

LIVRET D'ENTRAÎNEMENT

Rallye Mathématiques

1^{re} année du bac — Sciences mathématiques

2^e année du lycée — programme marocain de la 1^{re} année du bac sciences mathématiques

Préparation aux Olympiades de mathématiques du lycée
et aux concours de calcul rapide

AUTEUR

Maths Olympiad

**8 chapitres de méthode • près de 400 questions • 3 épreuves blanches chronométrées
tous les corrigés expliqués**

1 · Logique et ensembles	5 · Calcul trigonométrique
2 · Applications et fonctions	6 · Limites et dérivation
3 · Arithmétique dans $\mathbb{Z}$	7 · Barycentre, produit scalaire
4 · Suites numériques	8 · Rotation, espace, stratégie

Chaque épreuve blanche dure **20 minutes**. Ce livret t'apprend à répondre vite **et** juste.

Sommaire et mode d'emploi

Comment travailler avec ce livret

Le sommaire

Chapitre	Contenu	Pages
1. Logique et ensembles	Connecteurs, quantificateurs, négations, ensembles, raisonnements, récurrence	3 - 6
2. Applications et fonctions	Injection, surjection, bijection, composée, fonctions bornées, périodiques, $E(x)$	7 - 10
3. Arithmétique dans $\mathbb{Z}$	Division euclidienne, congruences, nombres premiers, PGCD, PPCM	11 - 14
4. Suites numériques	Monotonie, majoration, suites arithmétiques et géométriques, suites récurrentes	15 - 18
5. Calcul trigonométrique	Addition, duplication, $t = \tan(x/2)$, sommes et produits, équations	19 - 22
6. Limites et dérivation	Formes indéterminées, limites trigonométriques, dérivées, étude de fonctions	23 - 26
7. Barycentre et produit scalaire	Barycentre, Al-Kashi, médiane, lignes de niveau, distance, cercle	27 - 28
8. Rotation, espace, stratégie	Rotation, vecteurs de l'espace, coplanarité, méthode de concours	29 - 30
Épreuves blanches 1, 2 et 3	3 épreuves complètes de 40 questions en 20 minutes	31 - 36
Corrigés	Toutes les réponses, avec l'explication de chacune	37 - 40

Mode d'emploi

- Chaque chapitre s'ouvre sur **une ou deux pages de méthode** : l'essentiel du cours, des exemples entièrement traités, des astuces de calcul rapide et les pièges classiques.
- Suivent **une ou deux pages d'exercices** au format QCM : une question, trois propositions, **une seule bonne réponse**.
- Les épreuves blanches comptent **40 questions en 20 minutes** : cela laisse **30 secondes** par question. Entraîne-toi toujours montre en main.
- En sciences mathématiques, la vitesse vient des **réflexes** : nier une proposition, réduire modulo n , reconnaître une suite auxiliaire, transformer une somme en produit, lever une forme indéterminée.
- Ne bloque jamais : saute la question, termine la série, puis reviens. Une question difficile rapporte exactement autant qu'une question facile.
- Corrige-toi immédiatement avec les pages 37 à 40 et note les numéros ratés : ce sont eux qu'il faudra refaire.

La check-list des savoirs indispensables

Logique, algèbre et analyse	Trigonométrie et géométrie
☐ Je nie une proposition avec $\forall$, $\exists$, « et », « ou », « $\Rightarrow$ »	☐ Je développe $\cos(a \pm b)$, $\sin(a \pm b)$, $\cos 2a$, $\sin 2a$, $\tan 2a$
☐ Je rédige une récurrence (initialisation, hérédité)	☐ Je transforme $\cos p + \cos q$, $\sin p + \sin q$ en produits
☐ Je montre qu'une application est injective, surjective	☐ J'écris $a \cos x + b \sin x$ sous la forme $r \cos(x - \varphi)$
☐ Je calcule un reste avec les congruences	☐ Je résous $\cos x = \cos a$, $\sin x = \sin a$, $\tan x = \tan a$
☐ Je calcule un PGCD (Euclide) et un PPCM	☐ J'utilise Al-Kashi, la médiane et les lignes de niveau
☐ Je ramène $u_{n+1} = au_n + b$ à une suite géométrique	☐ Je calcule une distance point-droite, une équation de cercle
☐ Je lève une forme indéterminée (conjugué, limites usuelles)	☐ Je construis un barycentre et l'image par une rotation

LES 5 RÈGLES D'OR DU CONCOURS

- **Lis jusqu'au bout.** « dans $[0 ; 2\pi[$ », « limite à gauche », « la négation », « reste modulo 7 » : un mot sauté, un point perdu.
- **Regarde les trois propositions avant de calculer.** Souvent, une ou deux sont absurdes : les éliminer suffit.
- **Teste une valeur simple.** Pour une formule trigonométrique, essaie $x = 0$; pour une somme, $n = 1$; pour une réciproque, vérifie $f(g(1))$.
- **Contrôle la vraisemblance.** Un reste est entre 0 et $n - 1$, un cosinus entre -1 et 1 , une distance est positive.
- **Aucune case vide.** Une réponse cochée au hasard a une chance sur trois d'être juste.

COMMENT SUIVRE TES PROGRÈS

Après chaque série, écris dans la marge ton **score** et ton **temps**, puis entoure les numéros ratés. Une semaine plus tard, refais uniquement ces questions : quand une série est réussie deux fois de suite en moins de temps que l'objectif, le chapitre est acquis.

1

Logique et ensembles

Propositions, connecteurs, quantificateurs, négations

1.1 Propositions et connecteurs

Une **proposition** est un énoncé qui est soit vrai (V), soit faux (F). « $x + 1 = 3$ » n'est pas une proposition : sa vérité dépend de x (c'est une **fonction propositionnelle**).

P	Q	non P	P et Q	P ou Q	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

À RETENIR

- « $P \Rightarrow Q$ » est fausse **uniquement** quand P est vraie et Q fausse ; elle a la même table que « **non P ou Q** ».
- « $P \Rightarrow Q$ » équivaut à sa **contraposée** « $\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P$ », mais **pas** à sa **réciroque** « $Q \Rightarrow P$ ».
- Une proposition toujours vraie, quelles que soient les valeurs de P, Q, ..., est une **tautologie**. Avec n propositions, la table a 2^n lignes.

1.2 Négations : les lois de Morgan

Proposition	Négation	Exemple de négation
P et Q	non P ou non Q	« $x > 0$ et $y > 0$ » $\rightarrow$ « $x \leq 0$ ou $y \leq 0$ »
P ou Q	non P et non Q	« $x = 1$ ou $x = 2$ » $\rightarrow$ « $x \neq 1$ et $x \neq 2$ »
$P \Rightarrow Q$	P et non Q	« n pair $\Rightarrow$ n^2 pair » $\rightarrow$ « n pair et n^2 impair »
$\forall x, P(x)$	$\exists x, \text{non } P(x)$	« $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ » $\rightarrow$ « $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$ »
$\exists x, P(x)$	$\forall x, \text{non } P(x)$	« $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 = 2$ » $\rightarrow$ « $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 \neq 2$ »

ATTENTION — PIÈGE FRÉQUENT

La négation de « $x > 0$ » est « $x \leq 0$ ». La négation de « $P \Rightarrow Q$ » n'est **pas** une implication : c'est « P et non Q ». Et la négation de « tous les élèves ont réussi » est « **au moins un** élève n'a pas réussi ».

1.3 Quantificateurs

L'ORDRE DES QUANTIFICATEURS COMPTE

Dans $\mathbb{R}$, « $\forall x \exists y : y > x$ » est **vraie** (prendre $y = x + 1$) ; « $\exists y \forall x : y > x$ » est **fausse**. Dans la première, y peut dépendre de x ; dans la seconde, y est choisi une fois pour toutes. Pour nier, on change **chaque** quantificateur et on nie la propriété finale.

Exemple 1 — nier une définition de limite

Énoncé	Écrire la négation de « $\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R} : x < \alpha \Rightarrow f(x) < \epsilon$ ».
Démarche	$\forall$ devient $\exists$ et $\exists$ devient $\forall$; l'implication « $A \Rightarrow B$ » se nie en « A et non B ».
Réponse	$\exists \epsilon > 0, \forall \alpha > 0, \exists x \in \mathbb{R} : x < \alpha$ et $f(x) \geq \epsilon$

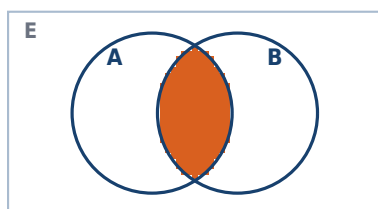
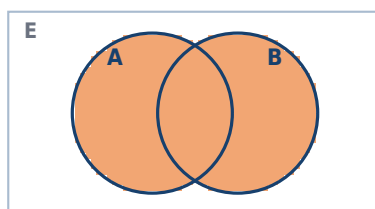
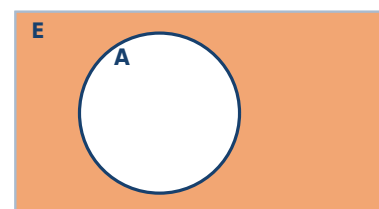
Exemple 2 — vrai ou faux ?

Énoncé	La proposition « $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x + y^2 = 0$ » est-elle vraie ?
Démarche	Pour $x = 1$, il faudrait $y^2 = -1$: impossible. Un seul contre-exemple suffit à rendre fausse une proposition « $\forall$ ».
Réponse	elle est fausse

Négations express

$x \geq 2$	$f(x) = 0$ ou $f(x) > 1$	$\forall n, u_n \leq 5$	$\exists x, f(x) < 0$	$P \Leftrightarrow Q$
$x < 2$	$f(x) \neq 0$ et $f(x) \leq 1$	$\exists n, u_n > 5$	$\forall x, f(x) \geq 0$	(P et non Q) ou (Q et non P)

1.4 Les ensembles


 $A \cap B$: dans A et dans B

 $A \cup B$: dans A ou dans B


complémentaire de A dans E

Notion	Définition	Exemple avec $E = \{1 ; \dots ; 6\}$, $A = \{1 ; 2 ; 3\}$, $B = \{2 ; 4 ; 6\}$
inclusion $A \subset B$	tout élément de A appartient à B	$\{2 ; 4\} \subset B$
intersection $A \cap B$	$x \in A$ et $x \in B$	$A \cap B = \{2\}$
réunion $A \cup B$	$x \in A$ ou $x \in B$	$A \cup B = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6\}$
complémentaire $\bar{A}$	$x \in E$ et $x \notin A$	$\bar{A} = \{4 ; 5 ; 6\}$
différence $A \setminus B$	$x \in A$ et $x \notin B$	$A \setminus B = \{1 ; 3\}$
produit $A \times B$	couples $(a ; b)$ avec $a \in A$ et $b \in B$	$(3 ; 6) \in A \times B$; $\text{card}(A \times B) = 9$

À RETENIR

- Lois de Morgan : $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ et $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.
- Un ensemble à n éléments a 2^n parties ; $\text{card}(A \times B) = \text{card } A \times \text{card } B$; « $A \cap B = A$ » équivaut à « $A \subset B$ ».

1.5 Raisonnements et récurrence

Raisonnement	Principe	Exemple
Contre-exemple	pour réfuter « $\forall x, P(x)$ », un seul x suffit	« $\forall x, x^2 \geq x$ » : faux pour $x = \frac{1}{2}$
Contraposée	on prouve non $Q \Rightarrow$ non P au lieu de $P \Rightarrow Q$	n^2 pair $\Rightarrow n$ pair
Par l'absurde	on suppose le contraire et on obtient une contradiction	$\sqrt{2}$ est irrationnel
Disjonction des cas	on sépare en cas qui couvrent toutes les possibilités	n pair, n impair
Récurrence	initialisation, puis hérédité $P(n) \Rightarrow P(n+1)$	inégalités, sommes, divisibilité

Exemple 1 — une inégalité par récurrence (Bernoulli)

Énoncé	Démontrer que pour tout réel $a \geq 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$: $(1+a)^n \geq 1+na$.
Démarche	Initialisation : pour $n = 0$, $1 \geq 1$. Hérédité : si $(1+a)^n \geq 1+na$, alors $(1+a)^{n+1} \geq (1+na)(1+a) = 1+(n+1)a+na^2 \geq 1+(n+1)a$.
Réponse	l'inégalité est vraie pour tout n

Exemple 2 — une divisibilité par récurrence

Énoncé	Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, 3 divise $4^n - 1$.
Démarche	Initialisation : $4^0 - 1 = 0$. Hérédité : $4^{n+1} - 1 = 4(4^n - 1) + 3$; si 3 divise $4^n - 1$, il divise la somme.
Réponse	3 divise $4^n - 1$ pour tout n

Exemple 3 — par l'absurde

Énoncé	Démontrer que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.
Démarche	Supposons $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ irréductible. Alors $p^2 = 2q^2$, donc p est pair : $p = 2k$. Alors $q^2 = 2k^2$, donc q est pair aussi : contradiction.
Réponse	$\sqrt{2}$ est irrationnel

Ensembles express ($E = \{1 ; \dots ; 6\}$, $A = \{1 ; 2 ; 3\}$, $B = \{2 ; 4 ; 6\}$)

$A \cap B$	$\bar{B}$	$\bar{A} \cap \bar{B}$	$B \setminus A$	$\text{card}(A \cup B)$
$\{2\}$	$\{1 ; 3 ; 5\}$	$\{5\}$	$\{4 ; 6\}$	5

SÉRIE A — 18 questions : connecteurs, négations, quantificateurs. Objectif : 8 minutes.

1. La proposition « $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 > 0$ » est :

vraie	fausse	ni vraie ni fausse
-------	--------	--------------------

2. La négation de « $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n+1} < \varepsilon$ » est :

$\forall \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n+1} \geq \varepsilon$	$\exists \varepsilon \leq 0, \forall n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n+1} \geq \varepsilon$	$\exists \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n+1} \geq \varepsilon$
--	---	--

3. La négation de « $(P \text{ et } Q) \Rightarrow R$ » est :

non P ou non Q ou R	$(\text{non } P \text{ ou non } Q) \Rightarrow \text{non } R$	P et Q et non R
---------------------	---	-----------------

4. La proposition « $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P)$ » est :

vraie seulement si P est vraie	toujours fausse	toujours vraie
--------------------------------	-----------------	----------------

5. « $P \Rightarrow Q$ » a la même table de vérité que :

P ou non Q	non P ou Q	non P et Q
------------	------------	------------

6. Pour x réel, la proposition « $x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1$ » est :

vraie	fausse	équivalente à sa réciproque
-------	--------	-----------------------------

7. La négation de « $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : y^2 \geq x$ » est :

$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : y^2 < x$	$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : y^2 < x$	$\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : y^2 < x$
--	--	--

8. La proposition « $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : y^2 \geq x$ » est :

fausse	vraie	ni vraie ni fausse
--------	-------	--------------------

9. La proposition « $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : y = x^2$ » est :

vraie seulement pour $x \geq 0$	fausse	vraie
---------------------------------	--------	-------

10. La proposition « $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} : y = x^2$ » est :

vraie	vraie seulement pour $y \leq 0$	fausse
-------	---------------------------------	--------

11. La proposition « pour tout réel x, $\sqrt{x^2} = x$ » est :

fausse	vraie	vraie pour tout $x \leq 0$
--------	-------	----------------------------

12. Pour x réel, « $x^2 \leq 1$ » équivaut à :

$-1 \leq x \leq 1$	$x \leq 1$	$0 \leq x \leq 1$
--------------------	------------	-------------------

13. Pour tous réels a et b, « $a^2 = b^2$ » équivaut à :

$a = b$	$ a = b $	$a = -b$
---------	-------------	----------

14. La contraposée de « $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ » est :

$x = y \Rightarrow f(x) = f(y)$	$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$	$f(x) \neq f(y) \Rightarrow x \neq y$
---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------------

15. La table de vérité d'une proposition formée avec P, Q et R compte :

3 lignes	6 lignes	8 lignes
----------	----------	----------

16. La proposition « P ou (non P) » est :

toujours vraie	vraie seulement si P est vraie	toujours fausse
----------------	--------------------------------	-----------------

17. La proposition « $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 + n$ est pair » est :

fausse	vraie seulement pour n pair	vraie
--------	-----------------------------	-------

18. Pour x réel, « $|x - 1| < 2$ » est une condition ... pour « $x < 3$ » :

nécessaire	suffisante	nécessaire et suffisante
------------	------------	--------------------------

SÉRIE B — 20 questions : ensembles, raisonnements, récurrence. Objectif : 10 minutes.

19. $A = \{1 ; 2 ; 3\}$ et $B = \{2 ; 3 ; 4\}$. $A \cap B =$

$\{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$	$\{1 ; 4\}$	$\{2 ; 3\}$
---------------------	-------------	-------------

20. Avec les mêmes ensembles, $A \cup B =$

$\{1 ; 4\}$	$\{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$	$\{2 ; 3\}$
-------------	---------------------	-------------

21. Avec les mêmes ensembles, $A \setminus B =$

$\{1\}$	$\{1 ; 4\}$	$\{4\}$
---------	-------------	---------

22. Le nombre de parties de $E = \{a ; b ; c\}$ est :

3	6	8
---	---	---

23. L'ensemble des parties de $E = \{1 ; 2\}$ est :

$\{\emptyset ; \{1\} ; \{2\} ; \{1 ; 2\}\}$	$\{\emptyset ; \{1 ; 2\}\}$	$\{\{1\} ; \{2\}\}$
---	-----------------------------	---------------------

24. Le complémentaire de $[0 ; 2]$ dans $\mathbb{R}$ est :

$] -\infty ; 0[\cup] 2 ; +\infty[$	$] 0 ; 2[$	$] -\infty ; 0[\cup] 2 ; +\infty[$
--------------------------------------	------------	--------------------------------------

25. « $A \subset B$ » signifie :

$A = B$	A et B ont un élément commun	tout élément de A est dans B
---------	------------------------------	------------------------------

26. Pour toutes parties A et B de E, le complémentaire de $A \cap B$ est :

$\bar{A} \cap \bar{B}$	$\bar{A} \cup \bar{B}$	$A \cup B$
------------------------	------------------------	------------

27. $A = \{1 ; 2\}$ et $B = \{a ; b ; c\}$. Le produit cartésien $A \times B$ contient :

5 éléments	6 éléments	8 éléments
------------	------------	------------

28. « $A \cap B = A$ » équivaut à :

$A = \emptyset$	$B \subset A$	$A \subset B$
-----------------	---------------	---------------

29. $\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 4\} =$

$] -2 ; 2[$	$] -\infty ; 2[$	$] 0 ; 2[$
-------------	------------------	------------

30. L'ensemble $\{x \in \mathbb{Z} : |x| \leq 2\}$ contient :

2 éléments	4 éléments	5 éléments
------------	------------	------------

31. L'ensemble des diviseurs positifs de 12 a pour cardinal :

6	4	12
---	---	----

32. Pour tout $n \geq 1 : 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 =$

$\frac{n^2(n+1)}{2}$	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	$\frac{n(n+1)}{2}$
----------------------	--------------------------	--------------------

33. Pour tout $n \geq 1 : 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 =$

$\frac{n^3(n+1)}{3}$	n^4	$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
----------------------	-------	-----------------------------------

34. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $7^n - 1$ est divisible par :

6	7	8
---	---	---

35. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^3 - n$ est divisible par :

6	4	9
---	---	---

36. Dans une récurrence, l'hypothèse de récurrence sert à :

démontrer $P(n+1)$	démontrer $P(0)$	conclure sans hérédité
--------------------	------------------	------------------------

37. Pour tout entier $n \geq 4$, on démontre par récurrence que :

$2^n = n^2$	$2^n \geq n^2$	$2^n < n^2$
-------------	----------------	-------------

38. Pour tout $n \geq 1 : \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} =$

$\frac{n+1}{n}$	$\frac{1}{n+1}$	$\frac{n}{n+1}$
-----------------	-----------------	-----------------

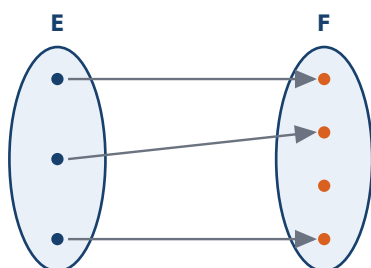
2

Applications et fonctions

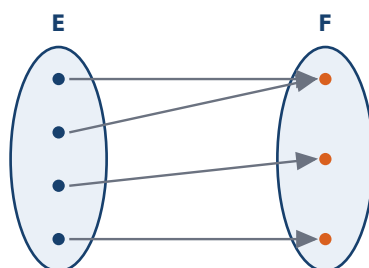
Injection, surjection, bijection, composée, image directe

2.1 Injection, surjection, bijection

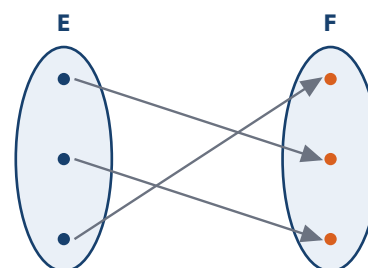
Une **application** $f : E \rightarrow F$ associe à chaque x de E **une unique** image $f(x)$ dans F . Un élément y de F peut avoir zéro, un ou plusieurs **antécédents**.



injective, non surjective



surjective, non injective



bijective

f est...	Définition	Pour le démontrer
injective	tout y de F a au plus un antécédent	$f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$
surjective	tout y de F a au moins un antécédent	pour y donné, on résout $f(x) = y$ dans E
bijective	tout y de F a exactement un antécédent	$f(x) = y$ a une solution unique : $x = f^{-1}(y)$

À RETENIR

- Si $f : E \rightarrow F$ est bijective, $f^{-1} \circ f = \text{Id}_E$ et $f \circ f^{-1} = \text{Id}_F$. Une fonction strictement monotone sur un intervalle I est une bijection de I sur $f(I)$.
- Si $g \circ f$ est injective, f est injective ; si $g \circ f$ est surjective, g est surjective. La composée de deux bijections est une bijection.
- **Image directe** : $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$. **Image réciproque** : l'ensemble des x de E tels que $f(x) \in B$.

Exemple 1 — une bijection affine

Énoncé	Montrer que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 3x - 5$ est bijective et donner sa réciproque.
Démarche	Pour y réel, $3x - 5 = y \Leftrightarrow x = \frac{y+5}{3}$: une solution, et une seule.
Réponse	$f^{-1}(x) = \frac{x+5}{3}$

Exemple 2 — une bijection homographique

Énoncé	Déterminer la réciproque de $f : \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R} - \{1\}$, $x \mapsto \frac{x+1}{x-2}$.
Démarche	$y(x-2) = x+1 \Leftrightarrow x(y-1) = 2y+1 \Leftrightarrow x = \frac{2y+1}{y-1}$, valable car $y \neq 1$; et $x \neq 2$, car sinon $2y+1 = 2y-2$.
Réponse	$f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{x-1}$

Exemple 3 — ni injective, ni surjective

Énoncé	Montrer que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 + 2x$ n'est ni injective ni surjective.
Démarche	$f(-2) = f(0) = 0$: deux réels distincts ont la même image. De plus $f(x) = (x+1)^2 - 1 \geq -1$, donc -2 n'a pas d'antécédent.
Réponse	f n'est ni injective ni surjective

ATTENTION — PIÈGE FRÉQUENT

L'injectivité et la surjectivité dépendent des ensembles de départ et d'arrivée : $x \mapsto x^2$ n'est ni injective ni surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, mais elle est bijective de $[0 ; +\infty[$ sur $[0 ; +\infty[$. Lis toujours « $f : E \rightarrow F$ ».

Images directes express ($f(x) = x^2$)

$f([1 ; 3])$	$f([-3 ; -1])$	$f([-1 ; 3])$	$f([-2 ; 0])$	antécédents de 9
$[1 ; 9]$	$[1 ; 9]$	$[0 ; 9]$	$[0 ; 4]$	-3 et 3

2.2 Fonctions bornées, périodiques, composées

Propriété	Définition	Exemple
f majorée sur I	$\exists M, \forall x \in I : f(x) \leq M$	$-x^2 + 4 \leq 4$
f bornée sur I	$\exists M > 0, \forall x \in I : f(x) \leq M$	$\left \frac{\sin x}{2} \right \leq \frac{1}{2}$
f périodique de période T	$f(x + T) = f(x)$ pour tout x	$x \mapsto \cos(ax) : \text{période } \frac{2\pi}{ a }$
axe de symétrie $x = a$	$f(2a - x) = f(x)$	$x^2 - 4x : \text{axe } x = 2$
centre de symétrie $\Omega(a ; b)$	$f(2a - x) + f(x) = 2b$	$\frac{3x-1}{x+2} = 3 - \frac{7}{x+2} : \Omega(-2 ; 3)$

COMPOSÉE ET MONOTONIE

- $(g \circ f)(x) = g(f(x))$: on applique d'abord f, puis g. En général $g \circ f \neq f \circ g$.
- Si f et g ont le **même** sens de variation, $g \circ f$ est **croissante** ; s'ils ont des sens **contraires**, $g \circ f$ est **décroissante**.
- La somme de deux fonctions croissantes est croissante ; le produit de deux fonctions **positives** croissantes aussi.

LA PARTIE ENTIÈRE

$E(x)$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x : **$E(x) \leq x < E(x) + 1$** . Pour tout entier k, $E(x + k) = E(x) + k$. Attention aux négatifs : $E(-1,5) = -2$, et non -1 .

Exemple 1 — montrer qu'une fonction est bornée

Énoncé	Encadrer $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ sur $\mathbb{R}$.
Démarche	$f(x) = 1 - \frac{2}{x^2 + 1}$ et $0 < \frac{2}{x^2 + 1} \leq 2$: donc $-1 \leq f(x) < 1$, avec $f(0) = -1$.
Réponse	$-1 \leq f(x) < 1$: f est bornée

Exemple 2 — la période d'une somme

Énoncé	Trouver une période de $x \mapsto \cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{3}$.
Démarche	Les périodes sont 4π et 6π . Il faut un multiple commun : le plus petit est 12π .
Réponse	12π

Exemple 3 — un minimum par une identité

Énoncé	Trouver le minimum de $x + \frac{9}{x}$ sur $]0 ; +\infty[$.
Démarche	$x + \frac{9}{x} - 6 = \frac{(x-3)^2}{x} \geq 0$, avec égalité pour $x = 3$.
Réponse	le minimum vaut 6, atteint en $x = 3$

Exemple 4 — un centre de symétrie

Énoncé	Montrer que $\Omega(1 ; 0)$ est centre de symétrie de la courbe de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.
Démarche	Avec $x = 1 + h$: $f(1 + h) = h^3 - 3h$, fonction impaire de h. Donc $f(1 - h) = -f(1 + h)$, c'est-à-dire $f(2 - x) + f(x) = 0$.
Réponse	$\Omega(1 ; 0)$ est centre de symétrie

Périodes express

$\cos 3x$	$\sin \frac{x}{2}$	$\tan 2x$	$ \sin x $	$\cos(\pi x)$
$\frac{2\pi}{3}$	4π	$\frac{\pi}{2}$	π	2

Parties entières express

$E(3,2)$	$E(-1,5)$	$E(\sqrt{2})$	$E(-\sqrt{3})$	$E(7)$
3	-2	1	-2	7

SÉRIE A — 18 questions : injection, surjection, bijection, composée. Objectif : 8 minutes.

1. L'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2x + 3$ est :

bijection	injective non surjective	ni injective ni surjective
-----------	--------------------------	----------------------------

2. Sa bijection réciproque est :

$x \mapsto \frac{x+3}{2}$	$x \mapsto \frac{x-3}{2}$	$x \mapsto \frac{1}{2x+3}$
---------------------------	---------------------------	----------------------------

3. L'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ est :

ni injective ni surjective	injective	surjective
----------------------------	-----------	------------

4. L'application $f : [0 ; +\infty[\rightarrow [0 ; +\infty[, x \mapsto x^2$ est :

non surjective	non injective	bijection
----------------	---------------	-----------

5. f est injective si, pour tous a et b :

$a = b \Rightarrow f(a) = f(b)$	$f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$	tout élément d'arrivée a un antécédent
---------------------------------	---------------------------------	--

6. $f : E \rightarrow F$ est surjective si :

tout élément de F a au plus un antécédent	tout élément de F a au moins un antécédent	f est croissante
---	--	--------------------

7. L'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3$ est :

surjective non injective	bijection	injective non surjective
--------------------------	-----------	--------------------------

8. L'application $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto 2n$ est :

bijection	injective non surjective	surjective non injective
-----------	--------------------------	--------------------------

9. L'application $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, n \mapsto n + 5$ est :

bijection	injective non surjective	non injective
-----------	--------------------------	---------------

10. Pour $f(x) = x^2$ sur $\mathbb{R}$, l'image directe $f([-1 ; 2])$ est :

$[-1 ; 4]$	$[0 ; 4]$	$[1 ; 4]$
------------	-----------	-----------

11. Pour $f(x) = x^2$ sur $\mathbb{R}$, l'image réciproque de $\{4\}$ est :

$\{-2 ; 2\}$	$\{2\}$	$\{16\}$
--------------	---------	----------

12. $f : \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R} - \{2\}, x \mapsto \frac{2x+1}{x-1}$ est bijective. Sa réciproque est :

$x \mapsto \frac{x-1}{2x+1}$	$x \mapsto \frac{x+1}{x-2}$	$x \mapsto \frac{x-2}{x+1}$
------------------------------	-----------------------------	-----------------------------

13. $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = x^2$. Alors $(g \circ f)(x) =$

$4x^2 + 1$	$2x^2 + 1$	$(2x + 1)^2$
------------	------------	--------------

14. Si $g \circ f$ est injective, alors :

f est injective	f est surjective	g est injective
-------------------	--------------------	-------------------

15. Si $g \circ f$ est surjective, alors :

f est surjective	f est injective	g est surjective
--------------------	-------------------	--------------------

16. La composée de deux bijections est :

une injection non surjective	pas toujours définie	une bijection
------------------------------	----------------------	---------------

17. Si $f : E \rightarrow F$ est bijective, alors $f^{-1} \circ f$ est :

l'identité de E	f	l'identité de F
-------------------	-----	-------------------

18. Le nombre d'applications de $\{1 ; 2 ; 3\}$ dans $\{a ; b\}$ est :

6	8	9
---	---	---

SÉRIE B — 20 questions : bornes, périodes, symétries, E(x). Objectif : 10 minutes.

19. La fonction $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ est, sur $\mathbb{R}$:

non majorée	majorée mais non minorée	bornée
-------------	--------------------------	--------

20. Pour tout réel x : $\left| \frac{x}{x^2 + 1} \right| \leq$

0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
---	---------------	---------------

21. La fonction $x \mapsto \cos(2x)$ est périodique de période :

π	2π	$\frac{\pi}{2}$
-------	--------	-----------------

22. La fonction $x \mapsto \sin(3x) + \cos(2x)$ a pour plus petite période :

$\frac{2\pi}{3}$	π	2π
------------------	-------	--------

23. La partie entière $E(2,7)$ vaut :

2	2,7	3
---	-----	---

24. La partie entière $E(-2,3)$ vaut :

-3	-2,3	-2
----	------	----

25. Pour tout réel x :

$E(x) < x \leq E(x) + 1$	$x \leq E(x) < x + 1$	$E(x) \leq x < E(x) + 1$
--------------------------	-----------------------	--------------------------

26. La droite $x = a$ est un axe de symétrie de la courbe de f si, pour tout x :

$f(a) = 0$	$f(a - x) = -f(a + x)$	$f(2a - x) = f(x)$
------------	------------------------	--------------------

27. $\Omega(1 ; 2)$ est centre de symétrie de la courbe de $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ car :

$f(2 - x) + f(x) = 4$	$f(2 - x) = f(x)$	$f(1) = 2$
-----------------------	-------------------	------------

28. Si f est croissante et g décroissante, alors $g \circ f$ est :

constante	croissante	décroissante
-----------	------------	--------------

29. La fonction $x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$ est définie sur :

$[0 ; 1]$	$[-1 ; 1]$	$] -1 ; 1[$
-----------	------------	-------------

30. La fonction $x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$ admet un maximum égal à :

0	1	2
---	---	---

31. Le taux de variation de $f(x) = \frac{1}{x}$ entre a et b ($a \neq b$, non nuls) vaut :

$-\frac{1}{ab}$	$\frac{1}{a-b}$	$\frac{1}{ab}$
-----------------	-----------------	----------------

32. Le minimum de $x + \frac{4}{x}$ sur $]0 ; +\infty[$ est :

4	2	5
---	---	---

33. La fonction $f(x) = x + \sqrt{x}$ est, sur $[0 ; +\infty[$:

non monotone	strictement décroissante	strictement croissante
--------------	--------------------------	------------------------

34. Avec $f(x) = x^2$ et $g(x) = |x|$, pour $x \in [0 ; 1]$:

$f(x) \geq g(x)$	$f(x) \leq g(x)$	$f(x) = g(x)$
------------------	------------------	---------------

35. La fonction $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ vérifie, pour tout réel x :

$0 < f(x) \leq 1$	$f(x) \geq 1$	$0 \leq f(x) < 1$
-------------------	---------------	-------------------

36. La fonction $f(x) = x^2 - 2x$ est, sur $[1 ; +\infty[$:

strictement décroissante	strictement croissante	constante
--------------------------	------------------------	-----------

37. Si f est impaire et définie en 0, alors :

$f(0) = 1$	$f(0) = 0$	$f(0)$ n'existe pas
------------	------------	---------------------

38. La restriction de $x \mapsto x^2 - 4x + 3$ à $[2 ; +\infty[$ est une bijection de $[2 ; +\infty[$ sur :

$[3 ; +\infty[$	$[0 ; +\infty[$	$[-1 ; +\infty[$
-----------------	-----------------	------------------

3

Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

Divisibilité, division euclidienne, congruences

3.1 Divisibilité et division euclidienne

DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS

- **a divise b** (noté $a \mid b$) s'il existe un entier k tel que $b = ka$. Si $a \mid b$ et $a \mid c$, alors a divise **toute combinaison** $ub + vc$ ($u, v \in \mathbb{Z}$).
- **Division euclidienne** : pour $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique couple $(q; r)$ tel que **$a = bq + r$ et $0 \leq r < b$** .

Exemple 1 — diviser un entier négatif

Énoncé	Effectuer la division euclidienne de -29 par 4 .
Démarche	$-29 = 4 \times (-7) - 1$ ne convient pas (reste négatif). On descend d'un quotient : $-29 = 4 \times (-8) + 3$, et $0 \leq 3 < 4$.
Réponse	$q = -8$ et $r = 3$

Exemple 2 — une astuce de divisibilité

Énoncé	Trouver les entiers naturels n tels que $n + 2$ divise $n + 9$.
Démarche	$n + 9 = (n + 2) + 7$, donc $n + 2$ divise 7 : $n + 2 = 1$ ou $n + 2 = 7$. Seul $n = 5$ est un entier naturel.
Réponse	$n = 5$

3.2 Les congruences

CALCULER MODULO n

$a \equiv b [n]$ signifie que **n divise $a - b$** , c'est-à-dire que a et b ont le même reste dans la division par n . Si $a \equiv b [n]$ et $c \equiv d [n]$, alors **$a + c \equiv b + d$, $ac \equiv bd$ et $a^k \equiv b^k [n]$** : on peut remplacer un nombre par son reste avant de calculer.

Modulo	Résultat utile	Conséquence
2	$n^2 \equiv n$	$n^2 + n$ est toujours pair
3	$n^2 \equiv 0$ ou 1	un carré n'est jamais de la forme $3k + 2$
4	$n^2 \equiv 0$ ou 1	un carré n'est jamais de la forme $4k + 3$
9	$n \equiv$ somme de ses chiffres	reste d'un grand nombre par 9 en un instant
10	$n \equiv$ chiffre des unités	les puissances ont des chiffres des unités cycliques

Exemple 3 — un reste de grande puissance

Énoncé	Trouver le reste de la division de 5^{100} par 13 .
Démarche	$5^2 = 25 \equiv -1 [13]$, donc $5^4 \equiv 1 [13]$. Alors $5^{100} = (5^4)^{25} \equiv 1 [13]$.
Réponse	le reste est 1

Exemple 4 — un chiffre des unités

Énoncé	Quel est le chiffre des unités de 2^{2025} ?
Démarche	Les chiffres des unités de $2, 4, 8, 16, 32, \dots$ se répètent selon le cycle $2, 4, 8, 6$ (longueur 4). Or $2025 = 4 \times 506 + 1$.
Réponse	2

ATTENTION — PIÈGE FRÉQUENT

Un reste est toujours **positif** et strictement inférieur au diviseur : le reste de -1 dans la division par 7 est 6 , pas -1 . On peut calculer avec -1 (c'est souvent plus rapide), mais il faut convertir à la fin.

Restes express

1 234 modulo 9	6^{50} modulo 5	10^9 modulo 3	-13 modulo 5	9^{11} modulo 8
1	1	1	2	1

3.3 Nombres premiers

À RETENIR

- Un entier $p \geq 2$ est **premier** s'il n'a que deux diviseurs positifs : 1 et p . Il y en a une **infinité** (Euclide).
- Pour tester si n est premier, il suffit d'essayer les nombres premiers p tels que $p \leq \sqrt{n}$.
- Tout entier $n \geq 2$ se décompose de façon unique en produit de facteurs premiers. Si $n = p^a \times q^b \times r^c$, n a **$(a + 1)(b + 1)(c + 1)$** diviseurs positifs.
- Lemme d'Euclide** : si p est premier et $p \mid ab$, alors $p \mid a$ ou $p \mid b$.

Nombres premiers inférieurs à 100

2 · 3 · 5 · 7 · 11 · 13 · 17 · 19 · 23 · 29 · 31 · 37 · 41 · 43 · 47 · 53 · 59 · 61 · 67 · 71 · 73 · 79 · 83 · 89 · 97

3.4 PGCD et PPCM

LES MÉTHODES

Avec les décompositions : le **PGCD** prend les facteurs communs avec le **plus petit** exposant, le **PPCM** tous les facteurs avec le **plus grand** exposant. Pour $a, b > 0$: **$\text{PGCD}(a ; b) \times \text{PPCM}(a ; b) = ab$** . Si $\text{PGCD}(a ; b) = 1$, a et b sont **premiers entre eux**.

Exemple 1 — l'algorithme d'Euclide

Énoncé	Calculer PGCD(546 ; 234).
Démarche	$\text{PGCD}(a ; b) = \text{PGCD}(b ; r)$ où r est le reste de a par b : $546 = 2 \times 234 + 78$, puis $234 = 3 \times 78 + 0$. Le dernier reste non nul est le PGCD.
Réponse	PGCD(546 ; 234) = 78

Exemple 2 — avec les décompositions

Énoncé	Calculer PGCD et PPCM de $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$ et $756 = 2^2 \times 3^3 \times 7$.
Démarche	$\text{PGCD} : 2^2 \times 3^2 = 36$. $\text{PPCM} : 2^3 \times 3^3 \times 5 \times 7 = 7\,560$. Contrôle : $36 \times 7\,560 = 360 \times 756$.
Réponse	PGCD = 36 et PPCM = 7 560

Exemple 3 — un PGCD qui dépend de n

Énoncé	Montrer que pour tout entier n , $\text{PGCD}(3n + 4 ; n + 1) = 1$.
Démarche	Un diviseur commun d divise $3n + 4 - 3(n + 1) = 1$. Donc $d = 1$: les deux nombres sont premiers entre eux.
Réponse	PGCD = 1

Exemple 4 — compter les diviseurs

Énoncé	Combien 720 a-t-il de diviseurs positifs ?
Démarche	$720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$. Un diviseur s'écrit $2^a \times 3^b \times 5^c$ avec $0 \leq a \leq 4, 0 \leq b \leq 2, 0 \leq c \leq 1$.
Réponse	$(4 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 30$ diviseurs

Divisible par...	2	3	4	5	8	9	11
si...	unités paires	somme des chiffres divisible par 3	2 derniers chiffres	unités 0 ou 5	3 derniers chiffres	somme des chiffres divisible par 9	somme alternée divisible par 11

ATTENTION — PIÈGE FRÉQUENT

1 n'est **pas** premier, et 2 est le **seul** nombre premier pair. Pour tester la primalité de n , ne t'arrête pas trop tôt : $221 = 13 \times 17$ n'a aucun diviseur premier inférieur à 13.

Décompositions express

84	180	1 000	diviseurs de 180	PGCD(84 ; 180)
$2^2 \times 3 \times 7$	$2^2 \times 3^2 \times 5$	$2^3 \times 5^3$	18	12

SÉRIE A — 18 questions : division euclidienne et congruences. Objectif : 9 minutes.

1. Le reste de la division euclidienne de -17 par 5 est :

-2	2	3
------	-----	-----

2. Le quotient de la division euclidienne de -17 par 5 est :

-4	-3	3
------	------	-----

3. Si $a \equiv 3 [7]$ et $b \equiv 5 [7]$, alors $a + b \equiv$

$0 [7]$	$2 [7]$	$1 [7]$
---------	---------	---------

4. Avec les mêmes données, $ab \equiv$

$3 [7]$	$1 [7]$	$6 [7]$
---------	---------	---------

5. Le reste de la division de 2^{10} par 3 est :

0	1	2
-----	-----	-----

6. Le reste de la division de 3^{100} par 8 est :

0	1	3
-----	-----	-----

7. Le reste de la division de 5^{2026} par 6 est :

1	0	5
-----	-----	-----

8. Pour tout entier n , n^2 est congru modulo 4 à :

0 ou 1	$0, 1, 2$ ou 3	1 seulement
------------	------------------	---------------

9. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4^n + 2$ est divisible par 3 car :

$4 \equiv 0 [3]$	$2 \equiv 1 [3]$	$4 \equiv 1 [3]$
------------------	------------------	------------------

10. Si $a \mid b$ et $b \mid a$ ($a, b \in \mathbb{Z}$), alors :

$a = b$	$a = b$ ou $a = -b$	$a = 0$
---------	---------------------	---------

11. Si $a \mid b$ et $a \mid c$, alors a divise toujours :

$bc + 1$	$b + 1$	$2b - 3c$
----------	---------	-----------

12. Si $(n + 1) \mid (n + 5)$, alors $(n + 1)$ divise :

4	5	6
-----	-----	-----

13. Le nombre d'entiers naturels n tels que $(n + 1) \mid (n + 5)$ est :

3	2	4
-----	-----	-----

14. Le chiffre des unités de 7^{2026} est :

3	7	9
-----	-----	-----

15. « $a \equiv b [n]$ » signifie :

n divise $a - b$	a divise b	$a - b$ divise n
--------------------	----------------	--------------------

16. Si $x \equiv 2 [5]$, alors $x^2 + 1 \equiv$

$4 [5]$	$0 [5]$	$1 [5]$
---------	---------	---------

17. L'équation $3x \equiv 1 [7]$ a pour solutions :

$x \equiv 3 [7]$	aucune solution	$x \equiv 5 [7]$
------------------	-----------------	------------------

18. Le reste de la division de 10^6 par 7 est :

1	3	6
-----	-----	-----

SÉRIE B — 20 questions : nombres premiers, PGCD, PPCM. Objectif : 10 minutes.

19. Combien y a-t-il de nombres premiers inférieurs à 50 ?

14	15	16
----	----	----

20. Pour savoir si 2 027 est premier, il suffit de tester les nombres premiers p tels que :

$p \leq 100$	$p \leq 43$	$p \leq 1\,013$
--------------	-------------	-----------------

21. La décomposition en facteurs premiers de 2 025 est :

$3^2 \times 5^4$	$3^4 \times 5^2$	$3^3 \times 5^3$
------------------	------------------	------------------

22. Le nombre de diviseurs positifs de 2 025 est :

6	8	15
---	---	----

23. $\text{PGCD}(126 ; 84) =$

21	252	42
----	-----	----

24. $\text{PPCM}(126 ; 84) =$

42	252	10 584
----	-----	--------

25. Pour tous entiers $a, b > 0$: $\text{PGCD}(a ; b) \times \text{PPCM}(a ; b) =$

1	$a + b$	ab
---	---------	------

26. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\text{PGCD}(n ; n + 1) =$

1	n	2
---	-----	---

27. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\text{PGCD}(2n + 1 ; n) =$

2	n	1
---	-----	---

28. Si p est premier et $p \mid ab$, alors :

$p \mid a$ ou $p \mid b$	$p = a$ ou $p = b$	$p \mid a$ et $p \mid b$
--------------------------	--------------------	--------------------------

29. Le plus petit nombre premier qui divise $2^{10} + 1$ est :

3	5	41
---	---	----

30. Le nombre de diviseurs positifs de $2^3 \times 3^2 \times 5$ est :

12	24	30
----	----	----

31. La somme des diviseurs positifs de 12 est :

16	24	28
----	----	----

32. La décomposition en facteurs premiers de 1 001 est :

11×91	$7 \times 11 \times 13$	3×337
----------------	-------------------------	----------------

33. Si p est premier et ne divise pas a , alors $\text{PGCD}(a ; p) =$

1	p	a
---	-----	-----

34. L'ensemble des nombres premiers est :

fini	formé de 25 éléments	infini
------	----------------------	--------

35. Deux entiers consécutifs sont toujours :

premiers entre eux	premiers	de même parité
--------------------	----------	----------------

36. Si $a \equiv 0 [6]$, alors a est divisible par :

12	5	2 et par 3
----	---	------------

37. $\text{PGCD}(2^5 \times 3^2 \times 7 ; 2^3 \times 3^4 \times 5) =$

$2^3 \times 3^2$	$2^5 \times 3^4$	$2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7$
------------------	------------------	------------------------------------

38. Le plus petit entier $n > 1$ tel que $n \equiv 1 [2]$, $n \equiv 1 [3]$ et $n \equiv 1 [4]$ est :

7	13	25
---	----	----

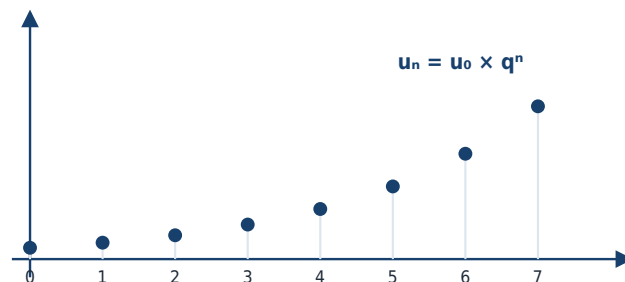
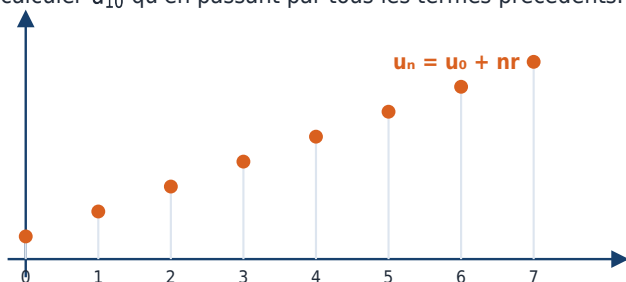
4

Suites numériques

Monotonie, majoration, récurrence

4.1 Généralités

Une suite peut être définie **explicitement** ($u_n = f(n)$) ou **par récurrence** (u_0 donné et $u_{n+1} = f(u_n)$). Dans le second cas, on ne peut calculer u_{10} qu'en passant par tous les termes précédents.



Pour étudier...	Méthode	Exemple
la monotonie	signe de $u_{n+1} - u_n$	$u_n = n^2 + n : u_{n+1} - u_n = 2n + 2 > 0$
la monotonie (termes > 0)	comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1	$u_n = \frac{2^n}{3^n} : \text{quotient } \frac{2}{3} < 1$
une suite $u_{n+1} = f(u_n)$	récurrence, si f est croissante	$u_0 \leq u_1 \Rightarrow u_n \leq u_{n+1}$ pour tout n
une majoration	récurrence ou encadrement	$\frac{n}{n+3} < 1$ pour tout n

À RETENIR

- (u_n) est **majorée** s'il existe M tel que $u_n \leq M$ pour tout n ; **minorée** s'il existe m tel que $u_n \geq m$; **bornée** si elle est les deux.
- Une suite croissante est minorée par son premier terme ; une suite décroissante est majorée par son premier terme.

Exemple 1 — la monotonie par la différence

Énoncé	Étudier la monotonie de $u_n = \frac{n}{2n+1}$.
Démarche	$u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{2n+3} - \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} > 0$.
Réponse	(u_n) est strictement croissante

Exemple 2 — un encadrement par récurrence

Énoncé	$u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{3 + 2u_n}$. Montrer que $0 \leq u_n < 3$ pour tout n .
Démarche	Initialisation : $u_0 = 0$. Hérédité : si $0 \leq u_n < 3$, alors $3 \leq 3 + 2u_n < 9$, donc $\sqrt{3} \leq u_{n+1} < 3$.
Réponse	$0 \leq u_n < 3$ pour tout n

Exemple 3 — la monotonie par le quotient

Énoncé	Étudier la monotonie de $u_n = \frac{n}{2^n}$ pour $n \geq 1$.
Démarche	Les termes sont positifs et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{2n} \leq 1$ dès que $n \geq 1$ (car $n+1 \leq 2n$).
Réponse	(u_n) est décroissante à partir du rang 1

ATTENTION — PIÈGE FRÉQUENT

Pour $u_{n+1} = f(u_n)$, la suite n'a **pas** le sens de variation de f : avec f croissante, elle peut croître ou décroître selon la position de u_1 par rapport à u_0 . Et si f est décroissante, la suite n'est en général pas monotone.

Monotonie express

$u_n = 3 - \frac{1}{n+1}$	$u_n = \frac{5^n}{4^n}$	$u_n = n^2 - 4n$	$u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$	$u_n = \sqrt{n+4}$
croissante	croissante	croissante dès $n = 2$	non monotone	croissante

4.2 Suites arithmétiques et géométriques

	Arithmétique de raison r	Géométrique de raison q
Définition	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = q u_n$
Terme général	$u_n = u_p + (n - p)r$	$u_n = u_p q^{n-p}$
Trois termes consécutifs a, b, c	$2b = a + c$	$b^2 = ac$
Somme de termes consécutifs	$\frac{\text{nombre de termes} \times (\text{premier} + \text{dernier})}{2}$	$\text{premier} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q} \quad (q \neq 1)$

LA SUITE AUXILIAIRE : $u(n+1) = a u(n) + b$, avec $a \neq 1$

On cherche le réel ℓ tel que $\ell = a\ell + b$, soit $\ell = \frac{b}{1-a}$. Alors $v_n = u_n - \ell$ vérifie $v_{n+1} = a v_n$: (v_n) est **géométrique** de raison a , donc $u_n = \ell + (u_0 - \ell) a^n$.

Pour $u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + k u_n}$, on pose $v_n = \frac{1}{u_n}$: (v_n) est **arithmétique** de raison k .

Exemple 1 — une suite arithmético-géométrique

Énoncé	$u_0 = 5$ et $u_{n+1} = 3u_n - 4$. Exprimer u_n en fonction de n .
Démarche	$\ell = 3\ell - 4$ donne $\ell = 2$. La suite $v_n = u_n - 2$ est géométrique de raison 3 et $v_0 = 3$, donc $v_n = 3^{n+1}$.
Réponse	$u_n = 2 + 3^{n+1}$

Exemple 2 — une suite homographique

Énoncé	$u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + 2u_n}$. Exprimer u_n en fonction de n .
Démarche	$v_n = \frac{1}{u_n}$ vérifie $v_{n+1} = \frac{1 + 2u_n}{u_n} = v_n + 2$: arithmétique de raison 2, avec $v_0 = 1$.
Réponse	$u_n = \frac{1}{2n + 1}$

Exemple 3 — une somme géométrique

Énoncé	Calculer $S = 3 + 6 + 12 + \dots + 3 \times 2^9$.
Démarche	Suite géométrique de premier terme 3 et de raison 2 ; de 2^0 à 2^9 , il y a 10 termes. $S = 3 \times \frac{1 - 2^{10}}{1 - 2}$.
Réponse	$S = 3\,069$

SENS DE VARIATION

Une suite arithmétique est croissante si $r > 0$, décroissante si $r < 0$. Une suite géométrique de premier terme positif est croissante si $q > 1$, décroissante si $0 < q < 1$; si $q < 0$, ses termes changent de signe à chaque rang.

Exemple 4 — reconnaître une suite géométrique

Énoncé	Montrer que $u_n = 2^n \times 3^{1-n}$ définit une suite géométrique et donner son sens de variation.
Démarche	$u_n = 3 \times \frac{2^n}{3^n} = 3 \left(\frac{2}{3}\right)^n$: premier terme 3, raison $\frac{2}{3}$, comprise entre 0 et 1.
Réponse	géométrique de raison $\frac{2}{3}$, décroissante

ATTENTION — PIÈGE FRÉQUENT

De u_p à u_n , il y a $n - p + 1$ termes, et non $n - p$. Ainsi $u_0 + u_1 + \dots + u_n$ compte $n + 1$ termes. Dans une somme géométrique, l'exposant de q au numérateur est toujours ce **nombre de termes**.

Sommes express

$\sum_{k=1}^{100} k$	$2 + 4 + \dots + 100$	$\sum_{k=0}^5 3^k$	$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^5}$	$5 + 8 + \dots + 32$
5 050	2 550	364	$\frac{63}{32}$	185

Termes express — (a) suite arithmétique, (g) suite géométrique

(a) $u_0 = 4, r = 3 : u_{20}$	(g) $u_0 = 5, q = 2 : u_6$	(a) $u_3 = 7, u_8 = 22 : r$	(g) $u_1 = 2, u_4 = 54 : q$	(a) $u_5 = 9 : u_2 + u_8$
64	320	3	3	18

SÉRIE A — 18 questions : monotonie, majoration, suites auxiliaires. Objectif : 9 minutes.

1. $u_n = \frac{n}{n+1}$. Alors $u_{n+1} - u_n =$

$-\frac{1}{(n+1)(n+2)}$	$\frac{1}{n+1}$	$\frac{1}{(n+1)(n+2)}$
-------------------------	-----------------	------------------------

2. La suite $u_n = \frac{n}{n+1}$ est :

décroissante	croissante et majorée par 1	non majorée
--------------	-----------------------------	-------------

3. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$. Alors $u_1 =$

$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	3
------------	------------	---

4. Pour cette suite, on démontre par récurrence que, pour tout n :

$0 < u_n < 2$	$u_n < 0$	$u_n > 2$
---------------	-----------	-----------

5. La suite $u_n = n^2 - 10n$ est croissante à partir du rang :

0	5	10
---	---	----

6. La suite $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n+1}$ est :

croissante	non bornée	bornée
------------	------------	--------

7. La suite $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ est :

décroissante	croissante	constante
--------------	------------	-----------

8. Pour tout n : $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} =$

$\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$	1	$\frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$
-----------------------------------	---	-----------------------------------

9. La suite définie par $u_{n+1} = u_n^2 + u_n + 1$ est :

strictement croissante	strictement décroissante	constante
------------------------	--------------------------	-----------

10. $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$. Alors $u_1 =$

$\frac{1}{3}$	2	$\frac{2}{3}$
---------------	---	---------------

11. Pour cette suite, on pose $v_n = \frac{1}{u_n}$. Alors $v_{n+1} - v_n =$

1	u_n	-1
---	-------	----

12. On en déduit que $u_n =$

$\frac{1}{n+2}$	$\frac{2}{n+1}$	$\frac{2}{2n+1}$
-----------------	-----------------	------------------

13. Une suite croissante est toujours :

minorée par son premier terme	majorée	bornée
-------------------------------	---------	--------

14. La suite $u_n = 3 - \frac{2}{n+1}$ vérifie, pour tout n :

$u_n > 3$	$1 \leq u_n < 3$	$0 \leq u_n \leq 1$
-----------	------------------	---------------------

15. $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$. Alors $u_1 =$

4	1	5
---	---	---

16. Pour cette suite, la suite $v_n = u_n - 6$ est :

arithmétique de raison 3	géométrique de raison 2	géométrique de raison $\frac{1}{2}$
--------------------------	-------------------------	-------------------------------------

17. On en déduit que $u_n =$

$2\left(\frac{1}{2}\right)^n$	$6 - 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$	$6 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$
-------------------------------	-----------------------------------	-----------------------------------

18. Si $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2^n}$ pour tout n , la suite est :

strictement croissante	constante	strictement décroissante
------------------------	-----------	--------------------------

SÉRIE B — 20 questions : suites arithmétiques, géométriques et sommes. Objectif : 10 minutes.

19. (u_n) arithmétique, $u_5 = 17$ et $u_{12} = 38$. Sa raison est :

3	7	21
---	---	----

20. $1 + 3 + 5 + \dots + 99 =$

2 450	2 500	5 000
-------	-------	-------

21. $\sum_{k=0}^{10} 2^k =$

1 023	2 048	2 047
-------	-------	-------

22. $\sum_{k=1}^n k =$

$\frac{n(n-1)}{2}$	$\frac{n(n+1)}{2}$	n^2
--------------------	--------------------	-------

23. Trois réels non nuls a, b, c sont des termes consécutifs d'une suite géométrique si :

$b = ac$	$b^2 = ac$	$2b = a + c$
----------	------------	--------------

24. $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n} =$

$\frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right)$	$\frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$	$\frac{3^{n+1} - 1}{2}$
--	--	-------------------------

25. (u_n) géométrique, $u_2 = 12$ et $u_5 = 96$. Sa raison est :

2	3	8
---	---	---

26. Avec ces données, $u_0 =$

1,5	3	6
-----	---	---

27. La suite $u_n = 3 \times 2^n - 1$ est :

géométrique de raison 2	arithmétique	ni arithmétique ni géométrique
-------------------------	--------------	--------------------------------

28. La suite $u_n = 5^{n+1}$ est géométrique de raison :

25	5^n	5
----	-------	---

29. $\sum_{k=0}^n (2k+1) =$

$(n+1)^2$	$n(n+1)$	n^2
-----------	----------	-------

30. Un capital de 50 000 dh placé à 3 % par an (intérêts composés) vaut, après n années :

$50\,000 \times (1 + 0,03n)$	$50\,000 \times 1,03^n$	$50\,000 \times 0,03^n$
------------------------------	-------------------------	-------------------------

31. Si (u_n) est arithmétique de raison r : $u_n - u_p =$

$(n-p)r$	$(n+p)r$	$nr - p$
----------	----------	----------

32. La somme des n premiers entiers impairs vaut :

$n(n+1)$	$2n-1$	n^2
----------	--------	-------

33. Si (u_n) est arithmétique de raison 2, la suite $v_n = 3^{u_n}$ est :

géométrique de raison 3	géométrique de raison 9	arithmétique de raison 6
-------------------------	-------------------------	--------------------------

34. Si (u_n) est géométrique à termes positifs de raison 4, la suite $v_n = \sqrt{u_n}$ est :

géométrique de raison 2	arithmétique de raison 2	géométrique de raison 4
-------------------------	--------------------------	-------------------------

35. $u_n = 2n + 1$. La somme $u_0 + u_1 + \dots + u_{10}$ vaut :

100	110	121
-----	-----	-----

36. Le produit $2 \times 2^2 \times 2^3 \times \dots \times 2^{10}$ vaut :

2^{100}	2^{10}	2^{55}
-----------	----------	----------

37. $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 3u_n - 2$. Alors $u_n =$

$3^n - 1$	$1 + 3^n$	2×3^n
-----------	-----------	----------------

38. $u_0 + u_1 + \dots + u_n$ pour $u_k = \frac{1}{2^k}$ vaut :

$2 - \frac{1}{2^n}$	$2 + \frac{1}{2^n}$	$1 - \frac{1}{2^n}$
---------------------	---------------------	---------------------

5

Calcul trigonométrique

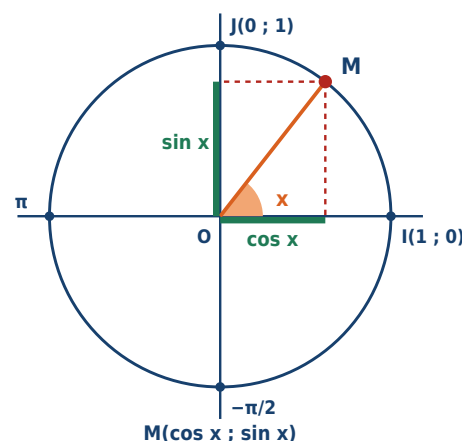
Formules d'addition et de duplication, $t = \tan(x/2)$

5.1 Les formules d'addition et de duplication

Pour tous réels a et b (là où les tangentes sont définies) :

FORMULES D'ADDITION

- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ et $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ et $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
- $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$



Duplication	Linéarisation	Avec $t = \tan(x/2)$
$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$	$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$	$\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$
$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1$	$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$	$\sin x = \frac{2t}{1 + t^2}$
$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$	$\sin a \cos a = \frac{1}{2} \sin 2a$	$\tan x = \frac{2t}{1 - t^2}$

Exemple 1 — de $\cos a$ à $\sin 2a$ et $\cos 2a$

Énoncé	On sait que $\cos a = \frac{3}{5}$ et $a \in]0; \frac{\pi}{2}[$. Calculer $\sin 2a$ et $\cos 2a$.
Démarche	$\sin a > 0$, donc $\sin a = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$. Puis $\sin 2a = 2 \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{5}$ et $\cos 2a = 2 \times \frac{9}{25} - 1$.
Réponse	$\sin 2a = \frac{24}{25}$ et $\cos 2a = -\frac{7}{25}$

Exemple 2 — linéariser

Énoncé	Écrire $\sin^2 x \cos^2 x$ sans puissance.
Démarche	$\sin^2 x \cos^2 x = \left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2 = \frac{\sin^2 2x}{4} = \frac{1 - \cos 4x}{8}$.
Réponse	$\frac{1 - \cos 4x}{8}$

ATTENTION — PIÈGE FRÉQUENT

 $\cos(a + b)$ n'est **pas** $\cos a + \cos b$: pour $a = b = \frac{\pi}{2}$, on trouverait 0 au lieu de -1 . Vérifie toujours une formule avec $a = 0$ ou $b = 0$: c'est le test le plus rapide pour éliminer une proposition.

Angles associés	$\pi - x$	$\pi + x$	$-x$	$\frac{\pi}{2} - x$	$\frac{\pi}{2} + x$
cos	$-\cos x$	$-\cos x$	$\cos x$	$\sin x$	$-\sin x$
sin	$\sin x$	$-\sin x$	$-\sin x$	$\cos x$	$\cos x$

Valeurs express

$\cos \frac{2\pi}{3}$	$\sin \frac{3\pi}{4}$	$\tan \frac{5\pi}{6}$	$\cos \frac{7\pi}{6}$	$\sin \frac{5\pi}{3}$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

5.2 Transformer une somme en produit (et inversement)

Somme → produit	Produit → somme
$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$	$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$
$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$	$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$
$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$	$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$
$\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$	

LA FORME $a \cos x + b \sin x$

Avec $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, on écrit $a \cos x + b \sin x = r \cos(x - \varphi)$, où $\cos \varphi = \frac{a}{r}$ et $\sin \varphi = \frac{b}{r}$.

Conséquences : le maximum vaut r , le minimum $-r$, et l'équation $a \cos x + b \sin x = c$ a des solutions si et seulement si $|c| \leq r$.

5.3 Équations trigonométriques

Équation	Solutions dans $\mathbb{R}$ ($k \in \mathbb{Z}$)
$\cos x = \cos a$	$x = a + 2k\pi$ ou $x = -a + 2k\pi$
$\sin x = \sin a$	$x = a + 2k\pi$ ou $x = \pi - a + 2k\pi$
$\tan x = \tan a$	$x = a + k\pi$

Exemple 1 — une équation $a \cos x + b \sin x = c$

Énoncé	Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\cos x - \sin x = 1$.
Démarche	$r = \sqrt{2}$ et $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. L'équation devient $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4}$, donc $x + \frac{\pi}{4} = \pm \frac{\pi}{4} + 2k\pi$.
Réponse	$x = 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

Exemple 2 — factoriser pour résoudre

Énoncé	Résoudre dans $[0 ; \pi]$: $\sin 4x - \sin 2x = 0$.
Démarche	$\sin 4x - \sin 2x = 2 \cos 3x \sin x$. Donc $\sin x = 0$ ($x = 0$ ou π) ou $\cos 3x = 0$, soit $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$: $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$.
Réponse	$0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \pi$

Exemple 3 — une inéquation sur le cercle

Énoncé	Résoudre dans $[0 ; 2\pi[$: $2 \sin x \geq 1$.
Démarche	$\sin x \geq \frac{1}{2}$: sur le cercle trigonométrique, les points d'ordonnée supérieure ou égale à $\frac{1}{2}$ forment l'arc allant de $\frac{\pi}{6}$ à $\frac{5\pi}{6}$.
Réponse	$[\frac{\pi}{6} ; \frac{5\pi}{6}]$

ATTENTION — PIÈGE FRÉQUENT

Ne divise jamais les deux membres par $\cos x$ ou $\sin x$ sans vérifier qu'ils sont non nuls : tu perdras des solutions. Factorise plutôt. Et n'oublie pas la **deuxième famille** de solutions de $\cos x = \cos a$ ($x = -a + 2k\pi$).

VÉRIFIER EN 5 SECONDES

Avant de cocher, remplace x par une solution proposée : pour $\cos x - \sin x = 1$, $x = -\frac{\pi}{2}$ donne $0 - (-1) = 1$: c'est bien une solution. Une seule valeur fautive suffit à éliminer une proposition.

Amplitudes express : r pour $a \cos x + b \sin x$

$a = b = 1$	$a = b = \sqrt{2}$	$a = 1, b = 2$	$a = 6, b = 8$	$a = 5, b = 12$
$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{5}$	10	13

SÉRIE A — 18 questions : addition, duplication, $\tan(x/2)$. Objectif : 9 minutes.

1. $\cos(a - b) =$

$\sin a \cos b - \cos a \sin b$	$\cos a \cos b - \sin a \sin b$	$\cos a \cos b + \sin a \sin b$
---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------

2. $\sin(a - b) =$

$\cos a \cos b - \sin a \sin b$	$\sin a \cos b + \cos a \sin b$	$\sin a \cos b - \cos a \sin b$
---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------

3. $\cos \frac{\pi}{12} =$

$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$
---------------------------------	----------------------	---------------------------------

4. $\tan \frac{\pi}{8} =$

$\sqrt{2} + 1$	$\sqrt{2} - 1$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
----------------	----------------	----------------------

5. $\cos 2a =$

$2 \sin^2 a - 1$	$1 - 2 \sin^2 a$	$1 + 2 \sin^2 a$
------------------	------------------	------------------

6. $\sin 3a =$

$3 \sin a - 4 \sin^3 a$	$4 \sin^3 a - 3 \sin a$	$3 \sin a + 4 \sin^3 a$
-------------------------	-------------------------	-------------------------

7. $\cos 3a =$

$4 \cos^3 a - 3 \cos a$	$3 \cos a - 4 \cos^3 a$	$4 \cos^3 a + 3 \cos a$
-------------------------	-------------------------	-------------------------

8. En posant $t = \tan \frac{x}{2}$: $\cos x =$

$\frac{2t}{1+t^2}$	$\frac{1+t^2}{1-t^2}$	$\frac{1-t^2}{1+t^2}$
--------------------	-----------------------	-----------------------

9. En posant $t = \tan \frac{x}{2}$: $\sin x =$

$\frac{2t}{1-t^2}$	$\frac{1-t^2}{1+t^2}$	$\frac{2t}{1+t^2}$
--------------------	-----------------------	--------------------

10. En posant $t = \tan \frac{x}{2}$: $\tan x =$

$\frac{2t}{1-t^2}$	$\frac{1-t^2}{2t}$	$\frac{2t}{1+t^2}$
--------------------	--------------------	--------------------

11. Si $\cos a = \frac{1}{3}$, alors $\cos 2a =$

$\frac{2}{3}$	$-\frac{7}{9}$	$\frac{7}{9}$
---------------	----------------	---------------

12. Si $\tan a = 2$, alors $\tan 2a =$

$-\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	4
----------------	---------------	---

13. $\cos^2 \frac{\pi}{8} =$

$\frac{2 - \sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\frac{2 + \sqrt{2}}{4}$
--------------------------	----------------------	--------------------------

14. $\sin x \cos x =$

$\sin 2x$	$\frac{1}{2} \sin 2x$	$2 \sin 2x$
-----------	-----------------------	-------------

15. $\cos^4 x - \sin^4 x =$

$\sin 2x$	$\cos 2x$	1
-----------	-----------	---

16. $\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} =$ (là où l'expression est définie)

$\frac{1}{\tan x}$	$\sin x$	$\tan x$
--------------------	----------	----------

17. $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) =$

$\frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$	$\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}$	$1 + \tan x$
---------------------------------	---------------------------------	--------------

18. $\sin \frac{5\pi}{12} =$

$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$
---------------------------------	---------------	---------------------------------

SÉRIE B — 20 questions : sommes, produits et équations. Objectif : 11 minutes.

19. $\cos p + \cos q =$

$2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$	$2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$	$2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$
---	---	---

20. $\cos p - \cos q =$

$2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$	$-2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$	$-2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$
---	--	--

21. $\sin p + \sin q =$

$2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$	$2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$	$2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$
---	---	---

22. $\cos a \cos b =$

$\cos(ab)$	$\frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$	$\frac{1}{2}[\cos(a+b) - \cos(a-b)]$
------------	--------------------------------------	--------------------------------------

23. $\sin a \sin b =$

$\frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$	$\frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$	$\frac{1}{2}[\cos(a+b) - \cos(a-b)]$
--------------------------------------	--------------------------------------	--------------------------------------

24. $\cos x + \cos 3x =$

$2 \cos 2x \cos x$	$\cos 4x$	$2 \cos 4x$
--------------------	-----------	-------------

25. $\sqrt{3} \cos x - \sin x =$

$2 \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$	$2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$	$2 \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$
--	--	--

26. Le maximum de $3 \sin x + 4 \cos x$ est :

1	7	5
---	---	---

27. Dans $[0 ; 2\pi]$, l'équation $\cos x + \sqrt{3} \sin x = 2$ a :

une seule solution : $\frac{\pi}{3}$	deux solutions	aucune solution
--------------------------------------	----------------	-----------------

28. L'équation $\sin x + \cos x = 2$:

n'a pas de solution	a une solution	a deux solutions
---------------------	----------------	------------------

29. Les solutions dans $\mathbb{R}$ de $\cos 2x = \cos x$ sont :

$x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$x = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$	$x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
------------------------------	---	-------------------------------

30. Le nombre de solutions dans $[0 ; 2\pi]$ de $\sin 2x = \cos x$ est :

2	3	4
---	---	---

31. Les solutions dans $]-\pi ; \pi]$ de $\tan x = \sqrt{3}$ sont :

$\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$ seulement	$\frac{\pi}{6}$ et $-\frac{5\pi}{6}$
--------------------------------------	---------------------------	--------------------------------------

32. L'ensemble des solutions dans $[0 ; \pi]$ de $2 \cos x > 1$ est :

$]\frac{\pi}{3} ; \pi]$	$[0 ; \frac{\pi}{3}[$	$[0 ; \frac{\pi}{6}[$
-------------------------	-----------------------	-----------------------

33. Dans $[0 ; 2\pi]$, l'équation $2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$ a :

2 solutions	4 solutions	3 solutions
-------------	-------------	-------------

34. $\cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{3\pi}{5} =$

$\frac{1}{2}$	0	1
---------------	---	---

35. $\sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} =$

$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
----------------------	---------------	---------------

36. $\cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} =$

$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$	0
---------------	----------------	---

37. La fonction $x \mapsto \sin 2x \cos 2x$ a pour période :

2π	π	$\frac{\pi}{2}$
--------	-------	-----------------

38. $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} =$

$\tan x$	1	2
----------	---	---

6

Limites et dérivation

Formes indéterminées, limites usuelles, nombre dérivé

6.1 Les limites

Limites usuelles en 0	En $\pm\infty$ ($n \in \mathbb{N}^*$)	Formes indéterminées
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$	$\infty - \infty$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$	$0 \times \infty$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$	$\frac{\infty}{\infty}$ et $\frac{0}{0}$

LES TROIS MÉTHODES POUR LEVER UNE INDÉTERMINATION

- **Factoriser** par le terme dominant (en $\pm\infty$) ou par $(x - a)$ (en a) : une fraction rationnelle en $\pm\infty$ a la limite du quotient de ses termes de plus haut degré.
- **Multiplier par la quantité conjuguée** en présence de racines : $\sqrt{A} - B = \frac{A - B^2}{\sqrt{A} + B}$.
- **Se ramener à une limite usuelle** (changement de variable) ou **encadrer** : si $g \leq f \leq h$ et si g et h ont la même limite ℓ , alors f tend vers ℓ .

Exemple 1 — la quantité conjuguée

Énoncé	Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x)$.
Démarche	$\sqrt{x^2 + 3x} - x = \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} = \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{3}{x}} + 1}$ pour $x > 0$.
Réponse	$\frac{3}{2}$

Exemple 2 — une limite trigonométrique

Énoncé	Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x^2}$.
Démarche	Avec $X = 3x$: $\frac{1 - \cos 3x}{x^2} = 9 \times \frac{1 - \cos X}{X^2}$, et X tend vers 0.
Réponse	$\frac{9}{2}$

Exemple 3 — un encadrement

Énoncé	Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \cos x}{x}$.
Démarche	Pour $x > 0$: $1 - \frac{1}{x} \leq \frac{x + \cos x}{x} \leq 1 + \frac{1}{x}$, et les deux bornes tendent vers 1.
Réponse	1

ATTENTION — PIÈGE FRÉQUENT

En $-\infty$, $\sqrt{x^2} = |x| = -x$: on écrit $\sqrt{x^2 + 1} = -x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$. Et pour une limite en a d'un quotient « $\frac{k}{0}$ », étudie le **signe** du dénominateur à gauche et à droite.

LE RÉFLEXE DU DEGRÉ DOMINANT

En $\pm\infty$, une fraction rationnelle se comporte comme le quotient de ses termes de plus haut degré : $\frac{5x^2 - 7}{2x^2 + x}$ tend vers $\frac{5}{2}$, et $\frac{x^3 + 1}{4x}$ se comporte comme $\frac{x^2}{4}$, donc tend vers $+\infty$. Deux secondes suffisent.

Limites express

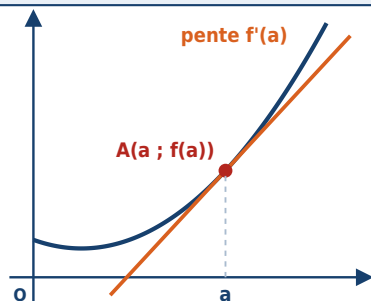
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - x}{x^3 + 1}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{2x}$	$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x - 1}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x}$
2	4	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	1

6.2 La dérivation

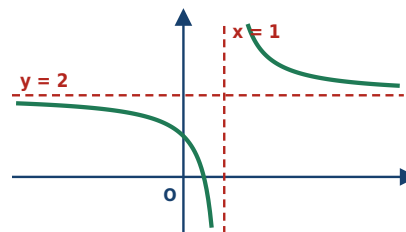
NOMBRE DÉRIVÉ ET TANGENTE

f est dérivable en a si $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ a une limite finie $f'(a)$ quand h tend vers 0. La tangente en a a pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Si les limites à gauche et à droite sont différentes, la courbe a un **point anguleux** ; si le taux tend vers $\pm\infty$, une **tangente verticale**.



$$\text{tangente : } y = f'(a)(x - a) + f(a)$$



$$y = 2 + 1/(x - 1) : \text{limites infinies en } 1, \text{ limite } 2 \text{ en } \pm\infty$$

Fonction	Dérivée	Fonction	Dérivée
u^n	$n u' u^{n-1}$	$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$	$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
$\cos(ax + b)$	$-a \sin(ax + b)$	$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

Exemple 1 — une étude de variations

Énoncé	Étudier les variations de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ sur $\mathbb{R}$.
Démarche	$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$: positive hors de $[1 ; 3]$, négative entre 1 et 3. $f(1) = 4$ et $f(3) = 0$.
Réponse	maximum local 4 en $x = 1$, minimum local 0 en $x = 3$

Exemple 2 — une asymptote oblique

Énoncé	Montrer que la droite $y = x + 2$ est asymptote à la courbe de $f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x + 1}$.
Démarche	Division : $f(x) = x + 2 - \frac{2}{x+1}$, donc $f(x) - (x + 2) = -\frac{2}{x+1}$ tend vers 0 en $\pm\infty$.
Réponse	$y = x + 2$ est asymptote oblique en $\pm\infty$

Exemple 3 — une tangente

Énoncé	Donner la tangente à la courbe de $f(x) = x^2 - 3x$ au point d'abscisse 1.
Démarche	$f(1) = -2$ et $f'(x) = 2x - 3$, donc $f'(1) = -1$. La tangente est $y = -1 \times (x - 1) - 2$.
Réponse	$y = -x - 1$

L'ASTUCE DU NOMBRE DÉRIVÉ

Une limite de la forme $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est un **nombre dérivé** : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \frac{\pi}{6}) - \frac{1}{2}}{x} = \cos \frac{\pi}{6}$. C'est souvent plus rapide que toute autre méthode.

Dérivées express

$(3x - 1)^4$	$\sqrt{2x + 1}$	$\cos 3x$	$\frac{1}{x^2 + 1}$	$x \sin x$
$12(3x - 1)^3$	$\frac{1}{\sqrt{2x + 1}}$	$-3 \sin 3x$	$-\frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$	$\sin x + x \cos x$

SÉRIE A — 18 questions : limites. Objectif : 9 minutes.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - x + 1}{1 - 2x^2} =$

$-\frac{3}{2}$	$-\infty$	$\frac{3}{2}$
----------------	-----------	---------------

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 2x^2 + 5) =$

$+\infty$	$-\infty$	5
-----------	-----------	---

3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} =$

0	1	3
---	---	---

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} =$

0	$\frac{1}{2}$	1
---	---------------	---

5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) =$

0	$+\infty$	$\frac{1}{2}$
---	-----------	---------------

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{3x} =$

$\frac{5}{3}$	1	$\frac{3}{5}$
---------------	---	---------------

7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} =$

1	$\frac{1}{2}$	0
---	---------------	---

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin 3x} =$

$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	1
---------------	---------------	---

9. $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} =$

n'existe pas	0	1
--------------	---	---

10. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} =$

n'existe pas	1	0
--------------	---	---

11. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{x-2} =$

$+\infty$	$-\infty$	3
-----------	-----------	---

12. $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{x-2} =$

$-\infty$	3	$+\infty$
-----------	---	-----------

13. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x+1} =$

0	$+\infty$	1
---	-----------	---

14. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sqrt{x}}{x-1} =$

$+\infty$	0	2
-----------	---	---

15. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x}{2x - \pi/2} =$

-1	0	1
----	---	---

16. Si $|f(x) - 2| \leq \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$

$+\infty$	0	2
-----------	---	---

17. Si $f(x) \geq x^2$ pour tout x , alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$

0	$+\infty$	on ne peut pas conclure
---	-----------	-------------------------

18. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{\sqrt{x+1} - 1} =$

2	$\frac{1}{2}$	1
---	---------------	---

SÉRIE B — 20 questions : dérivation et étude de fonctions. Objectif : 11 minutes.

19. La dérivée de $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$ est :

$\frac{x^2-1}{x^2}$	$\frac{x^2+1}{x^2}$	$2x$
---------------------	---------------------	------

20. La dérivée de $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ est :

$\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}$	$2x\sqrt{x^2+1}$	$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
---------------------------	------------------	--------------------------

21. La dérivée de $f(x) = \sin^2 x$ est :

$\sin 2x$	$2 \cos x$	$\cos^2 x$
-----------	------------	------------

22. La dérivée de $f(x) = \tan x$ est :

$-\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$1 + \tan^2 x$
-----------------------	----------------------	----------------

23. La dérivée de $f(x) = (2x-1)^5$ est :

$10(2x-1)^4$	$2(2x-1)^5$	$5(2x-1)^4$
--------------	-------------	-------------

24. La dérivée de $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ est :

$\frac{2}{(x+1)^3}$	$-\frac{2}{(x+1)^3}$	$-\frac{1}{(x+1)^4}$
---------------------	----------------------	----------------------

25. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^{10} - 1}{h} =$

0	1	10
---	---	----

26. $\lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{2 \cos x - 1}{x - \pi/3} =$

$-\sqrt{3}$	-1	$\sqrt{3}$
-------------	----	------------

27. La fonction $x \mapsto |x|$ est-elle dérivable en 0 ?

oui, $f'(0) = 0$	non : nombres dérivés à gauche et à droite différents	oui, $f'(0) = 1$
------------------	---	------------------

28. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ en 0 :

n'est pas dérivable (tangente verticale)	est dérivable et $f'(0) = 1$	est dérivable et $f'(0) = 0$
--	------------------------------	------------------------------

29. La tangente à la courbe de $f(x) = \frac{1}{x}$ au point d'abscisse 2 a pour équation :

$y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$	$y = \frac{1}{4}x$	$y = -\frac{1}{4}x + 1$
-----------------------------------	--------------------	-------------------------

30. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$. f' s'annule en :

1 et 3	0 et 2	-1 et 2
--------	--------	---------

31. Cette fonction admet un minimum local égal à :

0	2	4
---	---	---

32. Les solutions de $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$ sont :

2 seulement	-1 et 2	1 et -2
-------------	---------	---------

33. La fonction $f(x) = x + \frac{1}{x}$ est décroissante sur :

$]0 ; 1]$	$] -\infty ; -1]$	$[1 ; +\infty[$
-----------	-------------------	-----------------

34. La droite $y = x$ est asymptote en $+\infty$ à la courbe de $f(x) = x + \frac{1}{x}$ car :

$f(1) = 2$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = 0$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
------------	---	---

35. La courbe de $f(x) = \frac{2x^2+1}{x-1}$ admet une asymptote oblique d'équation :

$y = 2$	$y = 2x$	$y = 2x + 2$
---------	----------	--------------

36. Si $f'(x) = (x-1)^2(x+2)$, f admet un extremum local :

en $x = 1$ et en $x = -2$	en $x = -2$ seulement	en $x = 1$ seulement
---------------------------	-----------------------	----------------------

37. Le nombre de solutions réelles de $x^3 + x - 5 = 0$ est :

0	1	3
---	---	---

38. La fonction $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ atteint son maximum en :

$x = 1$	$x = 0$	$x = -1$
---------	---------	----------

7

Barycentre et produit scalaire

Barycentre, Al-Kashi, médiane, lignes de niveau, cercle

7.1 Le barycentre

DÉFINITION ET COORDONNÉES

Si $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, le **barycentre** G de $(A ; \alpha)$, $(B ; \beta)$, $(C ; \gamma)$ est l'unique point tel que $\alpha \vec{GA} + \beta \vec{GB} + \gamma \vec{GC} = \vec{0}$. Pour tout point M : $\alpha \vec{MA} + \beta \vec{MB} + \gamma \vec{MC} = (\alpha + \beta + \gamma) \vec{MG}$.

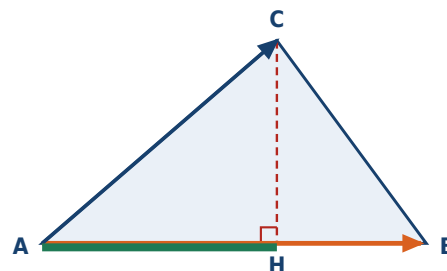
Coordonnées : $x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma}$ (de même pour y). On peut regrouper des points (**associativité**).

7.2 Le produit scalaire

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$; en repère orthonormé, $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$. Les vecteurs sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

LES FORMULES DU TRIANGLE (I milieu de [BC])

- Al-Kashi : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 AB \times AC \cos \widehat{BAC}$
- Médiane : $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$ et $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AI^2 - \frac{BC^2}{4}$

produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AH$

Ligne de niveau (I milieu de [AB])	Nature de l'ensemble des points M
$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = k$	cercle de centre I si $k + \frac{AB^2}{4} > 0$ (point I ou vide sinon)
$MA^2 + MB^2 = k$	cercle de centre I, un point ou l'ensemble vide
$MA^2 - MB^2 = k$	droite perpendiculaire à (AB)
$\vec{AM} \cdot \vec{u} = k$	droite de vecteur normal $\vec{u}$

EN REPÈRE ORTHONORMÉ

- Distance de $A(x_0 ; y_0)$ à la droite $ax + by + c = 0$: $d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.
- Le cercle de centre $\Omega(a ; b)$ et de rayon r : $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. Pour $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$, on complète les carrés.

Exemple 1 — Al-Kashi

Énoncé	Dans un triangle, $AB = 4$, $AC = 6$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$. Calculer BC .
Démarche	$BC^2 = 16 + 36 - 2 \times 4 \times 6 \times \frac{1}{2} = 28$.
Réponse	$BC = 2\sqrt{7}$

Exemple 2 — reconnaître un cercle

Énoncé	Déterminer l'ensemble des points $M(x ; y)$ tels que $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$.
Démarche	$(x - 1)^2 - 1 + (y + 2)^2 - 4 - 4 = 0$, soit $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$.
Réponse	le cercle de centre (1 ; -2) et de rayon 3

Exemple 3 — une ligne de niveau

Énoncé	$AB = 4$ et I est le milieu de $[AB]$. Déterminer l'ensemble des points M tels que $MA^2 + MB^2 = 16$.
Démarche	Théorème de la médiane : $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} = 2MI^2 + 8$. Donc $2MI^2 = 8$, soit $MI = 2$.
Réponse	le cercle de centre I et de rayon 2

Cercles express : centre et rayon

$x^2 + y^2 = 9$	$(x + 2)^2 + y^2 = 5$	$x^2 + y^2 - 6y = 0$	$x^2 + y^2 + 2x + 2y = 2$	$x^2 + y^2 - 8x = 9$
(0 ; 0), 3	(-2 ; 0), $\sqrt{5}$	(0 ; 3), 3	(-1 ; -1), 2	(4 ; 0), 5

EXERCICES — 20 questions : barycentre et produit scalaire. Objectif : 10 minutes.

1. G est le barycentre de (A ; 2), (B ; -1), (C ; 1). Alors $\vec{AG} =$

$\vec{BC}$	$\frac{1}{2}\vec{CB}$	$\frac{1}{2}\vec{BC}$
------------	-----------------------	-----------------------

2. L'ensemble des points M tels que $\|\vec{MA} + \vec{MB}\| = AB$ est :

le cercle de diamètre [AB]	la médiatrice de [AB]	la droite (AB)
----------------------------	-----------------------	----------------

3. I est le milieu de [AB]. L'ensemble des points M tels que $\|\vec{MA} + \vec{MB}\| = \|2\vec{MC}\|$ est :

le cercle de centre C	la droite (AB)	la médiatrice de [IC]
-----------------------	----------------	-----------------------

4. A(1 ; 2), B(3 ; -2), C(-1 ; 3). Le barycentre de (A ; 1), (B ; 2), (C ; 1) est :

(1,5 ; 0,25)	(1 ; 1)	(2 ; 0,5)
--------------	---------	-----------

5. $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ et leur angle vaut $\frac{2\pi}{3}$. Alors $\vec{u} \cdot \vec{v} =$

$-3\sqrt{3}$	-3	3
--------------	----	---

6. $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 =$

0	$2\vec{u} \cdot \vec{v}$	$4\vec{u} \cdot \vec{v}$
---	--------------------------	--------------------------

7. Dans le triangle ABC, AB = 7, AC = 5 et BC = 8. $\vec{AB} \cdot \vec{AC} =$

-5	5	10
----	---	----

8. Dans ce triangle, $\cos \widehat{BAC} =$

$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{7}$
---------------	---------------	----------------

9. Théorème de la médiane (I milieu de [BC]) : $AB^2 + AC^2 =$

$2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$	$AI^2 + \frac{BC^2}{4}$	$2AI^2 + BC^2$
--------------------------	-------------------------	----------------

10. I milieu de [BC] : $\vec{AB} \cdot \vec{AC} =$

$AI^2 + \frac{BC^2}{4}$	$AI^2 - \frac{BC^2}{4}$	$AI^2 - BC^2$
-------------------------	-------------------------	---------------

11. L'ensemble des points M tels que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$ est :

la droite (AB)	le cercle de diamètre [AB]	la médiatrice de [AB]
----------------	----------------------------	-----------------------

12. AB = 6. L'ensemble des points M tels que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 16$ est :

le cercle de centre I et de rayon 4	le cercle de centre I (milieu de [AB]) et de rayon 5	la médiatrice de [AB]
-------------------------------------	--	-----------------------

13. L'ensemble des points M tels que $MA^2 - MB^2 = 8$ (avec AB = 4) est :

un cercle	la droite (AB)	une droite perpendiculaire à (AB)
-----------	----------------	-----------------------------------

14. La distance du point A(2 ; -1) à la droite $3x - 4y + 5 = 0$ vaut :

1	3	15
---	---	----

15. Le cercle $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$ a pour centre et rayon :

(-3 ; 1) et 2	(3 ; -1) et 4	(3 ; -1) et 2
---------------	---------------	---------------

16. La droite $y = x + m$ est tangente au cercle $x^2 + y^2 = 2$ si et seulement si :

$m = 2$	$m = \sqrt{2}$	$m = 2$ ou $m = -2$
---------	----------------	---------------------

17. Les droites $2x - y + 1 = 0$ et $x + 2y - 3 = 0$ sont :

perpendiculaires	parallèles	sécantes non perpendiculaires
------------------	------------	-------------------------------

18. Le cercle de centre $\Omega(1 ; 1)$ passe par A(4 ; 5). Sa tangente en A a pour équation :

$3x + 4y - 7 = 0$	$3x + 4y - 32 = 0$	$4x - 3y - 1 = 0$
-------------------	--------------------	-------------------

19. $\vec{u}(\cos a ; \sin a)$ et $\vec{v}(\cos b ; \sin b)$. Alors $\vec{u} \cdot \vec{v} =$

$\cos(a + b)$	$\cos(a - b)$	$\sin(a + b)$
---------------	---------------	---------------

20. L'ensemble des points M(x ; y) tels que $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5 = 0$ est :

l'ensemble vide	un cercle de rayon 5	le point (-1 ; 2)
-----------------	----------------------	-------------------

8

Rotation, espace et stratégie

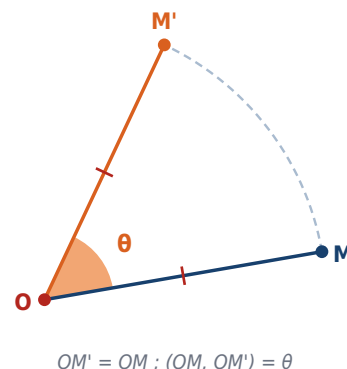
Rotation, vecteurs de l'espace, méthode de concours

8.1 La rotation

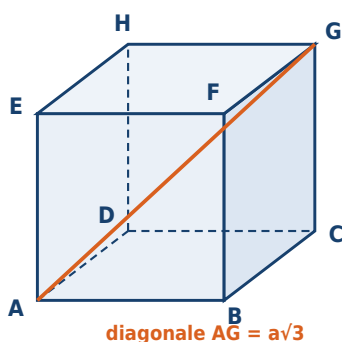
La **rotation** de centre Ω et d'angle θ fixe Ω et transforme $M \neq \Omega$ en M' tel que $\Omega M' = \Omega M$ et $(\Omega \vec{M}, \Omega \vec{M}') \equiv \theta [2\pi]$.

PROPRIÉTÉS

- Elle conserve les **distances**, les angles orientés, l'alignement, le parallélisme : l'image d'un cercle est un cercle de **même rayon**.
- Une droite et son image font un angle θ . Deux rotations de même centre se composent en ajoutant les angles.
- En repère orthonormé direct, la rotation de centre O d'angle $\frac{\pi}{2}$ envoie $(x ; y)$ sur $(-y ; x)$; d'angle π , sur $(-x ; -y)$.



8.2 Vecteurs de l'espace



Trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ (avec $\vec{u}, \vec{v}$ non colinéaires) sont **coplanaires** si $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.
Quatre points A, B, C, D sont coplanaires si $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ le sont.

En repère orthonormé : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$. La droite passant par A et dirigée par $\vec{u}(a ; b ; c)$: $x = x_A + at ; y = y_A + bt ; z = z_A + ct$.

Exemple — quatre points coplanaires ?

Énoncé	A(1 ; 0 ; 0), B(0 ; 2 ; 0), C(0 ; 0 ; 3) et D(1 ; 2 ; -3) sont-ils coplanaires ?
Démarche	$\vec{AB}(-1 ; 2 ; 0)$, $\vec{AC}(-1 ; 0 ; 3)$, $\vec{AD}(0 ; 2 ; -3)$ et l'on remarque que $\vec{AD} = \vec{AB} - \vec{AC}$.
Réponse	oui, les quatre points sont coplanaires

8.3 Stratégie de concours

LES TECHNIQUES D'ÉLIMINATION

- **La valeur test** : $x = 0$ pour une formule, $n = 1$ pour une somme, un point pour une réciproque ou une dérivée.
- **Le calcul modulo** : un reste se trouve en réduisant chaque facteur, puis en cherchant une puissance égale à 1.
- **La négation mécanique** : $\forall \leftrightarrow \exists$, et $\leftrightarrow$ ou, $> \leftrightarrow \leq$, et « $P \Rightarrow Q$ » se nie en « P et non Q ».

GÈRE TON TEMPS

40 questions en 20 minutes : **30 secondes par question**. Au bout de 40 secondes sans idée, entoure le numéro, coche la proposition la plus vraisemblable et passe. Garde les deux dernières minutes pour vérifier qu'aucune case n'est vide.

Semaine	Ce que tu travailles	Objectif chiffré
Semaine 1	Chapitres 1, 2 et 3 : logique, applications, arithmétique	un reste modulo n en 20 s
Semaine 2	Chapitres 4 et 5 : suites, trigonométrie	toutes les formules par cœur
Semaine 3	Chapitres 6, 7 et 8 : limites, dérivées, géométrie	une limite usuelle en 15 s
Semaine 4	Les 3 épreuves blanches, puis les questions ratées	34 bonnes réponses sur 40

LA VEILLE ET LE JOUR DU CONCOURS

- **La veille** : relis seulement les encadrés « À retenir » et « Piège » et les tableaux de formules. Ne commence pas un nouveau chapitre ; dors tôt.
- **Le jour J** : parcours toutes les questions et traite d'abord celles que tu sais résoudre en moins de quinze secondes.

EXERCICES — 20 questions : rotation, espace et révisions mélangées. Objectif : 10 minutes.

1. La rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ transforme M(x ; y) en :

M'(-x ; -y)	M'(y ; -x)	M'(-y ; x)
-------------	------------	------------

2. La rotation de centre $\Omega(1 ; 1)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$ transforme A(3 ; 1) en :

(1 ; 3)	(3 ; 3)	(-1 ; 1)
---------	---------	----------

3. La composée de deux rotations de même centre, d'angles α et β , est la rotation d'angle :

$\alpha\beta$	$\alpha - \beta$	$\alpha + \beta$
---------------	------------------	------------------

4. ABCD est un carré direct de centre O. La rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ transforme A en :

D	C	B
---	---	---

5. Une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ transforme une droite D en D'. L'angle entre D et D' vaut :

$\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{3}$
-----------------	---	-----------------

6. ABC est équilatéral direct. La rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ transforme B en :

C	A	le milieu de [BC]
---	---	-------------------

7. Une rotation transforme un cercle de rayon r en :

un cercle de rayon 2r	une droite	un cercle de rayon r
-----------------------	------------	----------------------

8. Dans l'espace, A(1 ; 0 ; 2) et B(3 ; 4 ; 0). AB =

$2\sqrt{6}$	24	6
-------------	----	---

9. $\vec{u}(1; 2; -1)$, $\vec{v}(2; 1; 0)$ et $\vec{w}(3; 3; -1)$ sont :

coplanaires	deux à deux colinéaires	deux à deux orthogonaux
-------------	-------------------------	-------------------------

10. Dans un cube ABCDEFGH : $\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AE} =$

$\vec{AH}$	$\vec{AG}$	$\vec{AC}$
------------	------------	------------

11. La droite passant par A(1 ; 2 ; 0) dirigée par $\vec{u}(2; -1; 1)$ contient le point :

(3 ; 1 ; 1)	(1 ; 2 ; 1)	(2 ; -1 ; 1)
-------------	-------------	--------------

12. Deux droites de l'espace non coplanaires :

sont sécantes	sont parallèles	n'ont aucun point commun et ne sont pas parallèles
---------------	-----------------	--

13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} =$

1	0	2
---	---	---

14. La dérivée de $f(x) = \cos^3 x$ est :

$-\sin^3 x$	$-3 \sin x \cos^2 x$	$3 \cos^2 x$
-------------	----------------------	--------------

15. $\sum_{k=1}^{20} (3k - 1) =$

590	610	630
-----	-----	-----

16. Le reste de la division de 2^{2026} par 7 est :

1	2	4
---	---	---

17. La négation de « $\forall x \in I, f(x) \leq M$ » est :

$\forall x \in I, f(x) > M$	$\exists x \in I, f(x) > M$	$\exists x \in I, f(x) \leq M$
-----------------------------	-----------------------------	--------------------------------

18. L'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3 + 1$ est :

injective non surjective	bijective	surjective non injective
--------------------------	-----------	--------------------------

19. $\sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8} =$

$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{4}$
----------------------	----------------------	---------------

20. OA, OB, OC deux à deux perpendiculaires et de longueur 3. Le volume du tétraèdre OABC est :

$\frac{9}{2}$	27	9
---------------	----	---

E1

Épreuve blanche n°1

40 questions — 20 minutes — 1 point par question

Choisis une seule proposition par question. Ne bloque pas : passe et reviens ensuite. Note ton score sur 40 à la fin.

1. La négation de « $\exists n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N} : m \leq n$ » est :

$\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N} : m > n$	$\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N} : m > n$	$\exists n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N} : m > n$
--	--	--

2. Pour x réel, « $x > 1$ » est une condition ... pour « $x^2 > 1$ » :

nécessaire et suffisante	nécessaire	suffisante
--------------------------	------------	------------

3. Le nombre de parties d'un ensemble à 5 éléments est :

10	25	32
----	----	----

4. $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n =$

2^{n+1}	$2^n - 1$	$2^{n+1} - 1$
-----------	-----------	---------------

5. L'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + 1$ est :

injective	bijective	ni injective ni surjective
-----------	-----------	----------------------------

6. L'application $f :]0 ; +\infty[\rightarrow]0 ; +\infty[, x \mapsto \frac{1}{x}$ est :

non injective	non surjective	bijective et égale à sa réciproque
---------------	----------------	------------------------------------

7. L'image directe de $[-2 ; 1]$ par $x \mapsto x^2$ est :

$[0 ; 4]$	$[1 ; 4]$	$[-2 ; 1]$
-----------	-----------	------------

8. La fonction $x \mapsto \cos(4x)$ a pour période :

π	$\frac{\pi}{2}$	4π
-------	-----------------	--------

9. $E(-0,5) =$

-1	-0,5	0
----	------	---

10. Le reste de la division euclidienne de -23 par 6 est :

-5	1	5
----	---	---

11. Le reste de la division de 3^{2026} par 4 est :

0	3	1
---	---	---

12. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\text{PGCD}(2n + 3 ; n + 1) =$

$n + 1$	1	2
---------	---	---

13. Le nombre de diviseurs positifs de 360 est :

24	12	36
----	----	----

14. Si $x \equiv 3 [4]$, alors $x^2 \equiv$

0 [4]	1 [4]	3 [4]
-------	-------	-------

15. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n + 1$. Alors $u_n =$

$2^n + 1$	2^n	$2^{n+1} - 1$
-----------	-------	---------------

16. (u_n) arithmétique, $u_0 = 2$ et $u_{10} = 32$. $u_0 + u_1 + \dots + u_{10} =$

170	340	187
-----	-----	-----

17. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^9} =$

$\frac{511}{256}$	$\frac{1023}{512}$	2
-------------------	--------------------	---

18. La suite $u_n = \frac{2n+1}{n+1}$ est :

décroissante	non majorée	croissante et majorée par 2
--------------	-------------	-----------------------------

19. $\cos \frac{7\pi}{12} =$

$\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$	$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$
---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------

20. En fonction de $t = \tan a$: $\sin 2a =$

$\frac{2t}{1-t^2}$	$\frac{1-t^2}{1+t^2}$	$\frac{2t}{1+t^2}$
--------------------	-----------------------	--------------------

21. $\sin x + \sin 3x =$

$2 \sin 2x \cos x$	$2 \cos 2x \sin x$	$\sin 4x$
--------------------	--------------------	-----------

22. Le minimum de $\sin x - \sqrt{3} \cos x$ est :

$-1 - \sqrt{3}$	-2	-1
-----------------	------	------

23. Les solutions dans $[0 ; \pi]$ de $\cos 2x = 0$ sont :

0 et π	$\frac{\pi}{2}$ seulement	$\frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$
------------	---------------------------	-------------------------------------

24. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4}{2x^2 + x} =$

-4	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
------	---------------	-----------

25. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} =$

-4	0	4
------	---	---

26. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\tan 3x} =$

$\frac{2}{3}$	1	$\frac{3}{2}$
---------------	---	---------------

27. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 4} - x) =$

2	0	$+\infty$
---	---	-----------

28. La dérivée de $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ est :

$\cos x$	$\frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$	$\frac{\sin x - x \cos x}{x^2}$
----------	---------------------------------	---------------------------------

29. La tangente à la courbe de $f(x) = \sqrt{x}$ au point d'abscisse 4 a pour équation :

$y = \frac{1}{4}x + 1$	$y = \frac{1}{4}x + 2$	$y = \frac{1}{2}x$
------------------------	------------------------	--------------------

30. $f(x) = x^3 - 12x$ admet un maximum local en :

$x = 0$	$x = 2$	$x = -2$
---------	---------	----------

31. La courbe de $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x}$ admet l'asymptote oblique :

$y = x + 1$	$y = 1$	$y = x$
-------------	---------	---------

32. G est le barycentre de (A ; 1) et (B ; 3). $\vec{AG} =$

$\frac{1}{4}\vec{AB}$	$3\vec{AB}$	$\frac{3}{4}\vec{AB}$
-----------------------	-------------	-----------------------

33. $AB = 2$, $AC = 3$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$. Alors $BC =$

$\sqrt{7}$	$\sqrt{19}$	$\sqrt{13}$
------------	-------------	-------------

34. Les vecteurs $\vec{u}(2; -1)$ et $\vec{v}(1; 2)$ sont :

de normes différentes	orthogonaux	colinéaires
-----------------------	-------------	-------------

35. La distance de O à la droite $x + y - 4 = 0$ vaut :

4	$\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$
---	------------	-------------

36. Le cercle $x^2 + y^2 - 4y = 0$ a pour rayon :

2	4	$\sqrt{2}$
---	---	------------

37. La rotation de centre O et d'angle π transforme (2 ; -3) en :

(3 ; 2)	(-2 ; 3)	(2 ; 3)
---------	----------	---------

38. Dans un cube d'arête 1, la distance entre deux sommets opposés vaut :

$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	2
------------	------------	---

39. Le chiffre des unités de 3^{2026} est :

3	7	9
---	---	---

40. Le nombre d'applications injectives de $\{1 ; 2\}$ dans $\{a ; b ; c\}$ est :

6	8	9
---	---	---

Mon score : / 40

Temps utilisé : min

Questions à revoir :

E2**Épreuve blanche n°2**

40 questions — 20 minutes — 1 point par question

Choisis une seule proposition par question. Ne bloque pas : passe et reviens ensuite. Note ton score sur 40 à la fin.**1.** La proposition « $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} : n > x$ » est :

ni vraie ni fausse	vraie	fausse
--------------------	-------	--------

2. « non ($P \Rightarrow Q$) » équivaut à :

non P et Q	non $P \Rightarrow$ non Q	P et non Q
------------	---------------------------	------------

3. $A = [0 ; 3]$ et $B =]1 ; 5]$. $A \cap B =$

$[1 ; 3]$	$]1 ; 3]$	$[0 ; 5]$
-----------	-----------	-----------

4. Avec les mêmes ensembles, $A \setminus B =$

$[0 ; 1]$	$]3 ; 5]$	$[0 ; 1[$
-----------	-----------	-----------

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $5^n - 1$ est divisible par :

4	5	6
---	---	---

6. L'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x|$ est :

surjective	injective	ni injective ni surjective
------------	-----------	----------------------------

7. L'application $f : [1 ; +\infty[\rightarrow [0 ; +\infty[, x \mapsto x^2 - 2x + 1$ est :

non injective	bijective	non surjective
---------------	-----------	----------------

8. Sa réciproque est :

$x \mapsto \sqrt{x} - 1$	$x \mapsto 1 + \sqrt{x}$	$x \mapsto 1 - \sqrt{x}$
--------------------------	--------------------------	--------------------------

9. La fonction $f(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$ est :

ni paire ni impaire	paire	impaire
---------------------	-------	---------

10. $E(\pi) + E(-\pi) =$

-7	0	-1
----	---	----

11. Le reste de la division de 17^{10} par 5 est :

1	2	4
---	---	---

12. La décomposition en facteurs premiers de 1 440 est :

$2^4 \times 3^3 \times 5$	$2^5 \times 3^2 \times 5$	$2^5 \times 3^2 \times 7$
---------------------------	---------------------------	---------------------------

13. PPCM(18 ; 30) =

6	90	540
---	----	-----

14. Entre 0 et 11, l'entier n tel que $n \equiv 2 [3]$ et $n \equiv 3 [4]$ est :

5	7	11
---	---	----

15. $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + 1$. La suite $v_n = u_n - 2$ est :

arithmétique de raison 1	géométrique de raison $\frac{1}{2}$	géométrique de raison 2
--------------------------	-------------------------------------	-------------------------

16. On en déduit que $u_n =$

$2 - \frac{2}{2^n}$	$\frac{n}{2}$	$2 + \frac{1}{2^n}$
---------------------	---------------	---------------------

17. $u_n = 3n + 1$. La somme $u_0 + u_1 + \dots + u_{19}$ vaut :

590	610	1 180
-----	-----	-------

18. (u_n) géométrique de raison 3. Alors $\frac{u_{10}}{u_7} =$

3	9	27
---	---	----

19. $\sin \frac{\pi}{12} =$

$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$	$\frac{1}{2}$
---------------------------------	---------------------------------	---------------

20. $\tan \frac{\pi}{12} =$

$2 - \sqrt{3}$	$2 + \sqrt{3}$	$\sqrt{3} - 1$
----------------	----------------	----------------

21. $\cos 5x + \cos 3x =$

$\cos 8x$	$2 \cos 4x \cos x$	$2 \cos 8x \cos 2x$
-----------	--------------------	---------------------

22. $\sin 5x - \sin 3x =$

$\sin 2x$	$2 \sin 4x \cos x$	$2 \cos 4x \sin x$
-----------	--------------------	--------------------

23. L'équation $\cos x + \sqrt{3} \sin x = 1$ équivaut à :

$\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$	$\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$	$\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$
--	--	--

24. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + 1}{x^2 - x} =$

2	$-\infty$	$+\infty$
---	-----------	-----------

25. $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} =$

$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{3}$
---------------	---	---------------

26. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x} =$

$\frac{1}{2}$	2	1
---------------	---	---

27. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x} =$

$+\infty$	0	1
-----------	---	---

28. La dérivée de $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ est :

$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$	$\frac{1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$	$\frac{x^2}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$
----------------------------	-------------------------------------	---------------------------------------

29. $f(x) = x^4 - 4x^3$ admet un minimum en :

$x = 0$	$x = 0$ et $x = 3$	$x = 3$
---------	--------------------	---------

30. Le nombre de solutions réelles de $x^3 - 3x + 1 = 0$ est :

1	2	3
---	---	---

31. La fonction $x \mapsto x^3$ est-elle dérivable en 0 ?

oui, de nombre dérivé 0	non	oui, de nombre dérivé 1
-------------------------	-----	-------------------------

32. G est le barycentre de (A ; 3) et (B ; -1). G appartient :

à la droite (AB), hors du segment [AB]	à la médiatrice de [AB]	au segment [AB]
--	-------------------------	-----------------

33. $AB = 5$, $AC = 8$ et $BC = 7$. $\vec{AB} \cdot \vec{AC} =$

20	-20	40
----	-----	----

34. Dans ce triangle, l'angle $\widehat{BAC}$ mesure :

$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$
-----------------	-----------------	------------------

35. Les droites $x - 2y + 1 = 0$ et $2x + y - 3 = 0$ sont :

parallèles	perpendiculaires	confondues
------------	------------------	------------

36. La distance de A(1 ; -2) à la droite $5x + 12y - 6 = 0$ vaut :

$\frac{25}{13}$	$\frac{13}{25}$	25
-----------------	-----------------	----

37. Le cercle de diamètre [AB], avec A(1 ; 2) et B(5 ; -2), a pour équation :

$(x - 3)^2 + y^2 = 32$	$(x - 3)^2 + y^2 = 8$	$(x + 3)^2 + y^2 = 8$
------------------------	-----------------------	-----------------------

38. La rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ transforme (x ; y) en :

(y ; -x)	(-y ; x)	(-x ; y)
----------	----------	----------

39. Les points A(1 ; 0 ; 0), B(0 ; 1 ; 0), C(0 ; 0 ; 1) et D(1 ; 1 ; 1) sont :

alignés	non coplanaires	coplanaires
---------	-----------------	-------------

40. Combien de nombres premiers sont pairs ?

0	une infinité	1
---	--------------	---

Mon score : / 40

Temps utilisé : min

Questions à revoir :

E3**Épreuve blanche n°3**

40 questions — 20 minutes — 1 point par question

Choisis une seule proposition par question. Ne bloque pas : passe et reviens ensuite. Note ton score sur 40 à la fin.**1.** La négation de « tout entier pair est divisible par 4 » est :

aucun entier pair n'est divisible par 4	tout entier impair est divisible par 4	il existe un entier pair non divisible par 4
---	--	--

2. La proposition « $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 = 0$ » est :

fausse	vraie	ni vraie ni fausse
--------	-------	--------------------

3. Le complémentaire de $A \cup B$ est :

$A \cap B$	$\overline{A \cap B}$	$\overline{A \cup B}$
------------	-----------------------	-----------------------

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^{2n} - 2^n$ est divisible par :

7	5	11
---	---	----

5. $\sum_{k=1}^n k(k+1) =$

$n^2(n+1)$	$\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
------------	-------------------------	--------------------------

6. $f: \mathbb{R} - \{-1\} \rightarrow \mathbb{R} - \{1\}, x \mapsto \frac{x-1}{x+1}$ a pour réciproque :

$x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$	$x \mapsto \frac{1+x}{1-x}$	$x \mapsto \frac{1-x}{1+x}$
-----------------------------	-----------------------------	-----------------------------

7. Si $f: E \rightarrow F$ est injective, avec E et F finis de même cardinal, alors f est :

constante	non surjective	bijective
-----------	----------------	-----------

8. La période de $x \mapsto \cos^2 x$ est :

π	$\frac{\pi}{2}$	2π
-------	-----------------	--------

9. Pour tout réel x , $E(x+1) =$

$E(x)$	$E(x) + x$	$E(x) + 1$
--------	------------	------------

10. Le reste de la division de 4^{100} par 9 est :

4	1	7
---	---	---

11. $\text{PGCD}(2^{12} - 1; 2^8 - 1) =$

1	15	255
---	----	-----

12. Si $a \equiv b [n]$, alors pour tout entier $k \geq 1$:

$a^k \equiv b^k [n]$	$ka \equiv b [n]$	$a^k \equiv b [n]$
----------------------	-------------------	--------------------

13. Si p est premier, le nombre de diviseurs positifs de p^4 est :

2	4	5
---	---	---

14. $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2u_n - 3$. Alors $u_n =$

3×2^n	3	$3 - 2^n$
----------------	---	-----------

15. (u_n) géométrique de raison $\frac{1}{2}$, $u_0 = 64$. $u_0 + u_1 + \dots + u_5 =$

63	128	126
----	-----	-----

16. La suite $u_n = \frac{3^n}{n+1}$ est :

constante	strictement décroissante	strictement croissante
-----------	--------------------------	------------------------

17. Si (u_n) est arithmétique, alors $u_3 + u_9 =$

$2u_6$	u_6	u_{12}
--------	-------	----------

18. $\cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5} =$

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
---------------	---------------	---------------

19. $\cos^2 x - \cos^2 y =$

$\cos(x+y) \cos(x-y)$	$\sin(x+y) \sin(y-x)$	$\sin(x+y) \sin(x-y)$
-----------------------	-----------------------	-----------------------

20. Les solutions dans $\mathbb{R}$ de $\cos x = \sin x$ sont :

$x = \frac{\pi}{4} + k\pi$	$x = k\pi$	$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$
----------------------------	------------	-----------------------------

21. L'ensemble des solutions dans $[0 ; 2\pi[$ de $\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ est :

$]\frac{\pi}{4} ; \frac{5\pi}{4}[$	$]\frac{\pi}{4} ; \frac{3\pi}{4}[$	$[0 ; \frac{\pi}{4}[$
------------------------------------	------------------------------------	-----------------------

22. $1 + \cos x =$

$2 \cos^2 \frac{x}{2}$	$2 \sin^2 \frac{x}{2}$	$\cos^2 \frac{x}{2}$
------------------------	------------------------	----------------------

23. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} =$

$+\infty$	0	1
-----------	---	---

24. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} =$

1	$-\infty$	-1
---	-----------	----

25. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} =$

0	$\frac{1}{2}$	1
---	---------------	---

26. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1} =$

$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$
---------------	---	---------------

27. La dérivée de $f(x) = \cos(x^2)$ est :

$2x \cos(x^2)$	$-2x \sin(x^2)$	$-\sin(x^2)$
----------------	-----------------	--------------

28. La dérivée de $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ est :

$\frac{\cos x}{\sin^2 x}$	$-\frac{1}{\cos x}$	$-\frac{\cos x}{\sin^2 x}$
---------------------------	---------------------	----------------------------

29. Si f est dérivable en a : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} =$

$2f'(a)$	0	$f'(a)$
----------	---	---------

30. La fonction $f(x) = 2x + \cos x$ est, sur $\mathbb{R}$:

strictement croissante	strictement décroissante	non monotone
------------------------	--------------------------	--------------

31. La courbe de $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ admet l'asymptote oblique :

$y = x - 1$	$y = x + 1$	$y = x$
-------------	-------------	---------

32. ABCD est un parallélogramme. Le barycentre de (A ; 1), (B ; 1), (C ; 1), (D ; 1) est :

le point A	le centre du parallélogramme	le milieu de [AB]
------------	------------------------------	-------------------

33. L'ensemble des points M tels que $MA^2 + MB^2 = AB^2$ est :

la médiatrice de [AB]	le cercle de diamètre [AB]	le milieu de [AB]
-----------------------	----------------------------	-------------------

34. $\vec{u}(a; 1)$ et $\vec{v}(a - 1; 2)$ sont orthogonaux :

pour aucune valeur de a	pour $a = 1$	pour $a = 2$
---------------------------	--------------	--------------

35. La droite $3x + 4y + c = 0$ est tangente au cercle $x^2 + y^2 = 1$ si et seulement si :

$c = 25$	$c = 1$	$c = 5$ ou $c = -5$
----------	---------	---------------------

36. La rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, composée avec elle-même, est :

la symétrie de centre O	une translation	l'identité
-------------------------	-----------------	------------

37. ABCD est un carré direct. La rotation de centre B qui transforme A en C a pour angle :

$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	π
-----------------	------------------	-------

38. La droite $x = 1 + t$; $y = 2 - t$; $z = 3t$ contient le point (2 ; 1 ; 3) :

oui, pour $t = 3$	non	oui, pour $t = 1$
-------------------	-----	-------------------

39. Dans un cube ABCDEFGH, les vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{AD}$ sont :

deux à deux orthogonaux	coplanaires	non coplanaires
-------------------------	-------------	-----------------

40. Le nombre de zéros à la fin de l'écriture de $10^5 \times 25^3$ est :

5	8	11
---	---	----

Mon score : / 40

Temps utilisé : min

Questions à revoir :



Corrigés

Toutes les réponses, avec l'explication de chacune

Pour chaque question, la **bonne réponse** est en gras, suivie de l'explication en gris. Recompte tes points, puis reprends les fiches de méthode correspondant aux questions ratées.

Chapitre 1 — Logique · série A (1 à 18)

1. vraie — $x^2 \geq 0$	7. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : y^2 < x$	13. $ a = b \Leftrightarrow (a-b)(a+b) = 0$
2. $\exists \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n+1} \geq \varepsilon$ — $\forall \Leftrightarrow \exists$ et on nie la fin	8. vraie — $x = 0$ convient	14. $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$
3. P et Q et non R — $\text{non}(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \text{ et non } B$	9. vraie — prendre $y = x^2$	15. 8 lignes — 2^3
4. toujours vraie — contraposée	10. fausse — contre-exemple $y = -1$	16. toujours vraie — tiers exclu
5. non P ou Q	11. fausse — $\sqrt{x^2} = x $	17. vraie — $n(n+1)$
6. fausse — $x = 2$ est un contre-exemple	12. $-1 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 1$	18. suffisante — $-1 < x < 3 \Rightarrow x < 3$

Chapitre 1 — Ensembles et récurrence · série B (19 à 38)

19. $\{2; 3\}$	26. $\overline{A \cup B}$ — loi de Morgan	33. $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ — récurrence
20. $\{1; 2; 3; 4\}$	27. 6 éléments — 2×3	34. $6 - 7^{n+1} - 1 = 7(7^n - 1) + 6$
21. $\{1\}$ — éléments de A hors de B	28. $A \subset B$	35. $6 - (n-1)n(n+1)$
22. $8 - 2^3$	29. $]-2; 2[$	36. démontrer $P(n+1)$
23. $\{\emptyset; \{1\}; \{2\}; \{1; 2\}\}$ — 4 parties	30. 5 éléments — $-2, -1, 0, 1, 2$	37. $2^n \geq n^2 - 2^4 = 4^2$
24. $]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[$	31. 6 — $1, 2, 3, 4, 6, 12$	38. $\frac{n}{n+1} - \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$
25. tout élément de A est dans B	32. $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ — récurrence	

Chapitre 2 — Applications · série A (1 à 18)

1. bijective	7. bijective	13. $(2x+1)^2$ — $g(f(x))$
2. $x \mapsto \frac{x-3}{2}$ — $y = 2x+3 \Leftrightarrow x = \dots$	8. injective non surjective — 1 n'a pas d'antécédent	14. f est injective
3. ni injective ni surjective — $f(-1) = f(1)$; -1 n'a pas d'antécédent	9. bijective — réciproque $n \mapsto n-5$	15. g est surjective
4. bijective	10. $[0; 4]$ — 0 est atteint	16. une bijection
5. $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$	11. $\{-2; 2\}$	17. l'identité de E
6. tout élément de F a au moins un antécédent	12. $x \mapsto \frac{x+1}{x-2}$ — $y(x-1) = 2x+1$	18. 8 — 2^3

Chapitre 2 — Généralités sur les fonctions · série B (19 à 38)

19. bornée	26. $f(2a-x) = f(x)$	33. strictement croissante — somme de deux fonctions croissantes
20. $\frac{1}{2}$ — $x^2 + 1 \geq 2 x $	27. $f(2-x) + f(x) = 4$ — $f(x) = 2 + \frac{3}{x-1}$	34. $f(x) \leq g(x)$ — $x^2 \leq x$
21. π	28. décroissante	35. $0 \leq f(x) < 1$
22. 2π — multiple commun de $\frac{2\pi}{3}$ et π	29. $[-1; 1]$ — $1 - x^2 \geq 0$	36. strictement croissante — sommet en 1
23. 2	30. 1 — atteint en 0	37. $f(0) = 0$ — $f(0) = -f(0)$
24. -3 — plus grand entier $\leq -2,3$	31. $-\frac{1}{ab}$	38. $[-1; +\infty[$ — $f(2) = -1$
25. $E(x) \leq x < E(x) + 1$	32. $4 - x + \frac{4}{x} - 4 = \frac{(x-2)^2}{x}$	

Chapitre 3 — Division euclidienne et congruences · série A (1 à 18)

1. 3 — $-17 = 5 \times (-4) + 3$	7. 1 — $5 \equiv -1 [6]$	13. 3 — $n+1 \in \{1; 2; 4\}$
2. -4	8. 0 ou 1 — $n = 2k$ ou $2k+1$	14. 9 — cycle 7, 9, 3, 1; $2 \ 026 \equiv 2 [4]$
3. 1 [7] — $8 \equiv 1$	9. 4 $\equiv 1 [3]$ — $4^n + 2 \equiv 1 + 2$	15. n divise a - b
4. 1 [7] — $15 \equiv 1$	10. a = b ou a = -b	16. 0 [5] — $4 + 1 = 5$
5. 1 - 2 $\equiv -1 [3]$	11. 2b - 3c — combinaison linéaire	17. x $\equiv 5 [7]$ — $3 \times 5 = 15 \equiv 1$
6. 1 - 3^2 = 9 $\equiv 1 [8]$	12. 4 — $n + 5 = (n+1) + 4$	18. 1 - 10 $\equiv 3$ et $3^6 = 729 \equiv 1$

Chapitre 3 — Nombres premiers, PGCD, PPCM · série B (19 à 38)

19. 15	26. 1 — un diviseur commun divise 1	33. 1
20. p ≤ 43 — $\sqrt{2027} \approx 45$	27. 1 — $2n + 1 = 2 \times n + 1$	34. infini — théorème d'Euclide
21. 3^4 $\times$ 5^2 — $2025 = 45^2$	28. p a ou p b — lemme d'Euclide	35. premiers entre eux
22. 15 — $(4+1)(2+1)$	29. 5 — $1025 = 5^2 \times 41$	36. 2 et par 3
23. 42	30. 24 — $4 \times 3 \times 2$	37. 2^3 $\times$ 3^2 — plus petits exposants communs
24. 252 — $\frac{126 \times 84}{42}$	31. 28 — $1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12$	38. 13 — $n - 1$ multiple de 12
25. ab	32. 7 $\times$ 11 $\times$ 13	

Chapitre 4 — Monotonie et suites auxiliaires · série A (1 à 18)		
1. $\frac{1}{(n+1)(n+2)}$	7. décroissante — quantité conjuguée	13. minorée par son premier terme
2. croissante et majorée par 1	8. $\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$	14. $1 \leq u_n < 3$ — $u_0 = 1$
3. $\sqrt{3}$	9. strictement croissante — $u_{n+1} - u_n = u_n^2 + 1$	15. 4
4. $0 < u_n < 2$ — si $u_n < 2$, $\sqrt{2+u_n} < 2$	10. $\frac{2}{3}$	16. géométrique de raison $\frac{1}{2}$ — $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$
5. $5 - u_{n+1} - u_n = 2n - 9$	11. $1 - v_{n+1} = \frac{1+u_n}{u_n}$	17. $6 - 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$ — $v_0 = -4$
6. bornée	12. $\frac{2}{2n+1}$ — $v_n = \frac{1}{2} + n$	18. strictement croissante

Chapitre 4 — Suites arithmétiques et géométriques · série B (19 à 38)		
19. $3 - 7r = 21$	26. $3 - \frac{12}{4}$	33. géométrique de raison 9 — $v_{n+1} = 3^{u_n+2}$
20. $2\,500 - 50^2$	27. ni arithmétique ni géométrique — 2, 5, 11, ...	34. géométrique de raison 2
21. $2\,047 - 2^{11} - 1$	28. 5	35. $121 - 11^2$
22. $\frac{n(n+1)}{2}$	29. $(n+1)^2 - n + 1$ premiers impairs	36. $2^{55} - 1 + 2 + \dots + 10 = 55$
23. $b^2 = ac$	30. $50\,000 \times 1,03^n$	37. $1 + 3^n$ — $v_n = u_n - 1$ géométrique
24. $\frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right)$ — $n + 1$ termes	31. $(n - p)r$	38. $2 - \frac{1}{2^n}$
25. $2 - q^3 = 8$	32. n^2	

Chapitre 5 — Formules trigonométriques · série A (1 à 18)		
1. $\cos a \cos b + \sin a \sin b$	7. $4 \cos^3 a - 3 \cos a - \cos(2a + a)$	13. $\frac{2 + \sqrt{2}}{4} - \frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2}$
2. $\sin a \cos b - \cos a \sin b$	8. $\frac{1-t^2}{1+t^2}$	14. $\frac{1}{2} \sin 2x$
3. $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$	9. $\frac{2t}{1+t^2}$	15. $\cos 2x - (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x)$
4. $\sqrt{2} - 1 - \tan \frac{a}{2} = \frac{1 - \cos a}{\sin a}$	10. $\frac{2t}{1-t^2}$	16. $\tan x - \frac{2 \sin^2 x}{2 \sin x \cos x}$
5. $1 - 2 \sin^2 a$	11. $-\frac{7}{9} - 2 \cos^2 a - 1$	17. $\frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$
6. $3 \sin a - 4 \sin^3 a - \sin(2a + a)$	12. $-\frac{4}{3} - \frac{2 \times 2}{1-4}$	18. $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$

Chapitre 5 — Transformations et équations · série B (19 à 38)		
19. $2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$	26. $5 - \sqrt{9+16}$	33. 3 solutions — $\sin x = 1$ ou $\sin x = \frac{1}{2}$
20. $-2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$	27. une seule solution : $\frac{\pi}{3} - 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 2$	34. $\frac{1}{2} - 2 \cos \frac{2\pi}{5} \cos \frac{\pi}{5} = \frac{1}{2}$
21. $2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$	28. n'a pas de solution — maximum $\sqrt{2}$	35. $\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{6}$
22. $\frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$	29. $x = \frac{2k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$ — $2x = \pm x + 2k\pi$	36. $-\frac{1}{8}$ — multiplier par $\sin \frac{\pi}{7}$
23. $\frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$	30. $4 - \cos x (2 \sin x - 1) = 0$	37. $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \sin 4x$
24. $2 \cos 2x \cos x - p = 3x$, $q = x$	31. $\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{2\pi}{3}$ — période π	38. $2 - \frac{\sin 2x}{\sin x \cos x}$
25. $2 \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - r = 2$	32. $[0 ; \frac{\pi}{3}[$	

Chapitre 6 — Limites · série A (1 à 18)		
1. $-\frac{3}{2}$ — termes de plus haut degré	7. $\frac{1}{2}$ — limite usuelle	13. 0
2. $-\infty$	8. $\frac{2}{3}$	14. 2
3. 3 — $x^2 + x + 1$	9. 0 — $\left x \sin \frac{1}{x}\right \leq x $	15. -1 — nombre dérivé de $\cos$ en $\frac{\pi}{2}$
4. $\frac{1}{2}$ — quantité conjuguée	10. 0 — encadrement	16. 2 — encadrement
5. $\frac{1}{2} - \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}$	11. $+\infty - x - 2 > 0$	17. $+\infty$ — minoration
6. $\frac{5}{3}$	12. $-\infty - x - 2 < 0$	18. $\frac{1}{2}$ — deux conjugués

Chapitre 6 — Dérivation · série B (19 à 38)		
19. $\frac{x^2-1}{x^2} - x + \frac{1}{x}$	26. $-\sqrt{3} - 2 \times \left(-\sin \frac{\pi}{3}\right)$	33. $[0 ; 1] - f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$
20. $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$	27. non : nombres dérivés à gauche et à droite différents — -1 et 1	34. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = 0$
21. $\sin 2x - 2 \sin x \cos x$	28. n'est pas dérivable (tangente verticale) $-\frac{\sqrt{h}}{h} \rightarrow +\infty$	35. $y = 2x + 2 - f(x) = 2x + 2 + \frac{3}{x-1}$
22. $1 + \tan^2 x$	29. $y = -\frac{1}{4}x + 1 - f(2) = -\frac{1}{4}$	36. en $x = -2$ seulement — f' ne change de signe qu'en -2
23. $10(2x-1)^4 - (u^n)' = nu'u^{n-1}$	30. 0 et 2 — $3x^2 - 6x$	37. 1 — fonction strictement croissante
24. $-\frac{2}{(x+1)^3}$	31. 0 — $f(2)$	38. $x = 1 - f(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$
25. 10 — nombre dérivé de x^{10} en 1	32. -1 et 2 — $(x-2)^2(x+1)$	

Chapitre 7 — Barycentre et produit scalaire (1 à 20)		
1. $\frac{1}{2}\vec{BC} - 2\vec{AG} = -\vec{AB} + \vec{AC}$	8. $\frac{1}{7} - \frac{5}{7 \times 5}$	15. (3 ; -1) et 2 — $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$
2. le cercle de diamètre [AB] — $2MI = AB$	9. $2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$	16. $m = 2$ ou $m = -2 - \frac{ m }{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$
3. la médiatrice de [IC] — $MI = MC$	10. $AI^2 - \frac{BC^2}{4}$	17. perpendiculaires — $(2 ; -1) \cdot (1 ; 2) = 0$
4. (1,5 ; 0,25) — $\left(\frac{1+6-1}{4}, \frac{2-4+3}{4}\right)$	11. le cercle de diamètre [AB]	18. $3x + 4y - 32 = 0$ — vecteur normal $\vec{\Omega A}$
5. $-3 - 6 \cos \frac{2\pi}{3}$	12. le cercle de centre I (milieu de [AB]) et de rayon 5 — $MI^2 - 9 = 16$	19. $\cos(a-b)$
6. $4\vec{u} \cdot \vec{v}$	13. une droite perpendiculaire à (AB) — $2IM \cdot AB = 8$	20. le point (-1 ; 2) — $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 0$
7. $5 - \frac{49+25-64}{2}$	14. $3 - \frac{ 6+4+5 }{5}$	

Chapitre 8 — Rotation, espace et révisions (1 à 20)		
1. $M'(-y ; x)$	8. $2\sqrt{6} - \sqrt{4+16+4}$	15. 610 — $3 \times 210 - 20$
2. (1 ; 3) — $\vec{\Omega A}(2;0) \mapsto (0;2)$	9. coplanaires — $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$	16. $2 - 2^3 \equiv 1 [7] ; 2 \ 026 = 3 \times 675 + 1$
3. $\alpha + \beta$	10. $\vec{AG}$	17. $\exists x \in I, f(x) > M$
4. B	11. (3 ; 1 ; 1) — $t = 1$	18. bijective
5. $\frac{\pi}{3}$	12. n'ont aucun point commun et ne sont pas parallèles	19. $\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{4}$
6. C	13. 1	20. $\frac{9}{2} - \frac{1}{3} \times \frac{9}{2} \times 3$
7. un cercle de rayon r — isométrie	14. $-3 \sin x \cos^2 x$	

Épreuve blanche n°1		
1. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N} : m > n$	15. $2^{n+1} - 1 - u_n + 1 = 2^{n+1}$	29. $y = \frac{1}{4}x + 1 - f(4) = \frac{1}{4}$
2. suffisante — $x = -2$	16. $187 - \frac{11 \times 34}{2}$	30. $x = -2 - 3x^2 - 12$
3. $32 - 2^5$	17. $\frac{1023}{512} - 2 - \frac{1}{2^9}$	31. $y = x + 1 - x + 1 + \frac{1}{x}$
4. $2^{n+1} - 1$	18. croissante et majorée par 2 — $2 - \frac{1}{n+1}$	32. $\frac{3}{4}\vec{AB}$
5. ni injective ni surjective	19. $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$	33. $\sqrt{7} - 4 + 9 - 6$
6. bijective et égale à sa réciproque — $f \circ f =$ identité	20. $\frac{2t}{1+t^2}$	34. orthogonaux — $2 - 2 = 0$
7. [0 ; 4]	21. $2 \sin 2x \cos x$	35. $2\sqrt{2} - \frac{4}{\sqrt{2}}$
8. $\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{4}$	22. $-2 - r = 2$	36. $2 - x^2 + (y-2)^2 = 4$
9. -1	23. $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4} - 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi$	37. (-2 ; 3)
10. $1 - 23 = 6 \times (-4) + 1$	24. $\frac{1}{2}$	38. $\sqrt{3}$
11. $1 - 3 \equiv -1 [4]$	25. $4 - \frac{x+2}{x-1}$	39. 9 — cycle 3, 9, 7, 1
12. $1 - 2n + 3 = 2(n+1) + 1$	26. $\frac{2}{3}$	40. $6 - 3 \times 2$
13. $24 - 2^3 \times 3^2 \times 5$	27. $0 - \frac{4}{\sqrt{x^2+4}+x}$	
14. 1 [4] — $9 \equiv 1$	28. $\frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$	

Épreuve blanche n°2		
1. vraie — propriété d'Archimède	15. géométrie de raison $\frac{1}{2}$	29. $x = 3 - f(x) = 4x^2(x - 3)$
2. P et non Q	16. $2 - \frac{2}{2^n} - v_0 = -2$	30. $3 - \max f(-1) = 3, \min f(1) = -1$
3. $[1 ; 3]$	17. $590 - \frac{20 \times (1 + 58)}{2}$	31. oui, de nombre dérivé 0
4. $[0 ; 1]$ — 1 n'est pas dans B	18. $27 - 3^3$	32. à la droite (AB), hors du segment [AB]
5. $4 - 5 \equiv 1 [4]$	19. $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$	33. $20 - \frac{25 + 64 - 49}{2}$
6. ni injective ni surjective	20. $2 - \sqrt{3}$	34. $\frac{\pi}{3} - \cos \widehat{BAC} = \frac{1}{2}$
7. bijective — $(x - 1)^2$	21. $2 \cos 4x \cos x$	35. perpendiculaires
8. $x \mapsto 1 + \sqrt{x}$	22. $2 \cos 4x \sin x$	36. $\frac{25}{13} - \frac{ 5 - 24 - 6 }{13}$
9. impaire	23. $\cos(x - \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} - r = 2$	37. $(x - 3)^2 + y^2 = 8$
10. $-1 - 3 + (-4)$	24. $-\infty$ — comme $2x$	38. $(y ; -x)$
11. $4 - 17 \equiv 2$ et $2^{10} = 1024$	25. $\frac{1}{6} - \frac{1}{\sqrt{x} + 3}$	39. non coplanaires
12. $2^5 \times 3^2 \times 5$	26. $2 - \frac{2 \sin^2 x}{x \sin x}$	40. 1
13. 90	27. 1 — poser $t = \frac{1}{x}$	
14. 11	28. $\frac{1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$	

Épreuve blanche n°3		
1. il existe un entier pair non divisible par 4	15. $126 - 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2$	29. $f'(a)$
2. fausse — $\Delta = -3$	16. strictement croissante — $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3(n+1)}{n+2} > 1$	30. strictement croissante — $f'(x) = 2 - \sin x > 0$
3. $\overline{A} \cap \overline{B}$	17. $2u_6$	31. $y = x + 1 - x + 1 + \frac{1}{x-1}$
4. $7 - 9 \equiv 2 [7]$	18. $\frac{1}{4}$ — multiplier par $\sin \frac{\pi}{5}$	32. le centre du parallélogramme
5. $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ — récurrence	19. $\sin(x+y) \sin(y-x)$	33. le cercle de diamètre [AB] — théorème de la médiane
6. $x \mapsto \frac{1+x}{1-x}$	20. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$	34. pour aucune valeur de $a - a^2 - a + 2 = 0 : \Delta < 0$
7. bijective	21. $[\frac{\pi}{4} ; \frac{3\pi}{4}[$	35. $c = 5$ ou $c = -5 - \frac{ c }{5} = 1$
8. $\pi - \frac{1 + \cos 2x}{2}$	22. $2 \cos^2 \frac{x}{2}$	36. la symétrie de centre O — angle π
9. $E(x) + 1$	23. 1	37. $-\frac{\pi}{2}$
10. $4 - 4^3 = 64 \equiv 1 [9]$	24. $-1 - \sqrt{x^2} = -x$ si $x < 0$	38. oui, pour $t = 1$
11. $15 - 2^{\text{PGCD}(12; 8)} - 1$	25. $\frac{1}{2} - \tan x (1 - \cos x)$	39. coplanaires — même face
12. $a^k \equiv b^k [n]$	26. $\frac{1}{4}$	40. $5 - 2^5 \times 5^{11}$
13. $5 - 1, p, p^2, p^3, p^4$	27. $-2x \sin(x^2)$	
14. 3 — suite constante	28. $-\frac{\cos x}{\sin^2 x}$	

Barème indicatif pour les épreuves blanches

Score sur 40	Ce que cela signifie	Ce qu'il faut faire
34 et plus	Excellent : niveau des meilleurs du concours	Travaille surtout la vitesse et les problèmes rédigés
27 à 33	Très bon : les méthodes sont acquises	Revois les deux chapitres les plus ratés
20 à 26	Correct : les bases sont là	Refais les séries A des chapitres faibles
moins de 20	À consolider	Reprends les fiches de méthode une par une

Bonne chance à toi pour le concours !