A) 162 (B) 184 (C) 262 (D) 324

PROBLÈME 003

L'ensemble des valeurs de $k \in \mathbb{R}$ pour lesquelles l'équation $z(\bar{z} + 2 + i) + k(2 + 3i) = 0, z \in \mathbb{C}$ admet au moins une solution est l'intervalle $[\alpha, \beta]$. Alors $9(\alpha + \beta)$ vaut :

- (A) -10 (B) -8 (C) $10\sqrt{13}$ (D) $8\sqrt{13}$

PROBLÈME 004

On considère $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ les solutions distinctes de l'équation $z^2 + 4z - (1 + 12i) = 0$. Alors $|z_1|^2 + |z_2|^2$ vaut :

- (A) 18 (B) 22 (C) 29 (D) 34

PROBLÈME 005

On considère $a, b \in \mathbb{C}$. On considère α, β les racines de l'équation $x^2 + ax + b = 0$. Si $\beta - \alpha = \sqrt{11}$ et $\beta^2 - \alpha^2 = 3i\sqrt{11}$, alors $(\beta^3 - \alpha^3)^2$ vaut :

- (A) 160 (B) 176 (C) 194 (D) 187

PROBLÈME 006

On considère $S = \{z \in \mathbb{C} : z^2 + 4z + 16 = 0\}$. Alors $\sum_{z \in S} |z + \sqrt{3}i|^2$ vaut :

- (A) 42 (B) 23 (C) 27 (D) 38

PROBLÈME 007

On considère z un nombre complexe tel que $|z + 2| = |z - 2|$ et $\arg\left(\frac{z+3}{z-i}\right) = \frac{\pi}{4}$. Alors $|z|^2$ vaut :

- (A) 9 (B) 4 (C) 5 (D) 1

PROBLÈME 008

Soient les cercles $C_1 : |z| = r$ et $C_2 : |z - 3 - 4i| = 5, z \in \mathbb{C}$ tels que C_2 soit intérieur à C_1 . Si z_1 décrit C_1 , z_2 décrit C_2 et $\min |z_1 - z_2| = 2$, alors $\max |z_1 - z_2|$ vaut :

- (A) 12 (B) 17 (C) 22 (D) 24

PROBLÈME 009

On considère x et y deux nombres réels tels que $50 \left(\frac{2x}{1+3i} - \frac{y}{1-2i} \right) = 31 + 17i, i = \sqrt{-1}$. Alors la valeur de $10(x - 3y)$ vaut :

- (A) 20 (B) 31 (C) 35 (D) 75

PROBLÈME 010

On considère $A = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2| \leq 4\}$ et $B = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2| + |z + 2| = 5\}$. Alors le maximum $\{|z_1 - z_2| : z_1 \in A \text{ et } z_2 \in B\}$ est :

- (A) $\frac{17}{2}$ (B) 8 (C) 9 (D) $\frac{15}{2}$

PROBLÈME 011

On considère z un nombre complexe tel que $|z - 6| = 5$ et $|z + 2 - 6i| = 5$. Alors la valeur de $z^3 + 3z^2 - 15z + 141$ vaut :

- (A) 61 (B) 37 (C) 42 (D) 50

PROBLÈME 012

On considère $S = \{z \in \mathbb{C} : \left| \frac{z-6i}{z-2i} \right| = 1 \text{ et } \left| \frac{z-8+2i}{z+2i} \right| = \frac{3}{5}\}$. Alors $\sum_{z \in S} |z|^2$ vaut :

- (A) 413 (B) 398 (C) 385 (D) 423

PROBLÈME 013

Si $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, i = \sqrt{-1}$ —, alors $(z^{201} - i)^8$ vaut :

- (A) 1 (B) 0 (C) -1 (D) 256

PROBLÈME 014

On considère $S = \{z : 3 \leq |2z - 3(1 + i)| \leq 7\}$ un ensemble de nombres complexes. Alors $\min_{z \in S} \left| \left(z + \frac{1}{2}(5 + 3i) \right) \right|$ vaut :

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{5}{2}$ (C) 2 (D) $\frac{3}{2}$

PROBLÈME 015

On considère $S = \{z \in \mathbb{C} : 4z^2 + \bar{z} = 0\}$. Alors $\sum_{z \in S} |z|^2$ vaut :

- (A) $\frac{5}{64}$ (B) $\frac{1}{16}$ (C) $\frac{7}{64}$ (D) $\frac{3}{16}$

PROBLÈME 016

On considère z le nombre complexe vérifiant $|z - 5| \leq 3$ et dont l'argument principal positif est maximal. Alors $34 \left| \frac{5z-12}{5iz+16} \right|^2$ vaut :

- (A) 20 (B) 26 (C) 12 (D) 16

PROBLÈME 017

Si $x^2 + x + 1 = 0$, alors la valeur de $\left(x + \frac{1}{x}\right)^4 + \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^4 + \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)^4 + \dots + \left(x^{25} + \frac{1}{x^{25}}\right)^4$ vaut :

- (A) 162 (B) 145 (C) 128 (D) 175

PROBLÈME 018

On considère $A = \{\theta \in [0, 2\pi] : 1 + 10 \operatorname{Re} \left(\frac{2 \cos \theta + i \sin \theta}{\cos \theta - 3i \sin \theta} \right) = 0\}$. Alors $\sum_{\theta \in A} \theta^2$ vaut

- (A) $\frac{21}{4} \pi^2$ (B) $6\pi^2$ (C) $\frac{27}{4} \pi^2$ (D) $8\pi^2$

PROBLÈME 019

Si le lieu des nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que $\operatorname{Re} \left(\frac{z-1}{2z+i} \right) + \operatorname{Re} \left(\frac{\bar{z}-1}{2\bar{z}-i} \right) = 2$ est un cercle de rayon r et de centre (a, b) , alors $\frac{15ab}{r^2}$ vaut :

- (A) 16 (B) 24 (C) 12 (D) 18

PROBLÈME 020

On considère les affirmations (S1): l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} - \{-i\} : |z| = 1 \text{ et } \frac{z-i}{z+i} \text{ est réel}\}$ contient exactement deux éléments; et (S2): l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} - \{-1\} : |z| = 1 \text{ et } \frac{z-1}{z+1} \text{ est imaginaire pur}\}$ contient une infinité d'éléments.

- (A) Les deux sont fausses.
(B) Les deux sont vraies.
(C) Seule (S2) est vraie.
(D) Seule (S1) est vraie.

PROBLÈME 021

Le produit de $\omega_1 = (8+i) \sin \theta + (7+4i) \cos \theta$ et $\omega_2 = (1+8i) \sin \theta + (4+7i) \cos \theta$ est $\alpha + i\beta$, avec $i = \sqrt{-1}$. On note p et q les valeurs maximale et minimale de $\alpha + \beta$, respectivement. Alors $p + q$ vaut :

- (A) 130 (B) 150 (C) 160 (D) 140

PROBLÈME 022

Si $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ sont les affixes des sommets d'un triangle équilatéral dont le centre de gravité a pour affixe z_0 , alors $\sum_{k=1}^3 (z_k - z_0)^2$ vaut :

- (A) 0 (B) 1 (C) i (D) $-i$

PROBLÈME 023

On considère $z \in \mathbb{C}$ tels que $\frac{z^2+3i}{z-2+i} = 2+3i$. Alors la somme de toutes les valeurs possibles de z^2 est :

- (A) $-19+2i$ (B) $-19-2i$ (C) $19-2i$ (D) $19+2i$

PROBLÈME 024

On considère z un nombre complexe tel que $|z| = 1$. Si $\frac{2+k^2z}{k+\bar{z}} = kz, k \in \mathbb{R}$, alors la distance maximale de $k + ik^2$ au cercle $|z - (1+2i)| = 1$ est :

- (A) $\sqrt{5} + 1$ (B) 3 (C) $\sqrt{3} + 1$ (D) 2

PROBLÈME 025

On considère $|z_1 - 8 - 2i| \leq 1$ et $|z_2 - 2 + 6i| \leq 2$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Alors la valeur minimale de $|z_1 - z_2|$ vaut :

- (A) 3 (B) 10 (C) 7 (D) 13

PROBLÈME 026

Si $\alpha + i\beta$ et $\gamma + i\delta$ sont les racines de $x^2 - (3 - 2i)x - (2i - 2) = 0$, $i = \sqrt{-1}$, alors $\alpha\gamma + \beta\delta$ vaut :

- (A) 2 (B) -6 (C) 6 (D) -2

PROBLÈME 027

Soient O l'origine du plan complexe, A le point d'affixe $z_1 = \sqrt{3} + 2\sqrt{2}i$ et B le point d'affixe z_2 tel que $\sqrt{3}|z_2| = |z_1|$ et $\arg(z_2) = \arg(z_1) + \frac{\pi}{6}$. Alors :

- (A) l'aire du triangle ABO vaut $\frac{11}{4}$
 (B) l'aire du triangle ABO vaut $\frac{11}{\sqrt{3}}$
 (C) ABO est un triangle scalène.
 (D) ABO est un triangle isocèle obtusangle.

PROBLÈME 028

Si α et β sont les racines de l'équation $2z^2 - 3z - 2i = 0$, où $i = \sqrt{-1}$, alors $16 \cdot \operatorname{Re} \left(\frac{\alpha^{19} + \beta^{19} + \alpha^{11} + \beta^{11}}{\alpha^{15} + \beta^{15}} \right) \cdot \operatorname{Im} \left(\frac{\alpha^{19} + \beta^{19} + \alpha^{11} + \beta^{11}}{\alpha^{15} + \beta^{15}} \right)$ vaut :

- (A) 441 (B) 312 (C) 409 (D) 398

PROBLÈME 029

Le nombre de nombres complexes z vérifiant $|z| = 1$ et $\left| \frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} \right| = 1$ vaut :

- (A) 8 (B) 10 (C) 4 (D) 6

PROBLÈME 030

On considère $\left| \frac{\bar{z}-i}{2\bar{z}+i} \right| = \frac{1}{3}$, $z \in C$ l'équation d'un cercle de centre C . Si l'aire du triangle de sommets $(0, 0)$, C et $(\alpha, 0)$ vaut 11 unités d'aire, alors α^2 vaut :

- (A) $\frac{121}{25}$ (B) 100 (C) $\frac{81}{25}$ (D) 50

PROBLÈME 031

On considère la courbe $z(1+i) + \bar{z}(1-i) = 4$, $z \in C$ qui partage le domaine $|z-3| \leq 1$ en deux parties d'aires α et β . Alors $|\alpha - \beta|$ vaut :

- (A) $1 + \frac{\pi}{3}$ (B) $1 + \frac{\pi}{6}$ (C) $1 + \frac{\pi}{2}$ (D) $1 + \frac{\pi}{4}$

PROBLÈME 032

On considère z_1, z_2 et z_3 trois nombres complexes situés sur le cercle $|z| = 1$ avec $\arg(z_1) = \frac{-\pi}{4}$, $\arg(z_2) = 0$ et $\arg(z_3) = \frac{\pi}{4}$. Si $|z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_3 + z_3\bar{z}_1|^2 = \alpha + \beta\sqrt{2}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, alors la valeur de $\alpha^2 + \beta^2$ vaut :

- (A) 41 (B) 29 (C) 24 (D) 31

PROBLÈME 033

On considère z un nombre complexe tel que la partie réelle de $\frac{z-2i}{z+2i}$ soit nulle. Alors la valeur maximale de $|z - (6 + 8i)|$ vaut :

- (A) 8 (B) 12 (C) 10 (D) ∞

PROBLÈME 034

La somme de toutes les valeurs possibles de $\theta \in [-\pi, 2\pi]$ pour laquelle $\frac{1+i \cos \theta}{1-2i \cos \theta}$ est imaginaire pur vaut :

- (A) 4π (B) 3π (C) 2π (D) 5π

PROBLÈME 035

On considère z un nombre complexe tel que $|z + 2| = 1$ et $\operatorname{Im}\left(\frac{z+1}{z+2}\right) = \frac{1}{5}$. Alors la valeur de $|\operatorname{Re}(\overline{z+2})|$ est

- (A) $\frac{2\sqrt{6}}{5}$ (B) $\frac{24}{5}$ (C) $\frac{\sqrt{6}}{5}$ (D) $\frac{1+\sqrt{6}}{5}$

PROBLÈME 036

Si l'ensemble $R = \{(a, b) : a + 5b = 42, a, b \in \mathbb{N}\}$ contient m éléments et $\sum_{n=1}^m (1 - i^{n!}) = x + i y$, où $i = \sqrt{-1}$, alors la valeur de $m + x + y$ vaut :

- (A) 12 (B) 4 (C) 8 (D) 5

PROBLÈME 037

Si z_1, z_2 sont deux nombres complexes distincts tels que $\left| \frac{z_1 - 2z_2}{\frac{1}{2} - z_1 \overline{z_2}} \right| = 2$, alors :

- (A) soit z_1 appartient à un cercle de rayon $\frac{1}{2}$ ou z_2 appartient à un cercle de rayon 1.
 (B) z_1 appartient à un cercle de rayon $\frac{1}{2}$ et z_2 appartient à un cercle de rayon 1.
 (C) Soit z_1 appartient à un cercle de rayon 1, soit z_2 appartient à un cercle de rayon $\frac{1}{2}$.
 (D) Les deux nombres z_1 et z_2 appartiennent au même cercle.

PROBLÈME 038

On considère $S_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 5\}$, $S_2 = \left\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}\left(\frac{z+1-\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right) \geq 0\right\}$ et $S_3 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \geq 0\}$. Alors l'aire du domaine $S_1 \cap S_2 \cap S_3$ est :

- (A) $\frac{125\pi}{24}$ (B) $\frac{125\pi}{6}$ (C) $\frac{125\pi}{12}$ (D) $\frac{125\pi}{4}$

PROBLÈME 039

On considère les deux affirmations suivantes. I: pour deux nombres complexes non nuls quelconques z_1, z_2 , $\left| \frac{z_1}{|z_1|} + \frac{z_2}{|z_2|} \right| \leq 2(|z_1| + |z_2|)$, et II: si x, y, z sont trois nombres complexes distincts et a, b, c trois nombres réels strictement positifs tels que $\frac{a}{|y-z|} = \frac{b}{|z-x|} = \frac{c}{|x-y|}$, alors $\frac{a^2}{y-z} + \frac{b^2}{z-x} + \frac{c^2}{x-y} = 1$. Quelle proposition est correcte ?

- (A) I et II sont fausses.
 (B) I est vraie et II est fausse.
 (C) I est fausse et II est vraie.
 (D) I et II sont vraies.

PROBLÈME 040

L'aire, en unités d'aire, du domaine $S = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| \leq 2; (z+\bar{z}) + i(z-\bar{z}) \leq 2, \text{Im}(z) \geq 0\}$ est

- (A) $\frac{7\pi}{4}$ (B) $\frac{3\pi}{2}$ (C) $\frac{7\pi}{3}$ (D) $\frac{17\pi}{8}$

PROBLÈME 041

On considère α et β respectivement la somme et le produit de toutes les solutions non nulles de l'équation $(\bar{z})^2 + |z| = 0, z \in \mathbb{C}$. Alors $4(\alpha^2 + \beta^2)$ vaut :

- (A) 4 (B) 2 (C) 6 (D) 8

PROBLÈME 042

Si z est un nombre complexe tel que $|z| \leq 1$, alors la valeur minimale de $|z + \frac{1}{2}(3+4i)|$ vaut :

- (A) 2 (B) $\frac{5}{2}$ (C) $\frac{3}{2}$ (D) 3

PROBLÈME 043

On considère $S = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| = 1 \text{ et } (\sqrt{2}-1)(z+\bar{z}) - i(z-\bar{z}) = 2\sqrt{2}\}$. Soient $z_1, z_2 \in S$ tels que $|z_1| = \max_{z \in S} |z|$ et $|z_2| = \min_{z \in S} |z|$. Alors $|\sqrt{2}z_1 - z_2|^2$ vaut :

- (A) 1 (B) 4 (C) 3 (D) 2

PROBLÈME 044

On considère z_1 et z_2 deux nombres complexes tels que $z_1 + z_2 = 5$ et $z_1^3 + z_2^3 = 20 + 15i$. Alors $|z_1^4 + z_2^4|$ vaut :

- (A) $15\sqrt{15}$ (B) $30\sqrt{3}$ (C) $25\sqrt{3}$ (D) 75

PROBLÈME 045

Si z est un nombre complexe, alors le nombre de racines communes aux équations $z^{1985} + z^{100} + 1 = 0$ et $z^3 + 2z^2 + 2z + 1 = 0$ vaut :

- (A) 0 (B) 2 (C) 1 (D) 3

PROBLÈME 046

Si $z = x + iy$, $xy \neq 0$ vérifie l'équation $z^2 + i\bar{z} = 0$, alors $|z^2|$ vaut :

- (A) 9 (B) $\frac{1}{4}$ (C) 4 (D) 1

PROBLÈME 047

On considère r et θ respectivement le module et un argument du nombre complexe $z = 2 - i \left(2 \tan \frac{5\pi}{8}\right)$, alors (r, θ) vaut

- (A) $\left(2 \sec \frac{11\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}\right)$ (B) $\left(2 \sec \frac{3\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right)$
(C) $\left(2 \sec \frac{5\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right)$ (D) $\left(2 \sec \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}\right)$

PROBLÈME 048

Si $z = \frac{1}{2} - 2i$ vérifie $|z + 1| = \alpha z + \beta(1 + i)$, $i = \sqrt{-1}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors $\alpha + \beta$ vaut :

- (A) 2 (B) -4 (C) 3 (D) -1

PROBLÈME 049

Si $S = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| = |z + i| = |z - 1|\}$, alors $n(S)$ vaut :

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 0

PROBLÈME 050

Si l'ensemble $\left\{\operatorname{Re}\left(\frac{z - \bar{z} + z\bar{z}}{2 - 3z + 5\bar{z}}\right) : z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) = 3\right\}$ est égal à l'intervalle $(\alpha, \beta]$, alors $24(\beta - \alpha)$ vaut :

- (A) 36 (B) 27 (C) 42 (D) 30

PROBLÈME 051

On considère $S = \{z \in \mathbb{C} : \bar{z} = i(z^2 + \operatorname{Re}(\bar{z}))\}$. Alors $\sum_{z \in S} |z|^2$ vaut :

- (A) $\frac{7}{2}$ (B) 4 (C) 3 (D) $\frac{5}{2}$

PROBLÈME 052

On considère C le cercle du plan complexe de centre $z_0 = \frac{1}{2}(1 + 3i)$ et de rayon $r = 1$. On considère $z_1 = 1 + i$ et le nombre complexe z_2 est extérieur au cercle C telles que $|z_1 - z_0| |z_2 - z_0| = 1$. Si z_0, z_1 et z_2 sont alignés, alors la plus petite valeur de $|z_2|^2$ vaut :

- (A) $\frac{3}{2}$ (B) $\frac{5}{2}$ (C) $\frac{13}{2}$ (D) $\frac{7}{2}$

PROBLÈME 053

Pour $a \in \mathbb{C}$, soit $A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(a + \bar{z}) > \operatorname{Im}(\bar{a} + z)\}$ et $B = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(a + \bar{z}) < \operatorname{Im}(\bar{a} + z)\}$. On considère les deux affirmations: (S1) si $\operatorname{Re}(a), \operatorname{Im}(a) > 0$, l'ensemble A contient tous les nombres réels; (S2) si $\operatorname{Re}(a), \operatorname{Im}(a) < 0$, l'ensemble B contient tous les nombres réels.

- (A) Les deux sont fausses.
(B) Seule (S1) est vraie.
(C) Seule (S2) est vraie.
(D) Les deux sont vraies.

PROBLÈME 054

On considère w_1 l'image de $z_1 = 5 + 4i$ par la rotation de centre O et d'angle droit dans le sens direct, et w_2 l'image de $z_2 = 3 + 5i$ par la rotation de centre O et d'angle droit dans le sens horaire. Alors l'argument principal de $w_1 - w_2$ vaut :

- (A) $-\pi + \tan^{-1} \frac{8}{9}$ (B) $-\pi + \tan^{-1} \frac{33}{5}$ (C) $\pi - \tan^{-1} \frac{8}{9}$ (D) $\pi - \tan^{-1} \frac{33}{5}$

PROBLÈME 055

On considère $S = \{z = x + iy : \frac{2z-3i}{4z+2i} \in \mathbb{R}\}$. Quelle proposition est FAUSSE ?

- (A) $y + x^2 + y^2 \neq -\frac{1}{4}$
 (B) $(x, y) = (0, -\frac{1}{2})$
 (C) $x = 0$
 (D) $y \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}, \infty)$

PROBLÈME 056

On considère le nombre complexe $z = x + iy$ tel que $\frac{2z-3i}{2z+i}$ soit imaginaire pur. Si $x + y^2 = 0$, alors $y^4 + y^2 - y$ vaut :

- (A) $\frac{4}{3}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{2}{3}$

PROBLÈME 057

On considère $A = \{\theta \in (0, 2\pi) : \frac{1+2i \sin \theta}{1-i \sin \theta} \text{ est imaginaire pur}\}$. Alors la somme des éléments de A est :

- (A) 3π (B) π (C) 2π (D) 4π

PROBLÈME 058

Si, pour $z = \alpha + i\beta$, $|z + 2| = z + 4(1 + i)$, alors $\alpha + \beta$ et $\alpha\beta$ sont les racines de l'équation:

- (A) $x^2 + 2x - 3 = 0$ (B) $x^2 + 3x - 4 = 0$ (C) $x^2 + x - 12 = 0$ (D) $x^2 + 7x + 12 = 0$

PROBLÈME 059

On considère $a \neq b$ deux réels non nuls. Alors le nombre d'éléments de l'ensemble $X = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(az^2 + bz) = a \text{ et } \operatorname{Re}(bz^2 + az) = b\}$ vaut :

- (A) 0
 (B) 2
 (C) 1
 (D) une infinité

PROBLÈME 060

On considère a, b deux nombres réels tels que $ab < 0$. Si le nombre complexe $\frac{1+ai}{b+i}$ est de module 1 et $a + ib$ appartient au cercle $|z - 1| = |2z|$, alors une valeur possible de $\frac{1+[a]}{4b}$, où $[t]$ désigne la partie entière, vaut :

- (A) $\left(\frac{1+\sqrt{7}}{4}\right)$ (B) $\frac{1}{2}$
 (C) 0 (D) -1

PROBLÈME 061

Si le centre et le rayon du cercle $\left| \frac{z-2}{z-3} \right| = 2$ sont respectivement (α, β) et γ , alors $3(\alpha + \beta + \gamma)$ vaut :

- (A) 12 (B) 10 (C) 11 (D) 9

PROBLÈME 062

Le nombre complexe $z = \frac{i-1}{\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}}$ vaut :

- (A) $\cos \frac{\pi}{12} - i \sin \frac{\pi}{12}$ (B) $\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$
 (C) $\sqrt{2}i \left(\cos \frac{5\pi}{12} - i \sin \frac{5\pi}{12} \right)$ (D) $\sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right)$

PROBLÈME 063

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ sur la courbe $C_1 : |z| = 4$, on note le lieu du point $z + \frac{1}{z}$ par la courbe C_2 . Alors:

- (A) les courbes C_1 et C_2 se coupent en 4 points ;
 (B) la courbe C_2 est intérieure à C_1
 (C) la courbe C_1 est intérieure à C_2
 (D) les courbes C_1 et C_2 se coupent en 2 points.

PROBLÈME 064

Pour deux nombres complexes non nuls z_1 et z_2 , si $\operatorname{Re}(z_1 z_2) = 0$ et $\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = 0$, lesquelles des relations suivantes sont possibles ? A. $\operatorname{Im}(z_1) > 0$ et $\operatorname{Im}(z_2) > 0$ B. $\operatorname{Im}(z_1) < 0$ et $\operatorname{Im}(z_2) > 0$ C. $\operatorname{Im}(z_1) > 0$ et $\operatorname{Im}(z_2) < 0$ D. $\operatorname{Im}(z_1) < 0$ et $\operatorname{Im}(z_2) < 0$ Choisir la bonne réponse.

- (A) A et C
 (B) A et B
 (C) B et D
 (D) B et C

PROBLÈME 065

On considère z un nombre complexe tel que $\left| \frac{z-2i}{z+i} \right| = 2, z \neq -i$. Alors z appartient au cercle de rayon 2 et de centre:

- (A) $(0, -2)$ (B) $(0, 0)$ (C) $(0, 2)$ (D) $(2, 0)$

PROBLÈME 066

On considère $z_1 = 2 + 3i$ et $z_2 = 3 + 4i$. L'ensemble $S = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - z_1|^2 - |z - z_2|^2 = |z_1 - z_2|^2 \right\}$ représente:

- (A) une hyperbole dont l'axe transverse a pour longueur 7 ;
 (B) une hyperbole d'excentricité 2 ;
 (C) une droite dont la somme des abscisse et ordonnée à l'origine vaut -18
 (D) une droite dont la somme des abscisse et ordonnée à l'origine vaut 14

PROBLÈME 067

La valeur de $\left(\frac{1+\sin\frac{2\pi}{9}+i\cos\frac{2\pi}{9}}{1+\sin\frac{2\pi}{9}-i\cos\frac{2\pi}{9}}\right)^3$ est

- (A) $-\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})$ (B) $-\frac{1}{2}(\sqrt{3}-i)$
 (C) $\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})$ (D) $\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)$

PROBLÈME 068

On considère $p, q \in \mathbb{R}$ et $(1-\sqrt{3}i)^{200} = 2^{199}(p+iq)$, $i = \sqrt{-1}$ alors $p+q+q^2$ et $p-q+q^2$ sont les racines de l'équation.

- (A) $x^2+4x-1=0$ (B) $x^2-4x+1=0$ (C) $x^2+4x+1=0$ (D) $x^2-4x-1=0$

PROBLÈME 069

Si $z \neq 0$ un nombre complexe tel que $|z - \frac{1}{z}| = 2$, alors la valeur maximale de $|z|$ est :

- (A) $\sqrt{2}$ (B) 1 (C) $\sqrt{2}-1$ (D) $\sqrt{2}+1$

PROBLÈME 070

On considère $S = \{z = x + iy : |z-1+i| \geq |z|, |z| < 2, |z+i| = |z-1|\}$. Alors l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles $w = 2x + iy \in S$ pour un certain $y \in \mathbb{R}$ est :

- (A) $\left(-\sqrt{2}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right]$ (B) $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{4}\right]$
 (C) $\left(-\sqrt{2}, \frac{1}{2}\right]$ (D) $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right]$

PROBLÈME 071

Si $z = 2 + 3i$, alors $z^5 + (\bar{z})^5$ vaut :

- (A) 244 (B) 224 (C) 245 (D) 265

PROBLÈME 072

On considère $S_1 = \{z_1 \in \mathbb{C} : |z_1 - 3| = \frac{1}{2}\}$ et $S_2 = \{z_2 \in \mathbb{C} : |z_2 - |z_2 + 1|| = |z_2 + |z_2 - 1||\}$. Alors, pour $z_1 \in S_1$ et $z_2 \in S_2$, la plus petite valeur de $|z_2 - z_1|$ est :

- (A) 0 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{3}{2}$ (D) $\frac{5}{2}$

PROBLÈME 073

On considère S l'ensemble des (α, β) , $\pi < \alpha, \beta < 2\pi$ pour lesquelles le nombre complexe $\frac{1-i\sin\alpha}{1+2i\sin\alpha}$ est imaginaire pur et $\frac{1+i\cos\beta}{1-2i\cos\beta}$ est réel. On considère $Z_{\alpha\beta} = \sin 2\alpha + i\cos 2\beta$, $(\alpha, \beta) \in S$. Alors

$\sum_{(\alpha, \beta) \in S} \left(iZ_{\alpha\beta} + \frac{1}{iZ_{\alpha\beta}}\right)$ vaut :

- (A) 3 (B) $3i$ (C) 1 (D) $2-i$

PROBLÈME 074

Supposons que la valeur minimale v_0 de $v = |z|^2 + |z-3|^2 + |z-6i|^2$, $z \in \mathbb{C}$ soit atteinte en $z = z_0$. Alors $|2z_0^2 - \bar{z}_0^3 + 3|^2 + v_0^2$ vaut :

- (A) 1000 (B) 1024 (C) 1105 (D) 1196

PROBLÈME 075

Si $z = x + iy$ vérifie $|z| - 2 = 0$ et $|z - i| - |z + 5i| = 0$, alors :

- (A) $x + 2y - 4 = 0$ (B) $x^2 + y - 4 = 0$ (C) $x + 2y + 4 = 0$ (D) $x^2 - y + 3 = 0$

PROBLÈME 076

Soient O l'origine et A le point $z_1 = 1 + 2i$. Si B est le point z_2 , $\operatorname{Re}(z_2) < 0$ tel que OAB soit un triangle rectangle isocèle d'hypoténuse OB, quelle proposition est FAUSSE ?

- (A) $\arg z_2 = \pi - \tan^{-1} 3$ (B) $\arg(z_1 - 2z_2) = -\tan^{-1} \frac{4}{3}$
 (C) $|z_2| = \sqrt{10}$ (D) $|2z_1 - z_2| = 5$

PROBLÈME 077

Pour $z \in \mathbb{C}$ si la valeur minimale de $(|z - 3\sqrt{2}| + |z - p\sqrt{2}i|)$ est $5\sqrt{2}$, alors une valeur de p vaut _____.

- (A) 3 (B) $\frac{7}{2}$ (C) 4 (D) $\frac{9}{2}$

PROBLÈME 078

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $S_n = \{z \in \mathbb{C} : |z - 3 + 2i| = \frac{n}{4}\}$ et $T_n = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2 + 3i| = \frac{1}{n}\}$. Alors le nombre d'éléments de l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} : S_n \cap T_n = \emptyset\}$ vaut :

- (A) 0 (B) 2 (C) 3 (D) 4

PROBLÈME 079

La partie réelle du nombre complexe $\frac{(1+2i)^8 \cdot (1-2i)^2}{(3+2i) \cdot (4-6i)}$ vaut :

- (A) $\frac{500}{13}$ (B) $\frac{110}{13}$ (C) $\frac{55}{6}$ (D) $\frac{550}{13}$

PROBLÈME 080

On note $\arg(z)$ l'argument principal du nombre complexe z . Alors $|z| = 3$ et $\arg(z - 1) - \arg(z + 1) = \frac{\pi}{4}$ se coupent :

- (A) en exactement un point ;
 (B) en exactement deux points ;
 (C) en aucun point ;
 (D) en une infinité de points.

PROBLÈME 081

On considère α et β les racines de l'équation $x^2 + (2i - 1) = 0$. Alors la valeur de $|\alpha^8 + \beta^8|$ vaut :

- (A) 50 (B) 250 (C) 1250 (D) 1500

PROBLÈME 082

Le nombre de points d'intersection de $|z - (4 + 3i)| = 2$ et $|z| + |z - 4| = 6$, $z \in \mathbb{C}$ vaut :

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

PROBLÈME 083

L'aire du polygone dont les sommets ont pour affixes les racines non réelles de l'équation $\bar{z} = iz^2$ est :

- (A) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ (B) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (C) $\frac{3}{2}$ (D) $\frac{3}{4}$

PROBLÈME 084

On considère $A = \{z \in \mathbb{C} : \left| \frac{z+1}{z-1} \right| < 1\}$ et $B = \{z \in \mathbb{C} : \arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \frac{2\pi}{3}\}$. Alors $A \cap B$ est :

- (A) un arc de cercle de centre $\left(0, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ situé uniquement dans les deuxième et troisième quadrants ;
 (B) un arc de cercle de centre $\left(0, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ situé uniquement dans le deuxième quadrant ;
 (C) l'ensemble vide ;
 (D) un arc de cercle de rayon $\frac{2}{\sqrt{3}}$ situé uniquement dans le troisième quadrant.

PROBLÈME 085

On considère z_1 et z_2 deux nombres complexes tels que $\bar{z}_1 = iz_2$ et $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \pi$. Alors :

- (A) $\arg z_2 = \frac{\pi}{4}$ (B) $\arg z_2 = -\frac{3\pi}{4}$
 (C) $\arg z_1 = \frac{\pi}{4}$ (D) $\arg z_1 = -\frac{3\pi}{4}$

PROBLÈME 086

On considère C un cercle du plan complexe passant par les points $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = 4 + 3i$ et $z_3 = 5i$. Si $z (\neq z_1)$ est un point de C tel que la droite passant par z et z_1 soit perpendiculaire à la droite passant par z_2 et z_3 , alors $\arg(z)$ vaut :

- (A) $\tan^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) - \pi$ (B) $\tan^{-1}\left(\frac{24}{7}\right) - \pi$
 (C) $\tan^{-1}(3) - \pi$ (D) $\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) - \pi$

PROBLÈME 087

On considère $A = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z - (1 + i)| \leq 2\}$ et $B = \{z \in \mathbb{C} : |z - (1 - i)| = 1\}$. Alors B :

- (A) est vide ;
 (B) contient exactement deux éléments ;
 (C) contient exactement trois éléments ;
 (D) est infini.

PROBLÈME 088

Si z est un nombre complexe tel que $\frac{z-i}{z-1}$ est imaginaire pur, alors la valeur minimale de $|z - (3 + 3i)|$ vaut :

- (A) $2\sqrt{2} - 1$ (B) $3\sqrt{2}$ (C) $6\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{2}$

PROBLÈME 089

Si $S = \{z \in \mathbb{C} : \frac{z-i}{z+2i} \in \mathbb{R}\}$, alors :

- (A) S contient exactement deux éléments ;
- (B) S contient un seul élément ;
- (C) S est un cercle du plan complexe ;
- (D) S est une droite du plan complexe.

PROBLÈME 090

Si $(\sqrt{3} + i)^{100} = 2^{99}(p + iq)$, alors p et q sont les racines de l'équation :

- (A) $x^2 - (\sqrt{3} - 1)x - \sqrt{3} = 0$
- (B) $x^2 + (\sqrt{3} + 1)x + \sqrt{3} = 0$
- (C) $x^2 + (\sqrt{3} - 1)x - \sqrt{3} = 0$
- (D) $x^2 - (\sqrt{3} + 1)x + \sqrt{3} = 0$

PROBLÈME 091

L'équation $\arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \frac{\pi}{4}$ représente un cercle de :

- (A) centre (0, -1) et de rayon $\sqrt{2}$
- (B) centre (0, 1) et de rayon $\sqrt{2}$
- (C) centre (0, 0) et de rayon $\sqrt{2}$
- (D) centre (0, 1) et de rayon 2

PROBLÈME 092

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes. Soient $S_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2| \leq 1\}$ et $S_2 = \{z \in \mathbb{C} : z(1+i) + \bar{z}(1-i) \geq 4\}$. Alors la valeur maximale de $|z - \frac{5}{2}|^2$ pour $z \in S_1 \cap S_2$ vaut :

- (A) $\frac{3+2\sqrt{2}}{4}$
- (B) $\frac{5+2\sqrt{2}}{2}$
- (C) $\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$
- (D) $\frac{5+2\sqrt{2}}{4}$

PROBLÈME 093

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes. Soient $S_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 3 - 2i|^2 = 8\}$, $S_2 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \geq 5\}$ et $S_3 = \{z \in \mathbb{C} : |z - \bar{z}| \geq 8\}$. Alors le nombre d'éléments de $S_1 \cap S_2 \cap S_3$ vaut :

- (A) 1
- (B) 0
- (C) 2
- (D) une infinité

PROBLÈME 094

On note n le nombre de solutions de l'équation $z^2 + 3\bar{z} = 0$, où z est un nombre complexe. Alors $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ vaut :

- (A) 1
- (B) $\frac{4}{3}$
- (C) $\frac{3}{2}$
- (D) 2

PROBLÈME 095

Si z et ω sont deux nombres complexes tels que $|z\omega| = 1$ et $\arg(z) - \arg(\omega) = \frac{3\pi}{2}$, alors $\arg\left(\frac{1-2\bar{z}\omega}{1+3\bar{z}\omega}\right)$ vaut ($\arg(z)$ désigne l'argument principal de z):

- (A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $-\frac{3\pi}{4}$ (C) $-\frac{\pi}{4}$ (D) $\frac{3\pi}{4}$

PROBLÈME 096

On considère le nombre complexe $w = 1 - \sqrt{3}i$. On considère z un autre nombre complexe tel que $|zw| = 1$ et $\arg(z) - \arg(w) = \frac{\pi}{2}$. Alors l'aire du triangle dont les sommets ont pour affixes 0, z et w vaut :

- (A) 4 (B) $\frac{1}{4}$ (C) 2 (D) $\frac{1}{2}$

PROBLÈME 097

Si l'équation $a|z|^2 + \overline{\alpha}z + \alpha\bar{z} + d = 0$ représente un cercle, où a et d sont des constantes réelles, quelle condition est correcte ?

- (A) $|\alpha|^2 - ad \neq 0$
 (B) $|\alpha|^2 - ad > 0$ et $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
 (C) $|\alpha|^2 - ad \geq 0$ et $a \in \mathbb{R}$
 (D) $\alpha = 0$ et $a, d \in \mathbb{R}^+$

PROBLÈME 098

On considère S_1, S_2 et S_3 trois ensembles définis par $S_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| \leq \sqrt{2}\}$, $S_2 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}((1 - i)z) \geq 1\}$, $S_3 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) \leq 1\}$. Alors l'ensemble $S_1 \cap S_2 \cap S_3$:

- (A) contient exactement trois éléments ;
 (B) est un singleton ;
 (C) contient une infinité d'éléments ;
 (D) contient exactement deux éléments.

PROBLÈME 099

L'aire du triangle de sommets $A(z)$, $B(iz)$ et $C(z + iz)$ vaut :

- (A) 1 (B) $\frac{1}{2}|z|^2$
 (C) $\frac{1}{2}|z + iz|^2$ (D) $\frac{1}{2}$

PROBLÈME 100

La plus petite valeur de $|z|$, où z est un nombre complexe vérifiant l'inégalité $\exp\left(\frac{(|z|+3)(|z|-1)}{|z|+1} \log_e 2\right) \geq \log_{\sqrt{2}}|5\sqrt{7} + 9i|$, $i = \sqrt{-1}$ vaut :

- (A) 8 (B) 3 (C) 2 (D) $\sqrt{5}$

PROBLÈME 101

On considère un nombre complexe z , $|z| \neq 1$, vérifiant $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{|z|+11}{(|z|-1)^2} \right) \leq 2$. Alors la plus grande valeur de $|z|$ vaut _____.

- (A) 5 (B) 8 (C) 6 (D) 7

PROBLÈME 102

Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sont tels que $1 - 2i$ (où $i^2 = -1$) soit une racine de $z^2 + \alpha z + \beta = 0$, alors $(\alpha - \beta)$ vaut :

- (A) -7 (B) 7 (C) 3 (D) -3

PROBLÈME 103

Soient les droites $(2 - i)z = (2 + i)\bar{z}$ et $(2 + i)z + (i - 2)\bar{z} - 4i = 0$ (où $i^2 = -1$), normales à un cercle C . Si la droite $iz + \bar{z} + 1 + i = 0$ est tangente à C , alors son rayon vaut :

- (A) $\frac{3}{2\sqrt{2}}$ (B) $3\sqrt{2}$ (C) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ (D) $\frac{3}{\sqrt{2}}$

PROBLÈME 104

On considère $z = x + iy$ un nombre complexe non nul tel que $z^2 = i|z|^2$, où $i = \sqrt{-1}$, alors z appartient:

- (A) à la droite $y = -x$;
(B) à l'axe réel ;
(C) à la droite $y = x$;
(D) à l'axe imaginaire.

PROBLÈME 105

Le domaine représenté par $\{z = x + iy \in \mathbb{C} : |z| - \operatorname{Re}(z) \leq 1\}$ est aussi défini par l'inégalité:

- (A) $y^2 \leq 2(x + \frac{1}{2})$ (B) $y^2 \leq x + \frac{1}{2}$
(C) $y^2 \geq 2(x + 1)$ (D) $y^2 \geq x + 1$

PROBLÈME 106

La valeur de $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{1-i} \right)^{30}$ est :

- (A) $-2^{15}i$ (B) -2^{15} (C) $2^{15}i$ (D) 6^5

PROBLÈME 107

Si les quatre nombres complexes $z, \bar{z}, \bar{z} - 2\operatorname{Re}(\bar{z})$ et $z - 2\operatorname{Re}(z)$ représentent les sommets d'un carré de côté 4 dans le plan complexe, alors $|z|$ vaut :

- (A) $4\sqrt{2}$ (B) 4 (C) 2 (D) $2\sqrt{2}$

PROBLÈME 108

Si $a, b \in \mathbb{R}$ vérifient $(2 + \alpha)^4 = a + b\alpha$, avec $\alpha = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, alors $a + b$ vaut :

- (A) 33 (B) 9 (C) 24 (D) 57

PROBLÈME 109

On considère $u = \frac{2z+i}{z-ki}$, $z = x + iy$ et $k > 0$. Si la courbe définie par $\operatorname{Re}(u) + \operatorname{Im}(u) = 1$ coupe l'axe des ordonnées en P et Q, avec $PQ = 5$, alors k vaut :

- (A) 2 (B) 4 (C) $1/2$ (D) $3/2$

PROBLÈME 110

Si z_1, z_2 sont des nombres complexes tels que $\operatorname{Re}(z_1) = |z_1 - 1|$, $\operatorname{Re}(z_2) = |z_2 - 1|$, et $\arg(z_1 - z_2) = \frac{\pi}{6}$, alors $\operatorname{Im}(z_1 + z_2)$ vaut :

- (A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (C) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (D) $2\sqrt{3}$

PROBLÈME 111

La partie imaginaire de $\left(3 + 2\sqrt{-54}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(3 - 2\sqrt{-54}\right)^{\frac{1}{2}}$ peut valoir:

- (A) $-2\sqrt{6}$ (B) 6 (C) $\sqrt{6}$ (D) $-\sqrt{6}$

PROBLÈME 112

La valeur de $\left(\frac{1+\sin\frac{2\pi}{9}+i\cos\frac{2\pi}{9}}{1+\sin\frac{2\pi}{9}-i\cos\frac{2\pi}{9}}\right)^3$ est :

- (A) $\frac{1}{2}(\sqrt{3} - i)$ (B) $-\frac{1}{2}(\sqrt{3} - i)$
(C) $-\frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})$ (D) $\frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})$

PROBLÈME 113

Si z est un nombre complexe vérifiant $|\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)| = 4$, alors $|z|$ ne peut pas valoir:

- (A) $\sqrt{10}$ (B) $\sqrt{7}$ (C) $\sqrt{\frac{17}{2}}$ (D) $\sqrt{8}$

PROBLÈME 114

On considère z un nombre complexe tel que $\left|\frac{z-i}{z+2i}\right| = 1$ et $|z| = \frac{5}{2}$. Alors $|z + 3i|$ vaut :

- (A) $2\sqrt{3}$ (B) $\sqrt{10}$ (C) $\frac{15}{4}$ (D) $\frac{7}{2}$

PROBLÈME 115

Si l'équation $x^2 + bx + 45 = 0$ ($b \in \mathbb{R}$) a des racines complexes conjuguées vérifiant $|z + 1| = 2\sqrt{10}$, alors:

- (A) $b^2 - b = 42$ (B) $b^2 + b = 12$ (C) $b^2 + b = 72$ (D) $b^2 - b = 30$

PROBLÈME 116

Si $\frac{3+i\sin\theta}{4-i\cos\theta}$ est réel, avec $\theta \in [0, 2\pi]$, alors un argument de $\sin\theta + i\cos\theta$ est :

- (A) $\pi - \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ (B) $-\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$
(C) $\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$ (D) $\pi - \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$

PROBLÈME 117

Si $\operatorname{Re}\left(\frac{z-1}{2z+i}\right) = 1$, où $z = x + iy$, alors le point (x, y) appartient:

- (A) à une droite de coefficient directeur $\frac{3}{2}$
- (B) à une droite de coefficient directeur $-\frac{2}{3}$
- (C) à un cercle de diamètre $\frac{\sqrt{5}}{2}$
- (D) à un cercle de centre $(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$

PROBLÈME 118

On considère $z \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Im}(z) = 10$ et vérifiant $\frac{2z-n}{2z+n} = 2i - 1$ pour un certain entier naturel n . Alors:

- (A) $n = 20$ et $\operatorname{Re}(z) = -10$
- (B) $n = 40$ et $\operatorname{Re}(z) = 10$
- (C) $n = 40$ et $\operatorname{Re}(z) = -10$
- (D) $n = 20$ et $\operatorname{Re}(z) = 10$

PROBLÈME 119

L'équation $|z - i| = |z - 1|$, avec $i = \sqrt{-1}$, représente:

- (A) un cercle de rayon 1 ;
- (B) la droite passant par l'origine de coefficient directeur -1 ;
- (C) un cercle de rayon $\frac{1}{2}$
- (D) la droite passant par l'origine de coefficient directeur 1.

PROBLÈME 120

Si z et w sont deux nombres complexes tels que $|zw| = 1$ et $\arg(z) - \arg(w) = \frac{\pi}{2}$, alors:

- (A) $z\bar{w} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$
- (B) $\bar{z}w = i$
- (C) $z\bar{w} = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$
- (D) $\bar{z}w = -i$

PROBLÈME 121

Si $a > 0$ et $z = \frac{(1+i)^2}{a-i}$ a pour module $\sqrt{\frac{2}{5}}$, alors $\bar{z}$ vaut :

- (A) $-\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$
- (B) $-\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i$
- (C) $\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i$
- (D) $-\frac{3}{5} - \frac{1}{5}i$

PROBLÈME 122

On considère $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. Si $\omega = \frac{5+3z}{5(1-z)}$, alors:

- (A) $4\operatorname{Im}(\omega) > 5$
- (B) $5\operatorname{Im}(\omega) < 1$
- (C) $5\operatorname{Re}(\omega) > 4$
- (D) $5\operatorname{Re}(\omega) > 1$

PROBLÈME 123

Tous les points de l'ensemble $S = \left\{ \frac{\alpha+i}{\alpha-i} : \alpha \in \mathbb{R} \right\} (i = \sqrt{-1})$ appartiennent :

- (A) à une droite de coefficient directeur -1 ;
- (B) à une droite de coefficient directeur 1 ;
- (C) à un cercle de rayon 1 ;
- (D) à un cercle de rayon $\sqrt{2}$.

PROBLÈME 124

Si $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$, avec $i^2 = -1$, alors $(1 + iz + z^5 + iz^8)^9$ vaut :

- (A) 1
- (B) -1
- (C) 0
- (D) $(-1 + 2i)^9$

PROBLÈME 125

Si α et β les racines de l'équation $x^2 - 2x + 2 = 0$, alors le plus petit entier n pour lequel $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n = 1$ vaut :

- (A) 2
- (B) 5
- (C) 4
- (D) 3

PROBLÈME 126

On considère z_1 et z_2 deux nombres complexes vérifiant $|z_1| = 9$ et $|z_2 - 3 - 4i| = 4$. Alors la valeur minimale de $|z_1 - z_2|$ vaut :

- (A) 0
- (B) 1
- (C) 2
- (D) $\sqrt{2}$

PROBLÈME 127

Si $\frac{z-\alpha}{z+\alpha}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) est imaginaire pur et $|z| = 2$, alors une valeur de α est :

- (A) $\frac{1}{2}$
- (B) $\sqrt{2}$
- (C) 2
- (D) 1

PROBLÈME 128

On considère z un nombre complexe tel que $|z| + z = 3 + i$, où $i^2 = -1$. Alors $|z|$ vaut :

- (A) $\frac{\sqrt{34}}{3}$
- (B) $\frac{5}{3}$
- (C) $\frac{5}{4}$
- (D) $\frac{\sqrt{41}}{4}$

PROBLÈME 129

On considère $\left(-2 - \frac{1}{3}i\right)^3 = \frac{x+iy}{27}$ ($i = \sqrt{-1}$), où x et y sont réels, alors $y - x$ vaut :

- (A) -85
- (B) 85
- (C) -91
- (D) 91

PROBLÈME 130

On considère $z = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^5 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5$. Si $R(z)$ et $I(z)$ désignent respectivement les parties réelle et imaginaire de z , alors :

- (A) $R(z) = -3$
 (B) $R(z) < 0$ et $I(z) > 0$
 (C) $I(z) = 0$
 (D) $R(z) > 0$ et $I(z) > 0$

PROBLÈME 131

On considère z_1 et z_2 deux nombres complexes non nuls quelconques tels que $3|z_1| = 4|z_2|$. Si $z = \frac{3z_1}{2z_2} + \frac{2z_2}{3z_1}$ alors :

- (A) $\operatorname{Im}(z) = 0$ (B) $|z| = \sqrt{\frac{17}{2}}$
 (C) $|z| = \frac{1}{2}\sqrt{9 + 16\cos^2\theta}$ (D) $\operatorname{Re}(z) = 0$

PROBLÈME 132

On considère z_0 une racine de l'équation du second degré $x^2 + x + 1 = 0$, Si $z = 3 + 6iz_0^{81} - 3iz_0^{93}$, alors $\arg(z)$ vaut :

- (A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{6}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) 0

PROBLÈME 133

On considère α et β deux racines de l'équation $x^2 + 2x + 2 = 0$, alors $\alpha^{15} + \beta^{15}$ vaut :

- (A) -256 (B) 512 (C) -512 (D) 256

PROBLÈME 134

On considère $A = \{\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \pi[: \frac{3 + 2i\sin\theta}{1 - 2i\sin\theta} \text{ est imaginaire pur}\}$. Alors la somme des éléments de A vaut :

- (A) $\frac{5\pi}{6}$ (B) π (C) $\frac{3\pi}{4}$ (D) $\frac{2\pi}{3}$

PROBLÈME 135

Le plus petit entier strictement positif n pour lequel $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\right)^n = 1$, vaut :

- (A) 2 (B) 3 (C) 5 (D) 6

PROBLÈME 136

Si $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ sont les racines distinctes de l'équation $x^2 - x + 1 = 0$, alors $\alpha^{101} + \beta^{107}$ vaut :

- (A) 2 (B) -1 (C) 0 (D) 1

PROBLÈME 137

Si $|z - 3 + 2i| \leq 4$, alors la différence entre la plus grande et la plus petite valeur de $|z|$ vaut :

- (A) $2\sqrt{13}$ (B) 8 (C) $4 + \sqrt{13}$ (D) $\sqrt{13}$

PROBLÈME 138

L'ensemble des $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $w = \frac{1+(1-8\alpha)z}{1-z}$ est imaginaire pur pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| = 1$ et $\operatorname{Re}(z) \neq 1$, est :

- (A) l'ensemble vide
- (B) $\{0\}$
- (C) $\{0, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\}$
- (D) égal à $\mathbb{R}$

PROBLÈME 139

L'équation $\operatorname{Im}\left(\frac{iz-2}{z-i}\right) + 1 = 0$, $z \in \mathbb{C}$, $z \neq i$ représente une partie d'un cercle dont le rayon vaut :

- (A) 2
- (B) 1
- (C) $\frac{3}{4}$
- (D) $\frac{1}{2}$

PROBLÈME 140

On considère $z \in \mathbb{C}$, $\in$ l'ensemble des nombres complexes. Alors l'équation $2|z + 3i| - |z - i| = 0$ représente :

- (A) un cercle de rayon $\frac{8}{3}$.
- (B) un cercle de diamètre $\frac{10}{3}$.
- (C) une ellipse dont le grand axe a pour longueur $\frac{16}{3}$.
- (D) une ellipse dont le petit axe a pour longueur $\frac{16}{9}$.

PROBLÈME 141

On considère ω un nombre complexe tel que $2\omega + 1 = z$, avec $z = \sqrt{-3}$. Si

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\omega^2 - 1 & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega' \end{vmatrix} = 3k$$

alors k vaut :

- (A) z
- (B) -1
- (C) 1
- (D) $-z$

PROBLÈME 142

Le point d'affixe $2 + i$ se déplace d'une unité vers l'est, puis de 2 unités vers le nord et enfin de $2\sqrt{2}$ unités vers le sud-ouest. Sa nouvelle affixe est :

- (A) $2 + 2i$
- (B) $1 + i$
- (C) $-1 - i$
- (D) $-2 - 2i$

PROBLÈME 143

Une valeur de θ pour laquelle $\frac{2+3i \sin \theta}{1-2i \sin \theta}$ est imaginaire pur est :

- (A) $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$
- (B) $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
- (C) $\frac{\pi}{3}$
- (D) $\frac{\pi}{6}$

PROBLÈME 144

Un nombre complexe z est dit unitaire si $|z| = 1$. On suppose que z_1 et z_2 sont des nombres complexes tels que $\frac{z_1 - 2z_2}{2 - z_1 z_2}$ est unitaire et z_2 n'est pas unitaire. Alors le point z_1 appartient :

- (A) à un cercle de rayon 2 ;
- (B) à un cercle de rayon $\sqrt{2}$;
- (C) à une droite parallèle à l'axe des abscisses ;
- (D) à une droite parallèle à l'axe des ordonnées.

PROBLÈME 145

Si z est un nombre complexe tel que $|z| \geq 2$, alors la valeur minimale de $|z + \frac{1}{z}|$:

- (A) est strictement supérieure à $\frac{5}{2}$
- (B) est strictement supérieure à $\frac{3}{2}$ mais inférieure à $\frac{5}{2}$
- (C) est égale à $\frac{5}{2}$
- (D) appartient à l'intervalle $]1, 2[$.

PROBLÈME 146

Si z est un nombre complexe de module 1 et d'argument θ , alors $\arg\left(\frac{1+z}{1+\bar{z}}\right)$ vaut :

- (A) $-\theta$
- (B) $\frac{\pi}{2} - \theta$
- (C) θ
- (D) $\pi - \theta$

PROBLÈME 147

Si $z \neq 1$ et $\frac{z^2}{z-1}$ est réel, alors le point d'affixe z appartient :

- (A) à l'axe réel ou à un cercle passant par l'origine ;
- (B) à un cercle centré à l'origine ;
- (C) à l'axe réel ou à un cercle ne passant pas par l'origine ;
- (D) à l'axe imaginaire.

PROBLÈME 148

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$. Si $z^2 + \alpha z + \beta = 0$ admet deux racines distinctes sur la droite $\text{Re}(z) = 1$, alors nécessairement :

- (A) $\beta \in (-1, 0)$
- (B) $|\beta| = 1$
- (C) $\beta \in (1, \infty)$
- (D) $\beta \in (0, 1)$

PROBLÈME 149

Si $\omega (\neq 1)$ est une racine cubique de l'unité et $(1 + \omega)^7 = A + B\omega$. Alors (A, B) vaut :

- (A) (1, 1)
- (B) (1, 0)
- (C) (-1, 1)
- (D) (0, 1)

PROBLÈME 150

Le nombre de nombres complexes z tels que $|z - 1| = |z + 1| = |z - i|$ vaut :

- (A) 1
- (B) 2
- (C) ∞
- (D) 0

PROBLÈME 151

Si $|z - \frac{4}{z}| = 2$, alors la valeur maximale de $|z|$ vaut :

- (A) $\sqrt{5} + 1$ (B) 2 (C) $2 + \sqrt{2}$ (D) $\sqrt{3} + 1$

PROBLÈME 152

Le conjugué d'un nombre complexe est $\frac{1}{i-1}$ alors ce nombre complexe est :

- (A) $\frac{-1}{i-1}$ (B) $\frac{1}{i+1}$ (C) $\frac{-1}{i+1}$ (D) $\frac{1}{i-1}$

PROBLÈME 153

Si $|z + 4| \leq 3$, alors la valeur maximale de $|z + 1|$ vaut :

- (A) 6 (B) 0 (C) 4 (D) 10

PROBLÈME 154

La valeur de $\sum_{k=1}^{10} \left(\sin \frac{2k\pi}{11} + i \cos \frac{2k\pi}{11} \right)$ vaut :

- (A) i (B) 1 (C) -1 (D) $-i$

PROBLÈME 155

Si $z^2 + z + 1 = 0$, où z est un nombre complexe, alors la valeur de $\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + \left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)^2 + \left(z^3 + \frac{1}{z^3}\right)^2 + \dots + \left(z^6 + \frac{1}{z^6}\right)^2$ vaut :

- (A) 18 (B) 54 (C) 6 (D) 12

PROBLÈME 156

Si les racines cubiques de l'unité sont $1, \omega, \omega^2$ alors les racines de l'équation $(x - 1)^3 + 8 = 0$ sont:

- (A) $-1, -1 + 2\omega, -1 - 2\omega^2$ (B) $-1, -1, -1$
(C) $-1, 1 - 2\omega, 1 - 2\omega^2$ (D) $-1, 1 + 2\omega, 1 + 2\omega^2$

PROBLÈME 157

Si z_1 et z_2 sont deux nombres complexes non nuls tels que $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$, alors $\arg z_1 - \arg z_2$ vaut :

- (A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $-\pi$ (C) 0 (D) $-\frac{\pi}{2}$

PROBLÈME 158

Si $\omega = \frac{z}{z - \frac{1}{3}i}$ et $|\omega| = 1$, alors z appartient:

- (A) à une ellipse
(B) à un cercle
(C) à une droite
(D) à une parabole

PROBLÈME 159

Soient z et w deux nombres complexes tels que $\bar{z} + i\bar{w} = 0$ et $\arg(zw) = \pi$. Alors $\arg(z)$ vaut :

- (A) $\frac{5\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) $\frac{3\pi}{4}$ (D) $\frac{\pi}{4}$

PROBLÈME 160

Si $z = x - iy$ et $z^{\frac{1}{3}} = p + iq$, alors $\frac{\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right)}{(p^2 + q^2)}$ vaut :

- (A) -2 (B) -1 (C) 2 (D) 1

PROBLÈME 161

Si $|z^2 - 1| = |z|^2 + 1$, alors z appartient :

- (A) à une ellipse
(B) à l'axe imaginaire
(C) à un cercle
(D) à l'axe réel

PROBLÈME 162

Si z et ω sont deux nombres complexes non nuls tels que $|z\omega| = 1$ et $\text{Arg}(z) - \text{Arg}(\omega) = \frac{\pi}{2}$, alors $\bar{z}\omega$ vaut

- (A) $-i$ (B) 1 (C) -1 (D) i

PROBLÈME 163

On considère Z_1 et Z_2 deux racines de l'équation $Z^2 + aZ + b = 0$, où Z est complexe. On suppose en outre que l'origine, Z_1 et Z_2 forment un triangle équilatéral. Alors :

- (A) $a^2 = 4b$ (B) $a^2 = b$ (C) $a^2 = 2b$ (D) $a^2 = 3b$

PROBLÈME 164

Si $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^x = 1$ alors :

- (A) $x = 2n + 1$, avec n entier strictement positif ;
(B) $x = 4n$, avec n entier strictement positif ;
(C) $x = 2n$, avec n entier strictement positif ;
(D) $x = 4n + 1$, avec n entier strictement positif.

PROBLÈME 165

z et w sont deux nombres complexes non nuls tels que $|z| = |w|$ et $\text{Arg}(z) + \text{Arg}(w) = \pi$ alors z vaut :

- (A) $\bar{w}$ (B) $-\bar{w}$ (C) ω (D) $-\omega$

PROBLÈME 166

Si $|z - 4| < |z - 2|$, sa solution est donnée par:

- (A) $\operatorname{Re}(z) > 0$
- (B) $\operatorname{Re}(z) < 0$
- (C) $\operatorname{Re}(z) > 3$
- (D) $\operatorname{Re}(z) > 2$

PROBLÈME 167

Le lieu du centre d'un cercle tangent extérieurement aux cercles $|z - z_1| = a$ et $|z - z_2| = b$, où z, z_1 & z_2 sont des nombres complexes, est :

- (A) une ellipse
- (B) une hyperbole
- (C) un cercle
- (D) aucune de ces réponses

Réponses numériques

PROBLÈME 168

On considère $z = (1+i)(1+2i)(1+3i)\dots(1+ni)$, où $i = \sqrt{-1}$. Si $|z|^2 = 44200$, alors n vaut ____.

PROBLÈME 169

On considère $\alpha = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et $\beta = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$, $i = \sqrt{-1}$. Si $(7-7\alpha+9\beta)^{20} + (9+7\alpha-7\beta)^{20} + (-7+9\alpha+7\beta)^{20} + (14+7\alpha+7\beta)^{20} = m^{10}$, alors m est ____.

PROBLÈME 170

Si α est une racine de l'équation $x^2 + x + 1 = 0$ et $\sum_{k=1}^n (\alpha^k + \frac{1}{\alpha^k})^2 = 20$, alors n vaut ____.

PROBLÈME 171

On considère $A = \{z \in \mathbb{C} : |z-2-i| = 3\}$, $B = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z-iz) = 2\}$ et $S = A \cap B$. Alors $\sum_{z \in S} |z|^2$ vaut ____.

PROBLÈME 172

Soient a, b des entiers appartenant à $[-3, 3]$ tels que $a + b \neq 0$. Combien de couples ordonnés (a, b) vérifient $|\frac{z-a}{z+b}| = 1$ et

$$\begin{vmatrix} z+1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & z+\omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & z+\omega \end{vmatrix} = 1$$

où $z \in \mathbb{C}$ et où ω, ω^2 sont les racines de $x^2 + x + 1 = 0$?

PROBLÈME 173

On considère α, β les racines de l'équation $x^2 - ax - b = 0$ avec $\operatorname{Im}(\alpha) < \operatorname{Im}(\beta)$. On considère $P_n = \alpha^n - \beta^n$. Si $P_3 = -5\sqrt{7}i$, $P_4 = -3\sqrt{7}i$, $P_5 = 11\sqrt{7}i$ et $P_6 = 45\sqrt{7}i$, alors $|\alpha^4 + \beta^4|$ vaut ____.

PROBLÈME 174

La somme des carrés des modules des éléments de l'ensemble $\{z = a + ib : a, b \in \mathbb{Z}, z \in \mathbb{C}, |z-1| \leq 1, |z-5| \leq |z-5i|\}$ est ____.

PROBLÈME 175

On considère $P = \{z \in \mathbb{C} : |z+2-3i| \leq 1\}$ et $Q = \{z \in \mathbb{C} : z(1+i) + \bar{z}(1-i) \leq -8\}$. Sur $P \cap Q$, la quantité $|z-3+2i|$ atteint son maximum en z_1 et son minimum en z_2 . Si $|z_1|^2 + 2|z_2|^2 = \alpha + \beta\sqrt{2}$, où α, β sont entiers, calculer $\alpha + \beta$.

PROBLÈME 176

Si α désigne le nombre de solutions de $|1 - i|^x = 2^x$ et $\beta = \left(\frac{|z|}{\arg(z)}\right)$, où

$z = \frac{\pi}{4}(1+i)^4 \left[\frac{1-\sqrt{\pi}i}{\sqrt{\pi}+i} + \frac{\sqrt{\pi}i}{1+\sqrt{\pi}i} \right]$, $i = \sqrt{-1}$, alors la distance du point (α, β) à la droite $4x - 3y = 7$ est

_____.

PROBLÈME 177

On considère α, β les racines de l'équation $x^2 - \sqrt{6}x + 3 = 0$ telles que $\operatorname{Im}(\alpha) > \operatorname{Im}(\beta)$. On considère a, b des entiers non divisibles par 3 et n un entier naturel tel que

$\frac{\alpha^{99}}{\beta} + \alpha^{98} = 3^n(a + ib)$, $i = \sqrt{-1}$. Alors $n + a + b$ vaut _____.

PROBLÈME 178

On considère α, β les racines de l'équation $x^2 - x + 2 = 0$ avec $\operatorname{Im}(\alpha) > \operatorname{Im}(\beta)$. Alors

$\alpha^6 + \alpha^4 + \beta^4 - 5\alpha^2$ vaut _____.

PROBLÈME 179

Soient les nombres complexes α et $\frac{1}{\alpha}$ situés sur les cercles $|z - z_0|^2 = 4$ et $|z - z_0|^2 = 16$ respectivement, où $z_0 = 1 + i$. Alors la valeur de $100|\alpha|^2$ est _____.

PROBLÈME 180

Si α vérifie l'équation $x^2 + x + 1 = 0$ et $(1 + \alpha)^7 = A + B\alpha + C\alpha^2$, $A, B, C \geq 0$, alors $5(3A - 2B - C)$ vaut _____.

PROBLÈME 181

On considère $w = z\bar{z} + k_1z + k_2i\bar{z} + \lambda(1 + i)$, avec $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$. L'équation $\operatorname{Re}(w) = 0$ représente un cercle C de rayon 1, situé dans le premier quadrant et tangent à la droite $y = 1$ ainsi qu'à l'axe des ordonnées. Si la courbe $\operatorname{Im}(w) = 0$ coupe C en A et B , calculer $30(AB)^2$.

PROBLÈME 182

On considère $S = \left\{ z \in \mathbb{C} - \{i, 2i\} : \frac{z^2 + 8iz - 15}{z^2 - 3iz - 2} \in \mathbb{R} \right\}$. Si $\alpha - \frac{13}{11}i \in S$, $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$, alors $242\alpha^2$ vaut

_____.

PROBLÈME 183

Pour $\alpha, \beta, z \in \mathbb{C}$ et $\lambda > 1$, si $\sqrt{\lambda - 1}$ est le rayon du cercle $|z - \alpha|^2 + |z - \beta|^2 = 2\lambda$, alors $|\alpha - \beta|$ vaut

_____.

PROBLÈME 184

On considère $z = 1 + i$ et $z_1 = \frac{1+i\bar{z}}{\bar{z}(1-z) + \frac{1}{z}}$. Alors $\frac{12}{\pi} \arg(z_1)$ vaut _____.

PROBLÈME 185

On considère $\alpha = 8 - 14i$, $A = \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{\alpha z - \bar{\alpha} \bar{z}}{z^2 - (\bar{z})^2 - 112i} = 1 \right\}$ et $B = \{z \in \mathbb{C} : |z + 3i| = 4\}$. Alors

$\sum_{z \in A \cap B} (\operatorname{Re} z - \operatorname{Im} z)$ vaut _____.

PROBLÈME 186

On considère $z = a + ib$, avec $b \neq 0$, un nombre complexe tel que $z^2 = \bar{z} 2^{1-|z|}$. Déterminer le plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $z^n = (z+1)^n$.

PROBLÈME 187

On considère $S = \{z \in \mathbb{C} : z^2 + \bar{z} = 0\}$. Alors $\sum_{z \in S} (\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z))$ vaut _____.

PROBLÈME 188

On considère $S = \{z \in \mathbb{C} : |z-2| \leq 1, z(1+i) + \bar{z}(1-i) \leq 2\}$. Sur S , la quantité $|z-4i|$ atteint son minimum en z_1 et son maximum en z_2 . Si $5(|z_1|^2 + |z_2|^2) = \alpha + \beta\sqrt{5}$, où α, β sont entiers, calculer $\alpha + \beta$.

PROBLÈME 189

La somme des carrés des modules des nombres complexes z vérifiant $\bar{z} = iz^2 + z^2 - z$ vaut _____.

PROBLÈME 190

Le nombre d'éléments de l'ensemble $\{z = a + ib \in \mathbb{C} : a, b \in \mathbb{Z} \text{ et } 1 < |z-3+2i| < 4\}$ vaut _____.

PROBLÈME 191

Si $z^2 + z + 1 = 0$, $z \in \mathbb{C}$, alors $\left| \sum_{n=1}^{15} \left(z^n + (-1)^n \frac{1}{z^n} \right)^2 \right|$ vaut _____.

PROBLÈME 192

On considère $S = \{z \in \mathbb{C} : |z-3| \leq 1 \text{ et } z(4+3i) + \bar{z}(4-3i) \leq 24\}$. Si $\alpha + i\beta$ est le point de S le plus proche de $4i$, alors $25(\alpha + \beta)$ vaut _____.

PROBLÈME 193

Pour les nombres complexes z vérifiant $|z-2-2i| \leq 1$, la valeur maximale de $|3iz+6|$ est atteinte en $a+ib$. Alors $a+b$ vaut _____.

PROBLÈME 194

Un point d'affixe z se déplace dans le plan complexe de sorte que $\arg\left(\frac{z-2}{z+2}\right) = \frac{\pi}{4}$, alors la valeur minimale de $|z-9\sqrt{2}-2i|^2$ vaut _____.

PROBLÈME 195

On considère z_1 et z_2 deux nombres complexes tels que $\arg(z_1 - z_2) = \frac{\pi}{4}$ et z_1, z_2 vérifient l'équation $|z-3| = \operatorname{Re}(z)$. Alors la partie imaginaire de $z_1 + z_2$ vaut _____.

PROBLÈME 196

Le plus petit entier strictement positif n tel que $\frac{(2i)^n}{(1-i)^{n-2}}, i = \sqrt{-1}$ soit un entier strictement positif vaut _____.

PROBLÈME 197

On considère $z = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$, avec $i^2 = -1$. Calculer $21 + (z + \frac{1}{z})^3 + (z^2 + \frac{1}{z^2})^3 + (z^3 + \frac{1}{z^3})^3 + \dots + (z^{21} + \frac{1}{z^{21}})^3$.

PROBLÈME 198

Si la partie réelle de $z = \frac{3+2i\cos\theta}{1-3i\cos\theta}$, avec $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, est nulle, calculer $\sin^2(3\theta) + \cos^2\theta$.

PROBLÈME 199

Un cercle a pour équation $\operatorname{Re}(z^2) + 2(\operatorname{Im}(z))^2 + 2\operatorname{Re}(z) = 0$, où $z = x + iy$. Déterminer l'ordonnée à l'origine de la droite passant par le centre de ce cercle et le sommet de la parabole $x^2 - 6x - y + 13 = 0$.

PROBLÈME 200

On considère $S = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \forall a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$, où $i = \sqrt{-1}$. Alors le nombre d'entiers à deux chiffres de l'ensemble S vaut _____.

PROBLÈME 201

On considère z_1, z_2 les racines de l'équation $z^2 + az + 12 = 0$ et z_1, z_2 forment un triangle équilatéral avec l'origine. Alors $|a|$ vaut :

PROBLÈME 202

Soient z, ω deux nombres complexes tels que $\omega = z\bar{z} - 2z + 2$ et $\left| \frac{z+i}{z-3i} \right| = 1$, la partie réelle $\operatorname{Re}(\omega)$ étant minimale. Déterminer le plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ pour lequel ω^n est réel.

PROBLÈME 203

On considère les nombres complexes z vérifiant $|z+5| \leq 4$ et $z(1+i) + \bar{z}(1-i) \geq -10$, avec $i^2 = -1$. Si le maximum de $|z+1|^2$ vaut $\alpha + \beta\sqrt{2}$, calculer $\alpha + \beta$.

PROBLÈME 204

On considère $i^2 = -1$. On pose $k = \frac{(-1+i\sqrt{3})^{21}}{(1-i)^{24}} + \frac{(1+i\sqrt{3})^{21}}{(1+i)^{24}}$ et $n = \lfloor |k| \rfloor$, la partie entière de $|k|$. Calculer $\sum_{j=0}^{n+5} (j+5)^2 - \sum_{j=0}^{n+5} (j+5)$.

PROBLÈME 205

Les plus petite et plus grande valeurs réelles de α pour lesquelles l'équation $z + \alpha|z-1| + 2i = 0$, avec $z \in \mathbb{C}$ et $i^2 = -1$, admet une solution sont respectivement p et q . Calculer $4(p^2 + q^2)$.

PROBLÈME 206

Si $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{\frac{m}{2}} = \left(\frac{1+i}{i-1}\right)^{\frac{n}{3}} = 1$, ($m, n \in \mathbb{N}$), alors le plus grand commun diviseur des plus petites valeurs de m et n vaut _____.

Grille des réponses

Réponses reprises du document fourni. « — » : réponse non précisée.

1	B	31	C	61	A	91	B	121	B
2	A	32	B	62	D	92	D	122	D
3	A	33	B	63	A	93	A	123	C
4	D	34	B	64	D	94	B	124	B
5	B	35	A	65	A	95	B	125	C
6	D	36	A	66	D	96	D	126	A
7	A	37	C	67	B	97	B	127	C
8	C	38	C	68	B	98	C	128	B
9	D	39	B	69	D	99	B	129	D
10	A	40	B	70	B	100	B	130	C
11	D	41	A	71	A	101	D	131	C
12	C	42	C	72	C	102	A	132	A
13	D	43	D	73	C	103	A	133	A
14	D	44	D	74	A	104	C	134	D
15	D	45	B	75	C	105	A	135	B
16	A	46	D	76	D	106	A	136	D
17	B	47	B	77	C	107	D	137	A
18	A	48	C	78	D	108	B	138	B
19	D	49	A	79	D	109	A	139	C
20	C	50	D	80	C	110	D	140	A
21	A	51	B	81	A	111	A	141	D
22	A	52	B	82	C	112	B	142	B
23	B	53	A	83	A	113	B	143	B
24	A	54	C	84	B	114	D	144	A
25	C	55	B	85	C	115	D	145	B
26	A	56	C	86	B	116	D	146	C
27	D	57	D	87	D	117	C	147	A
28	A	58	D	88	D	118	C	148	C
29	A	59	D	89	D	119	D	149	A
30	B	60	C	90	A	120	D	150	A

Grille des réponses · suite

151	A	163	D	175	36	187	0	199	1
152	C	164	B	176	3	188	26	200	11
153	A	165	B	177	49	189	2	201	6
154	D	166	C	178	13	190	40	202	4
155	D	167	B	179	20	191	2	203	48
156	C	168	5	180	5	192	80	204	310
157	C	169	49	181	24	193	5	205	10
158	C	170	11	182	1680	194	98	206	4
159	C	171	22	183	2	195	6		
160	A	172	10	184	9	196	6		
161	B	173	31	185	14	197	13		
162	A	174	9	186	6	198	1		