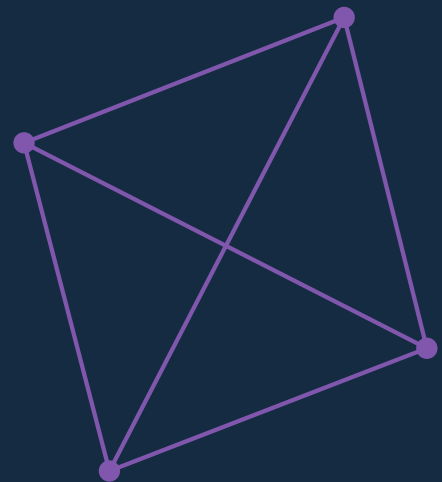


MATHS OLYMPIAD

COLLECTION D'ENTRAÎNEMENT / ADAPTATION FRANÇAISE

Trigonométrie réciproque

Valeurs principales, domaines & équations



97

problèmes • énoncés et réponses

Comprendre. Chercher. Progresser.

Lycée avancé • préparation au supérieur

Votre parcours d'entraînement

Ce livret reprend les **97 problèmes** du document transmis, dans leur ordre d'origine. Les consignes sont traduites en français ; les données, les notations et les choix de réponse sont conservés.

Les formules et les figures font partie intégrante des énoncés. Les lettres des choix de réponse restent A, B, C et D.

Notations. Les angles sont en radians sauf indication de degrés. Les notations $\sec$, $\csc$ et $\cot$ désignent respectivement $1/\cos$, $1/\sin$ et $\cos/\sin$. Dans le livret de trigonométrie réciproque, $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ et $\tan^{-1}$ désignent arcsin, arccos et arctan ; il ne s'agit pas de puissances.

Valeurs principales. $\arcsin : [-\pi/2, \pi/2]$; $\arccos : [0, \pi]$; $\arctan :]-\pi/2, \pi/2[$; $\operatorname{arccot} :]0, \pi[$. Les fonctions arcsec et $\operatorname{arccosec}$ sont définies par $\arccos(1/x)$ et $\arcsin(1/x)$.

Mode d'emploi. Cherchez d'abord sans consulter la grille. Justifiez votre réponse, puis comparez-la à la réponse fournie. Reprenez ensuite les questions qui vous ont résisté.

À la fin du livret. La grille reproduit les réponses du document fourni. Elle ne constitue pas un corrigé détaillé. Un tiret signale une réponse qui n'était pas précisée dans ce document.

Repères dans le livret

Questions à choix multiples · problèmes 1 à 81

Réponses numériques · problèmes 82 à 96

Plusieurs bonnes réponses · problèmes 97

Questions à choix multiples

PROBLÈME 001

On considère $\alpha = 3 \sin^{-1} \left(\frac{6}{11} \right)$ et $\beta = 3 \cos^{-1} \left(\frac{4}{9} \right)$, les fonctions trigonométriques réciproques étant prises en valeurs principales. On considère les affirmations suivantes. I: $\cos(\alpha + \beta) > 0$. II: $\cos(\alpha) < 0$. Choisir la bonne réponse.

- (A) I et II sont vraies.
- (B) I et II sont fausses.
- (C) I est vraie et II est fausse.
- (D) I est fausse et II est vraie.

PROBLÈME 002

Si $\sin \left(\tan^{-1}(x\sqrt{2}) \right) = \cot \left(\sin^{-1} \sqrt{1-x^2} \right)$, $x \in (0, 1)$, alors la valeur de x est :

- (A) $\frac{1}{2}$
- (B) $\frac{1}{3}$
- (C) $\frac{2}{3}$
- (D) $\frac{5}{8}$

PROBLÈME 003

On considère $0 < \alpha < 1$, $\beta = \frac{1}{3\alpha}$ et $\tan^{-1}(1-\alpha) + \tan^{-1}(1-\beta) = \frac{\pi}{4}$. Alors $6(\alpha + \beta)$ vaut :

- (A) 6
- (B) 7
- (C) 8
- (D) 9

PROBLÈME 004

En utilisant les valeurs principales des fonctions trigonométriques réciproques, l'expression $\tan \left(2 \sin^{-1} \left(\frac{2}{\sqrt{13}} \right) - 2 \cos^{-1} \left(\frac{3}{\sqrt{10}} \right) \right)$ vaut :

- (A) $\frac{33}{56}$
- (B) $-\frac{33}{56}$
- (C) $-\frac{16}{63}$
- (D) $\frac{16}{63}$

PROBLÈME 005

Si le domaine de définition de la fonction $f(x) = \sin^{-1} \left(\frac{1}{x^2-2x-2} \right)$, est $(-\infty, \alpha] \cup [\beta, \gamma] \cup [\delta, \infty)$, alors $\alpha + \beta + \gamma + \delta$ vaut :

- (A) 4
- (B) 2
- (C) 5
- (D) 3

PROBLÈME 006

Le nombre de solutions de $\tan^{-1} 4x + \tan^{-1} 6x = \frac{\pi}{6}$, où $-\frac{1}{2\sqrt{6}} < x < \frac{1}{2\sqrt{6}}$ vaut :

- (A) 2
- (B) 0
- (C) 3
- (D) 1

PROBLÈME 007

Si le domaine de définition de la fonction $f(x) = \cos^{-1} \left(\frac{2x-5}{11-3x} \right) + \sin^{-1} (2x^2 - 3x + 1)$ est l'intervalle $[\alpha, \beta]$, alors $\alpha + 2\beta$ vaut :

- (A) 5
- (B) 2
- (C) 3
- (D) 1

PROBLÈME 008

La valeur de $\cot^{-1} \left(\frac{\sqrt{1+\tan^2(2)}-1}{\tan(2)} \right) - \cot^{-1} \left(\frac{\sqrt{1+\tan^2(\frac{1}{2})}+1}{\tan(\frac{1}{2})} \right)$ vaut

- (A) $\pi - \frac{3}{2}$ (B) $\pi + \frac{5}{2}$ (C) $\pi - \frac{5}{4}$ (D) $\pi + \frac{3}{2}$

PROBLÈME 009

La somme de la série infinie $\cot^{-1} \left(\frac{7}{4} \right) + \cot^{-1} \left(\frac{19}{4} \right) + \cot^{-1} \left(\frac{39}{4} \right) + \cot^{-1} \left(\frac{67}{4} \right) + \dots$ vaut :

- (A) $\frac{\pi}{2} + \cot^{-1} \left(\frac{1}{2} \right)$ (B) $\frac{\pi}{2} - \cot^{-1} \left(\frac{1}{2} \right)$
 (C) $\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \left(\frac{1}{2} \right)$ (D) $\frac{\pi}{2} + \tan^{-1} \left(\frac{1}{2} \right)$

PROBLÈME 010

En utilisant les valeurs principales des fonctions trigonométriques réciproques, $\sin^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} \right)$, $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$, vaut

- (A) $\frac{5\pi}{6} - \sin^{-1} x$ (B) $\frac{5\pi}{6} - \sin^{-1} x$ (C) $\frac{\pi}{6} + \sin^{-1} x$ (D) $\frac{\pi}{4} + \sin^{-1} x$

PROBLÈME 011

On note $[x]$ la partie entière de x , c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à x . Alors le domaine de définition de $f(x) = \sec^{-1}(2[x] + 1)$ est :

- (A) $(-\infty, \infty)$ (B) $(-\infty, \infty) - \{0\}$ (C) $(-\infty, -1] \cup [0, \infty)$ (D) $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

PROBLÈME 012

$\cos \left(\sin^{-1} \frac{3}{5} + \sin^{-1} \frac{5}{13} + \sin^{-1} \frac{33}{65} \right)$ vaut :

- (A) $\frac{33}{65}$ (B) 1 (C) $\frac{32}{65}$ (D) 0

PROBLÈME 013

Si $\alpha > \beta > \gamma > 0$, alors l'expression $\cot^{-1} \left(\beta + \frac{1+\beta^2}{\alpha-\beta} \right) + \cot^{-1} \left(\gamma + \frac{1+\gamma^2}{\beta-\gamma} \right) + \cot^{-1} \left(\alpha + \frac{1+\alpha^2}{\gamma-\alpha} \right)$ vaut :

- (A) 3π (B) $\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta + \gamma)$
 (C) π (D) 0

PROBLÈME 014

Si $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$, alors $\cos^{-1} \left(\frac{12}{13} \cos x + \frac{5}{13} \sin x \right)$ vaut

- (A) $x + \tan^{-1} \frac{5}{12}$ (B) $x - \tan^{-1} \frac{4}{3}$ (C) $x + \tan^{-1} \frac{4}{5}$ (D) $x - \tan^{-1} \frac{5}{12}$

PROBLÈME 015

En utilisant les valeurs principales des fonctions trigonométriques réciproques, la somme des valeurs maximale et minimale de $16 \left((\sec^{-1} x)^2 + (\operatorname{cosec}^{-1} x)^2 \right)$ est :

- (A) $24\pi^2$ (B) $18\pi^2$ (C) $22\pi^2$ (D) $31\pi^2$

PROBLÈME 016

Les fonctions trigonométriques réciproques sont prises en valeurs principales. Soient x, y deux réels quelconques de $[-1, 1]$ telles que $\cos^{-1} x - \sin^{-1} y = \alpha$, $\frac{-\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$. Alors la valeur minimale de $x^2 + y^2 + 2xy \sin \alpha$ vaut :

- (A) 0 (B) -1 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{-1}{2}$

PROBLÈME 017

Si le domaine de définition de la fonction $\sin^{-1} \left(\frac{3x-22}{2x-19} \right) + \log_e \left(\frac{3x^2-8x+5}{x^2-3x-10} \right)$ est $(\alpha, \beta]$, alors $3\alpha + 10\beta$ vaut :

- (A) 95 (B) 100 (C) 97 (D) 98

PROBLÈME 018

Si $a = \sin^{-1}(\sin(5))$ et $b = \cos^{-1}(\cos(5))$, alors $a^2 + b^2$ vaut :

- (A) 25 (B) $4\pi^2 + 25$ (C) $8\pi^2 - 40\pi + 50$ (D) $4\pi^2 - 20\pi + 50$

PROBLÈME 019

Pour $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$, si $\sin^{-1} \alpha + \sin^{-1} \beta + \sin^{-1} \gamma = \pi$ et $(\alpha + \beta + \gamma)(\alpha - \gamma + \beta) = 3\alpha\beta$, alors γ vaut

- (A) $\sqrt{3}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (D) $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

PROBLÈME 020

On considère une solution $x = \frac{m}{n}$ de $\cos(2\sin^{-1} x) = \frac{1}{9}$, où m, n sont des entiers naturels premiers entre eux. Soient α, β , avec $\alpha > \beta$, les racines de $mx^2 - nx - m + n = 0$. Alors le point (α, β) appartient à la droite :

- (A) $3x - 2y = -2$ (B) $3x + 2y = 2$ (C) $5x + 8y = 9$ (D) $5x - 8y = -9$

PROBLÈME 021

En utilisant uniquement les valeurs principales des fonctions trigonométriques réciproques, le nombre de valeurs réelles strictement positives de x vérifiant $\tan^{-1}(x) + \tan^{-1}(2x) = \frac{\pi}{4}$ vaut :

- (A) plus de 2
(B) 2
(C) 0
(D) 1

PROBLÈME 022

Si le domaine de définition de la fonction $f(x) = \log_e(4x^2 + 11x + 6) + \sin^{-1}(4x + 3) + \cos^{-1}\left(\frac{10x+6}{3}\right)$ est $(\alpha, \beta]$, alors $36|\alpha + \beta|$ vaut :

- (A) 72 (B) 54 (C) 45 (D) 63

PROBLÈME 023

On considère $S = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1 \text{ et } 2\tan^{-1}(\frac{1-x}{1+x}) = \cos^{-1}(\frac{1-x^2}{1+x^2})\}$. Si $n(S)$ désigne le nombre d'éléments de S , alors :

- (A) $n(S) = 0$
- (B) $n(S) = 2$ et un seul élément de S est inférieur à $\frac{1}{2}$.
- (C) $n(S) = 1$ et l'élément de S est supérieur à $\frac{1}{2}$.
- (D) $n(S) = 1$ et l'élément de S est inférieur à $\frac{1}{2}$.

PROBLÈME 024

On considère S l'ensemble des solutions de l'équation

$\cos^{-1}(2x) - 2\cos^{-1}(\sqrt{1-x^2}) = \pi, x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Alors $\sum_{x \in S} 2\sin^{-1}(x^2 - 1)$ vaut :

- (A) $\pi - 2\sin^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{4})$
- (B) $\pi - \sin^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{4})$
- (C) $-\frac{2\pi}{3}$
- (D) 0

PROBLÈME 025

On considère $]a, b[\subset (0, 2\pi)$ le plus grand intervalle sur lequel

$\sin^{-1}(\sin \theta) - \cos^{-1}(\sin \theta) > 0, \theta \in (0, 2\pi)$ est vraie. Si

$\alpha x^2 + \beta x + \sin^{-1}(x^2 - 6x + 10) + \cos^{-1}(x^2 - 6x + 10) = 0$ et $\alpha - \beta = b - a$, alors α vaut :

- (A) $\frac{\pi}{16}$
- (B) $\frac{\pi}{48}$
- (C) $\frac{\pi}{8}$
- (D) $\frac{\pi}{12}$

PROBLÈME 026

Si $\sin^{-1}\frac{\alpha}{17} + \cos^{-1}\frac{4}{5} - \tan^{-1}\frac{77}{36} = 0, 0 < \alpha < 13$, alors $\sin^{-1}(\sin \alpha) + \cos^{-1}(\cos \alpha)$ vaut :

- (A) 16
- (B) π
- (C) $16 - 5\pi$
- (D) 0

PROBLÈME 027

$\tan^{-1}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}\right) + \sec^{-1}\left(\sqrt{\frac{8+4\sqrt{3}}{6+3\sqrt{3}}}\right)$ vaut :

- (A) $\frac{\pi}{2}$
- (B) $\frac{\pi}{3}$
- (C) $\frac{\pi}{6}$
- (D) $\frac{\pi}{4}$

PROBLÈME 028

Le domaine de définition de la fonction $f(x) = \sin^{-1}\left(\frac{x^2-3x+2}{x^2+2x+7}\right)$ est :

- (A) $[1, \infty)$
- (B) $[-1, 2]$
- (C) $[-1, \infty)$
- (D) $(-\infty, 2]$

PROBLÈME 029

La somme du maximum global et du minimum global de la fonction $f(x) = \tan^{-1}(\sin x - \cos x)$ sur l'intervalle $[0, \pi]$ est :

- (A) 0
- (B) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{\pi}{4}$
- (C) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{\pi}{4}$
- (D) $-\frac{\pi}{12}$

PROBLÈME 030

En utilisant uniquement les valeurs principales des fonctions trigonométriques réciproques, le domaine de définition de la fonction $f(x) = \cos^{-1}\left(\frac{x^2-4x+2}{x^2+3}\right)$ est :

- (A) $(-\infty, \frac{1}{4}]$ (B) $[-\frac{1}{4}, \infty)$
(C) $(-1/3, \infty)$ (D) $(-\infty, \frac{1}{3}]$

PROBLÈME 031

En utilisant les valeurs principales des fonctions trigonométriques réciproques, la somme des solutions de l'équation $\cos^{-1}(x) - 2\sin^{-1}(x) = \cos^{-1}(2x)$ vaut :

- (A) 0 (B) 1 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $-\frac{1}{2}$

PROBLÈME 032

Le domaine de définition de la fonction $f(x) = \sin^{-1}[2x^2 - 3] + \log_2\left(\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x + 5)\right)$, où $[t]$ désigne la partie entière de t , vaut :

- (A) $\left(-\sqrt{\frac{5}{2}}, \frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)$ (B) $\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}, \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$
(C) $\left(1, \frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)$ (D) $\left[1, \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$

PROBLÈME 033

Si $0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\frac{\sin^{-1}x}{\alpha} = \frac{\cos^{-1}x}{\beta}$, alors $\sin\left(\frac{2\pi\alpha}{\alpha+\beta}\right)$ vaut :

- (A) $4\sqrt{(1-x^2)}(1-2x^2)$ (B) $4x\sqrt{(1-x^2)}(1-2x^2)$
(C) $2x\sqrt{(1-x^2)}(1-4x^2)$ (D) $4\sqrt{(1-x^2)}(1-4x^2)$

PROBLÈME 034

$\tan\left(2\tan^{-1}\frac{1}{5} + \sec^{-1}\frac{\sqrt{5}}{2} + 2\tan^{-1}\frac{1}{8}\right)$ vaut :

- (A) 1 (B) 2 (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{5}{4}$

PROBLÈME 035

Soient m et M les valeurs minimale et maximale de $f(x) = \sin^{-1}2x + \sin 2x + \cos^{-1}2x + \cos 2x$, $x \in [0, \frac{\pi}{8}]$. Alors $m + M$ vaut :

- (A) $1 + \sqrt{2} + \pi$ (B) $(1 + \sqrt{2})\pi$
(C) $\pi + \sqrt{2}$ (D) $1 + \pi$

PROBLÈME 036

On considère $\alpha = \tan\left(\frac{5\pi}{16} \sin\left(2\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right)\right)$ et $\beta = \cos\left(\sin^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) + \sec^{-1}\left(\frac{5}{3}\right)\right)$ les fonctions trigonométriques réciproques étant prises en valeurs principales. Alors l'équation dont les racines sont α et β est :

- (A) $15x^2 - 8x - 7 = 0$ (B) $5x^2 - 12x + 7 = 0$
(C) $25x^2 - 18x - 7 = 0$ (D) $25x^2 - 32x + 7 = 0$

PROBLÈME 037

Le domaine de définition de la fonction $\cos^{-1} \left(\frac{2\sin^{-1} \left(\frac{1}{4x^2-1} \right)}{\pi} \right)$ est :

- (A) $\mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\}$
 (B) $(-\infty, -1] \cup [1, \infty) \cup \{0\}$
 (C) $(-\infty, \frac{-1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \infty) \cup \{0\}$
 (D) $(-\infty, \frac{-1}{\sqrt{2}}] \cup [\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty) \cup \{0\}$

PROBLÈME 038

La valeur de $\cot \left(\sum_{n=1}^{50} \tan^{-1} \left(\frac{1}{1+n+n^2} \right) \right)$ est :

- (A) $\frac{26}{25}$ (B) $\frac{25}{26}$ (C) $\frac{50}{51}$ (D) $\frac{52}{51}$

PROBLÈME 039

$\sin^{-1} \left(\sin \frac{2\pi}{3} \right) + \cos^{-1} \left(\cos \frac{7\pi}{6} \right) + \tan^{-1} \left(\tan \frac{3\pi}{4} \right)$ vaut :

- (A) $\frac{11\pi}{12}$ (B) $\frac{17\pi}{12}$
 (C) $\frac{31\pi}{12}$ (D) $-\frac{3\pi}{4}$

PROBLÈME 040

Si les fonctions trigonométriques réciproques sont prises en valeurs principales, alors

$\cos^{-1} \left(\frac{3}{10} \cos \left(\tan^{-1} \left(\frac{4}{3} \right) \right) + \frac{2}{5} \sin \left(\tan^{-1} \left(\frac{4}{3} \right) \right) \right)$ vaut :

- (A) 0 (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{6}$

PROBLÈME 041

La valeur de $\tan^{-1} \left(\frac{\cos \left(\frac{15\pi}{4} \right) - 1}{\sin \left(\frac{\pi}{4} \right)} \right)$ vaut :

- (A) $-\frac{\pi}{4}$ (B) $-\frac{\pi}{8}$ (C) $-\frac{5\pi}{12}$ (D) $-\frac{4\pi}{9}$

PROBLÈME 042

On considère $x * y = x^2 + y^3$ et $(x * 1) * 1 = x * (1 * 1)$. Alors une valeur de $2\sin^{-1} \left(\frac{x^4 + x^2 - 2}{x^4 + x^2 + 2} \right)$ est :

- (A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) $\frac{\pi}{6}$

PROBLÈME 043

L'ensemble des valeurs de k pour lesquelles $(\tan^{-1} x)^3 + (\cot^{-1} x)^3 = k\pi^3$, $x \in \mathbb{R}$ est l'intervalle:

- (A) $\left[\frac{1}{32}, \frac{7}{8} \right)$ (B) $\left(\frac{1}{24}, \frac{13}{16} \right)$
 (C) $\left[\frac{1}{48}, \frac{13}{16} \right]$ (D) $\left[\frac{1}{32}, \frac{9}{8} \right)$

PROBLÈME 044

Le domaine de définition de la fonction $f(x) = \frac{\cos^{-1}\left(\frac{x^2-5x+6}{x^2-9}\right)}{\log_e(x^2-3x+2)}$ est :

- (A) $(-\infty, 1) \cup (2, \infty)$
- (B) $(2, \infty)$
- (C) $\left[-\frac{1}{2}, 1\right) \cup (2, \infty)$
- (D) $\left[-\frac{1}{2}, 1\right) \cup (2, \infty) - \left\{3, \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right\}$

PROBLÈME 045

$\cos^{-1}(\cos(-5)) + \sin^{-1}(\sin(6)) - \tan^{-1}(\tan(12))$ vaut, en utilisant les valeurs principales des fonctions trigonométriques réciproques :

- (A) $3\pi - 11$
- (B) $4\pi - 9$
- (C) $4\pi - 11$
- (D) $3\pi + 1$

PROBLÈME 046

Le domaine de définition de la fonction $f(x) = \sin^{-1}\left(\frac{3x^2+x-1}{(x-1)^2}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ est :

- (A) $\left[0, \frac{1}{4}\right]$
- (B) $[-2, 0] \cup \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$
- (C) $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \cup \{0\}$
- (D) $\left[0, \frac{1}{2}\right]$

PROBLÈME 047

Soient M et m les valeurs maximale et minimale de $f(x) = \tan^{-1}(\sin x + \cos x)$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Alors $\tan(M - m)$ vaut :

- (A) $2 + \sqrt{3}$
- (B) $2 - \sqrt{3}$
- (C) $3 + 2\sqrt{2}$
- (D) $3 - 2\sqrt{2}$

PROBLÈME 048

Si $(\sin^{-1}x)^2 - (\cos^{-1}x)^2 = a$; $0 < x < 1$, $a \neq 0$, alors la valeur de $2x^2 - 1$ vaut :

- (A) $\cos\left(\frac{4a}{\pi}\right)$
- (B) $\sin\left(\frac{2a}{\pi}\right)$
- (C) $\cos\left(\frac{2a}{\pi}\right)$
- (D) $\sin\left(\frac{4a}{\pi}\right)$

PROBLÈME 049

Le domaine de définition de la fonction $\operatorname{cosec}^{-1}\left(\frac{1+x}{x}\right)$ est :

- (A) $(-1, -\frac{1}{2}] \cup (0, \infty)$
- (B) $[-\frac{1}{2}, 0) \cup [1, \infty)$
- (C) $(-\frac{1}{2}, \infty) - \{0\}$
- (D) $[-\frac{1}{2}, \infty) - \{0\}$

PROBLÈME 050

Si $\sum_{r=1}^{50} \tan^{-1} \frac{1}{2r^2} = p$, alors $\tan p$ vaut :

- (A) $\frac{101}{102}$
- (B) $\frac{50}{51}$
- (C) 100
- (D) $\frac{51}{50}$

PROBLÈME 051

Si le domaine de définition de la fonction $f(x) = \frac{\cos^{-1}\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{\sin^{-1}\left(\frac{2x-1}{2}\right)}}$ est l'intervalle $(\alpha, \beta]$, alors $\alpha + \beta$ vaut :

- (A) $\frac{3}{2}$ (B) 2 (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1

PROBLÈME 052

La valeur de $\tan\left(2\tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) + \sin^{-1}\left(\frac{5}{13}\right)\right)$ vaut :

- (A) $-\frac{181}{69}$ (B) $\frac{220}{21}$ (C) $-\frac{291}{76}$ (D) $\frac{151}{63}$

PROBLÈME 053

Le nombre de racines réelles de l'équation $\tan^{-1}\sqrt{x(x+1)} + \sin^{-1}\sqrt{x^2+x+1} = \frac{\pi}{4}$ vaut :

- (A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 0

PROBLÈME 054

Combien l'équation $\sin^{-1}\left[x^2 + \frac{1}{3}\right] + \cos^{-1}\left[x^2 - \frac{2}{3}\right] = x^2$ admet-elle de solutions pour $x \in [-1, 1]$? Ici, $[t]$ désigne le plus grand entier inférieur ou égal à t .

- (A) 0
(B) une infinité
(C) 2
(D) 4

PROBLÈME 055

La somme des valeurs possibles de x vérifiant $\tan^{-1}(x+1) + \cot^{-1}\left(\frac{1}{x-1}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{8}{31}\right)$ vaut :

- (A) $-\frac{32}{4}$ (B) $-\frac{33}{4}$
(C) $-\frac{31}{4}$ (D) $-\frac{30}{4}$

PROBLÈME 056

Si $\cot^{-1}\alpha = \cot^{-1}2 + \cot^{-1}8 + \cot^{-1}18 + \cot^{-1}32 + \dots$, où la somme comporte 100 termes, alors α vaut :

- (A) 1.02 (B) 1.03 (C) 1.01 (D) 1.00

PROBLÈME 057

Les fonctions trigonométriques réciproques sont prises en valeurs principales. Alors le nombre de réels x vérifiant $\sin^{-1}\left(\frac{3x}{5}\right) + \sin^{-1}\left(\frac{4x}{5}\right) = \sin^{-1}x$ vaut :

- (A) 2 (B) 0 (C) 3 (D) 1

PROBLÈME 058

Si $0 < a, b < 1$ et $\tan^{-1}a + \tan^{-1}b = \frac{\pi}{4}$, alors la série $(a+b) - \frac{a^2+b^2}{2} + \frac{a^3+b^3}{3} - \frac{a^4+b^4}{4} + \dots$ a pour somme :

- (A) $\log_e 2$ (B) e
(C) $\log_e\left(\frac{e}{2}\right)$ (D) $e^2 - 1$

PROBLÈME 059

Si $\frac{\sin^{-1}x}{a} = \frac{\cos^{-1}x}{b} = \frac{\tan^{-1}y}{c}$, avec $0 < x < 1$, alors $\cos(\frac{\pi c}{a+b})$ vaut :

- (A) $\frac{1-y^2}{2y}$ (B) $\frac{1-y^2}{y\sqrt{y}}$ (C) $1-y^2$ (D) $\frac{1-y^2}{1+y^2}$

PROBLÈME 060

$\operatorname{cosec} [2\cot^{-1}(5) + \cos^{-1}(\frac{4}{5})]$ vaut :

- (A) $\frac{75}{56}$ (B) $\frac{65}{56}$ (C) $\frac{56}{33}$ (D) $\frac{65}{33}$

PROBLÈME 061

Une valeur possible de $\tan\left(\frac{1}{4}\sin^{-1}\frac{\sqrt{63}}{8}\right)$ est :

- (A) $\sqrt{7}-1$ (B) $\frac{1}{\sqrt{7}}$ (C) $2\sqrt{2}-1$ (D) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$

PROBLÈME 062

Si S est la somme des dix premiers termes de la série

$\tan^{-1}(\frac{1}{3}) + \tan^{-1}(\frac{1}{7}) + \tan^{-1}(\frac{1}{13}) + \tan^{-1}(\frac{1}{21}) + \dots$ alors $\tan(S)$ vaut :

- (A) $\frac{10}{11}$ (B) $\frac{5}{11}$ (C) $-\frac{6}{5}$ (D) $\frac{5}{6}$

PROBLÈME 063

$2\pi - (\sin^{-1}\frac{4}{5} + \sin^{-1}\frac{5}{13} + \sin^{-1}\frac{16}{65})$ vaut :

- (A) $\frac{7\pi}{4}$ (B) $\frac{5\pi}{4}$ (C) $\frac{3\pi}{2}$ (D) $\frac{\pi}{2}$

PROBLÈME 064

Le domaine de définition de $f(x) = \sin^{-1}(\frac{|x|+5}{x^2+1})$ est $] -\infty, -a] \cup [a, +\infty[$. Alors a vaut :

- (A) $\frac{\sqrt{17}-1}{2}$ (B) $\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{17}}{2} + 1$ (D) $\frac{\sqrt{17}}{2}$

PROBLÈME 065

La valeur de $\sin^{-1}(\frac{12}{13}) - \sin^{-1}(\frac{3}{5})$ vaut :

- (A) $\pi - \sin^{-1}(\frac{63}{65})$ (B) $\frac{\pi}{2} - \sin^{-1}(\frac{56}{65})$
(C) $\frac{\pi}{2} - \cos^{-1}(\frac{9}{65})$ (D) $\pi - \cos^{-1}(\frac{33}{65})$

PROBLÈME 066

Si $\cos^{-1}x - \cos^{-1}(\frac{y}{2}) = \alpha$, avec $-1 \leq x \leq 1$, $-2 \leq y \leq 2$ et $x \leq \frac{y}{2}$, alors, pour tous ces x, y, l'expression $4x^2 - 4xycos\alpha + y^2$ vaut :

- (A) $4\sin^2\alpha$
(B) $2\sin^2\alpha$
(C) $4\sin^2\alpha - 2x^2y^2$
(D) $4\cos^2\alpha + 2x^2y^2$

PROBLÈME 067

Si $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$, $\beta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ où $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$, alors $\alpha - \beta$ vaut :

- (A) $\tan^{-1}\left(\frac{9}{14}\right)$ (B) $\sin^{-1}\left(\frac{9}{5\sqrt{10}}\right)$
 (C) $\cos^{-1}\left(\frac{9}{5\sqrt{10}}\right)$ (D) $\tan^{-1}\left(\frac{9}{5\sqrt{10}}\right)$

PROBLÈME 068

En utilisant les valeurs principales des fonctions réciproques, l'ensemble $A = \{x \geq 0 : \tan^{-1}(2x) + \tan^{-1}(3x) = \frac{\pi}{4}\}$:

- (A) contient deux éléments ;
 (B) contient plus de deux éléments ;
 (C) est vide ;
 (D) est un singleton.

PROBLÈME 069

Tous les réels x vérifiant $(\cot^{-1}x)^2 - 7\cot^{-1}x + 10 > 0$ appartiennent à l'intervalle :

- (A) $(\cot 2, \infty)$
 (B) $(-\infty, \cot 5) \cup (\cot 2, \infty)$
 (C) $(\cot 5, \cot 4)$
 (D) $(-\infty, \cot 5) \cup (\cot 4, \cot 2)$

PROBLÈME 070

La valeur de $\cot\left(\sum_{n=1}^{19} \cot^{-1}\left(1 + \sum_{p=1}^n 2p\right)\right)$ est :

- (A) $\frac{22}{23}$ (B) $\frac{23}{22}$ (C) $\frac{21}{19}$ (D) $\frac{19}{21}$

PROBLÈME 071

Si $x = \sin^{-1}(\sin 10)$ et $y = \cos^{-1}(\cos 10)$, alors $y - x$ vaut :

- (A) 0 (B) 10 (C) 7π (D) π

PROBLÈME 072

Si $\cos^{-1}\left(\frac{2}{3x}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{3}{4x}\right) = \frac{\pi}{2}$ ($x > \frac{3}{4}$), alors x vaut :

- (A) $\frac{\sqrt{145}}{10}$ (B) $\frac{\sqrt{145}}{11}$ (C) $\frac{\sqrt{145}}{12}$ (D) $\frac{\sqrt{146}}{12}$

PROBLÈME 073

Une valeur de x vérifiant $\sin(\cot^{-1}(1+x)) = \cos(\tan^{-1}x)$ est :

- (A) $-\frac{1}{2}$ (B) -1 (C) 0 (D) $\frac{1}{2}$

PROBLÈME 074

Pour $|x| < \frac{1}{2}$ et $x \neq 0$, la valeur de $\tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}} \right)$ est :

- (A) $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cos^{-1} x^2$ (B) $\frac{\pi}{4} + \cos^{-1} x^2$
 (C) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \cos^{-1} x^2$ (D) $\frac{\pi}{4} - \cos^{-1} x^2$

PROBLÈME 075

On considère $\tan^{-1} y = \tan^{-1} x + \tan^{-1} \left(\frac{2x}{1-x^2} \right)$, où $|x| < \frac{1}{\sqrt{3}}$. Alors une valeur de y est :

- (A) $\frac{3x-x^3}{1+3x^2}$ (B) $\frac{3x+x^3}{1+3x^2}$
 (C) $\frac{3x-x^3}{1-3x^2}$ (D) $\frac{3x+x^3}{1-3x^2}$

PROBLÈME 076

Si x, y, z sont en progression arithmétique et $\tan^{-1} x, \tan^{-1} y$ et $\tan^{-1} z$ sont aussi en progression arithmétique, alors :

- (A) $x = y = z$ (B) $2x = 3y = 6z$ (C) $6x = 3y = 2z$ (D) $6x = 4y = 3z$

PROBLÈME 077

La valeur de $\cot \left(\cos^{-1} \frac{5}{3} + \tan^{-1} \frac{2}{3} \right)$ est :

- (A) $\frac{6}{17}$ (B) $\frac{3}{17}$ (C) $\frac{4}{17}$ (D) $\frac{5}{17}$

PROBLÈME 078

Si $\sin^{-1} \left(\frac{x}{5} \right) + \operatorname{cosec}^{-1} \left(\frac{5}{4} \right) = \frac{\pi}{2}$, alors x vaut :

- (A) 4 (B) 5 (C) 1 (D) 3

PROBLÈME 079

Si $\cos^{-1} x - \cos^{-1} \frac{y}{2} = \alpha$, alors $4x^2 - 4xy \cos \alpha + y^2$ vaut :

- (A) $2 \sin 2\alpha$ (B) 4 (C) $4 \sin^2 \alpha$ (D) $-4 \sin^2 \alpha$

PROBLÈME 080

L'équation trigonométrique $\sin^{-1} x = 2 \sin^{-1} a$ admet une solution pour :

- (A) $|a| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$
 (B) $\frac{1}{2} < |a| < \frac{1}{\sqrt{2}}$
 (C) toute valeur réelle de a
 (D) $|a| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$

PROBLÈME 081

$\cot^{-1} (\sqrt{\cos \alpha}) - \tan^{-1} (\sqrt{\cos \alpha}) = x$, alors $\sin x$ vaut :

- (A) $\tan^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right)$ (B) $\cot^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right)$
 (C) $\tan \alpha$ (D) $\cot \left(\frac{\alpha}{2} \right)$

Réponses numériques

PROBLÈME 082

Si $\frac{\pi}{4} + \sum_{p=1}^{11} \tan^{-1} \left(\frac{2^{p-1}}{1+2^{2p-1}} \right) = \alpha$, alors $\tan \alpha$ vaut ____.

PROBLÈME 083

Si $k = \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cos^{-1} \left(\frac{2}{3} \right) \right) + \tan \left(\frac{1}{2} \sin^{-1} \left(\frac{2}{3} \right) \right)$, alors le nombre de solutions de l'équation $\sin^{-1}(kx - 1) = \sin^{-1} x - \cos^{-1} x$ est ____.

PROBLÈME 084

La valeur maximale de $(\sin^{-1} x)^2 + (\cos^{-1} x)^2$ pour $x \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right]$ est $\frac{m}{n} \pi^2$, où $\gcd(m, n) = 1$. Alors $m + n$ vaut ____.

PROBLÈME 085

Si $y = \cos \left(\frac{\pi}{3} + \cos^{-1} \frac{x}{2} \right)$, alors $(x - y)^2 + 3y^2$ vaut ____.

PROBLÈME 086

On considère $S = \{x : \cos^{-1} x = \pi + \sin^{-1} x + \sin^{-1}(2x + 1)\}$. Alors $\sum_{x \in S} (2x - 1)^2$ vaut ____.

PROBLÈME 087

Si, pour certains $\alpha, \beta; \alpha \leq \beta, \alpha + \beta = 8$ et $\sec^2(\tan^{-1} \alpha) + \operatorname{cosec}^2(\cot^{-1} \beta) = 36$, alors $\alpha^2 + \beta$ vaut ____.

PROBLÈME 088

Les fonctions trigonométriques réciproques sont prises en valeurs principales. Le nombre de solutions réelles de l'équation $2 \sin^{-1} x + 3 \cos^{-1} x = \frac{2\pi}{5}$ vaut ____.

PROBLÈME 089

Pour $n \in \mathbb{N}$, si $\cot^{-1} 3 + \cot^{-1} 4 + \cot^{-1} 5 + \cot^{-1} n = \frac{\pi}{4}$, alors n vaut ____.

PROBLÈME 090

Pour $x \in (-1, 1]$, le nombre de solutions de l'équation $\sin^{-1} x = 2 \tan^{-1} x$ vaut ____.

PROBLÈME 091

Si $S = \left\{ x \in \mathbb{R} : \sin^{-1} \left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} \right) - \sin^{-1} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right) = \frac{\pi}{4} \right\}$, alors $\sum_{x \in S} \left(\sin \left((x^2 + x + 5) \frac{\pi}{2} \right) - \cos \left((x^2 + x + 5) \pi \right) \right)$ vaut ____.

PROBLÈME 092

Si le domaine de définition de la fonction $f(x) = \sec^{-1} \left(\frac{2x}{5x+3} \right)$ est $[\alpha, \beta) \cup (\gamma, \delta]$, alors $|3\alpha + 10(\beta + \gamma) + 21\delta|$ vaut ____.

PROBLÈME 093

Si la somme de toutes les solutions de $\tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) + \cot^{-1}\left(\frac{1-x^2}{2x}\right) = \frac{\pi}{3}$, $-1 < x < 1$, $x \neq 0$, est $\alpha - \frac{4}{\sqrt{3}}$, alors α vaut _____.

PROBLÈME 094

Pour $k \in \mathbb{R}$, soient α, β les solutions de $\cos(\sin^{-1}(x \cot(\tan^{-1}(\cos(\sin^{-1}x)))) = k$, avec $0 < |x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$, les fonctions réciproques étant prises en valeurs principales. Si les racines de $x^2 - bx - 5 = 0$ sont $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$ et $\frac{\alpha}{\beta}$, calculer $\frac{b}{k^2}$.

PROBLÈME 095

On considère $x = \sin(2\tan^{-1}\alpha)$ et $y = \sin\left(\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{4}{3}\right)$. Si $S = \{\alpha \in \mathbb{R} : y^2 = 1 - x\}$, alors $\sum_{\alpha \in S} 16\alpha^3$ vaut _____.

PROBLÈME 096

$50 \tan\left(3\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + 2\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right) + 4\sqrt{2} \tan\left(\frac{1}{2}\tan^{-1}(2\sqrt{2})\right)$ vaut _____.

Plusieurs bonnes réponses

PROBLÈME 097

Soient $a_1 = 1, a_2, a_3, a_4, \dots$ des entiers naturels consécutifs. Alors $\tan^{-1}\left(\frac{1}{1+a_1a_2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{1+a_2a_3}\right) + \dots + \tan^{-1}\left(\frac{1}{1+a_{2021}a_{2022}}\right)$ vaut :

- (A) $\frac{\pi}{4} - \cot^{-1}(2022)$ (B) $\frac{\pi}{4} - \tan^{-1}(2022)$ (C) $\cot^{-1}(2022) - \frac{\pi}{4}$ (D) $\tan^{-1}(2022) - \frac{\pi}{4}$

Grille des réponses

Réponses reprises du document fourni. « — » : réponse non précisée.

1	A	21	D	41	B	61	B	81	A
2	A	22	C	42	B	62	D	82	2048
3	B	23	D	43	A	63	C	83	1
4	A	24	D	44	D	64	B	84	65
5	A	25	D	45	C	65	B	85	3
6	D	26	B	46	C	66	A	86	5
7	C	27	B	47	D	67	B	87	14
8	C	28	C	48	B	68	D	88	0
9	C	29	C	49	D	69	A	89	47
10	C	30	B	50	B	70	C	90	2
11	A	31	A	51	A	71	D	91	4
12	D	32	C	52	B	72	C	92	24
13	C	33	B	53	D	73	A	93	2
14	D	34	B	54	A	74	A	94	12
15	C	35	A	55	A	75	C	95	130
16	A	36	C	56	C	76	A	96	29
17	C	37	D	57	C	77	A	97	A, D
18	C	38	A	58	A	78	D		
19	B	39	A	59	D	79	C		
20	C	40	C	60	B	80	D		