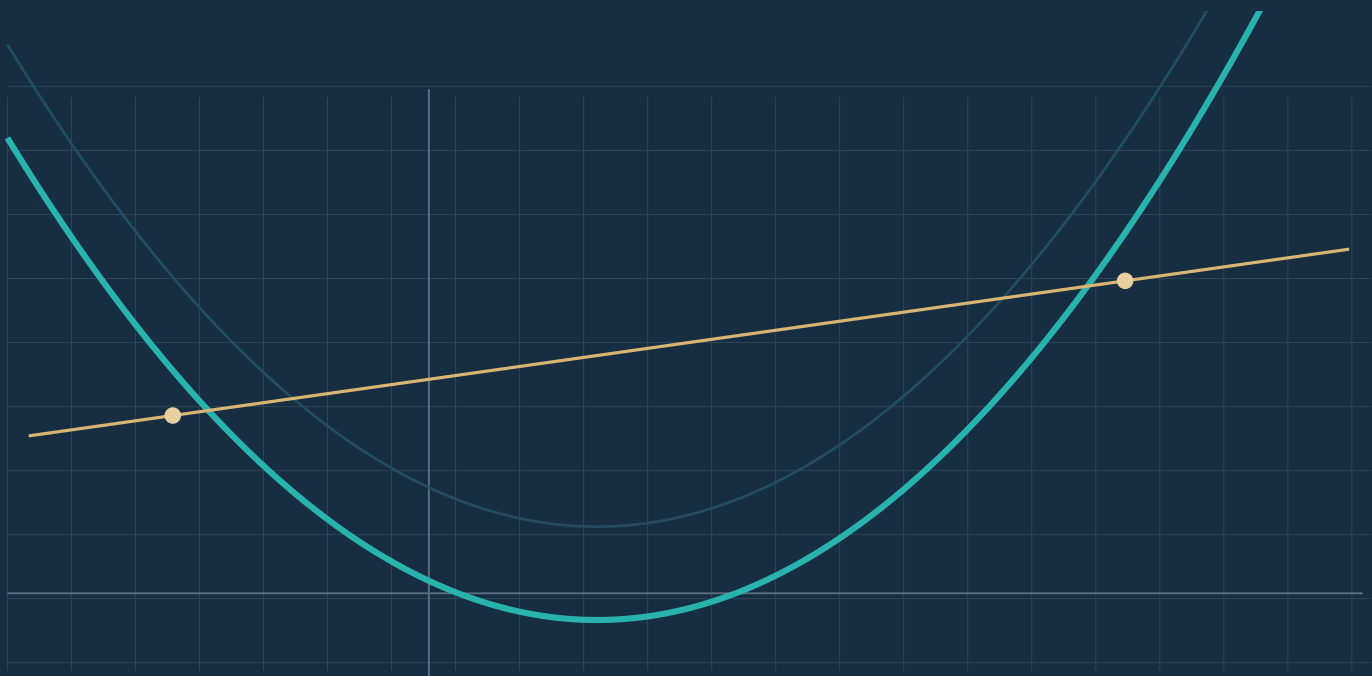


Astuces mathématiques

Comprendre la structure. Simplifier le calcul.



27

FICHES DE MÉTHODE

Raisonnements et exemples

12

EXERCICES CORRIGÉS

Entraînement supplémentaire

LYCÉE AVANCÉ & APPROFONDISSEMENT

Algèbre • Géométrie • Analyse • Arithmétique

Des idées claires, des méthodes qui restent.

Votre parcours de révision

Comprendre la structure avant de calculer.

Ce livret adapte en français les méthodes et les exemples mathématiques exploitables de la transcription fournie. Les explications sont réorganisées, les calculs vérifiés et les passages promotionnels écartés.

● **COMMENT LIRE UNE FICHE**

Repérez la forme de l'expression, vérifiez les hypothèses, puis suivez le calcul. Cachez ensuite la solution et refaites l'exemple seul.

Parcours	Pages
Polynômes, récurrences et valeurs extrêmes	3-6
Relations, suites, sommes et statistiques	7-12
Droites, cercles et systèmes linéaires	13-17
Binôme et calcul des restes	18-20
Paraboles, dérivation et vecteurs	21-25
Primitives et trigonométrie	26-29
Entraînement, corrigés et synthèse	30-34

Trois niveaux de lecture

Les premières fiches mobilisent surtout l'algèbre du lycée. Les séries infinies, les congruences, le rang d'une matrice et les exponentielles complexes relèvent d'un approfondissement. Ce recueil ne prétend pas correspondre intégralement à un programme scolaire particulier.

Transparence sur le document de départ

La transcription automatique ne contient pas les tableaux et figures affichés dans la vidéo. Les énoncés récupérables sont conservés ; les reconstructions sont signalées. Les exercices de fin de livret et les exemples marqués « ajout pédagogique » sont nouveaux.

● **À VÉRIFIER**

Notations : angles en radians ; $\ln$ = logarithme népérien ; variance calculée avec le diviseur N . Une astuce est une conséquence d'un raisonnement, pas une règle à appliquer sans conditions.

Reconnaître un polynôme

Une différence bien choisie remplace un système.

Le problème de la transcription

Soit $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tel que $P(1) = 1$, $P(2) = 4$ et $P(3) = 9$. Calculer la limite suivante :

$$L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{P(x) - 1}{x - 1}$$

1 Chercher le modèle simple

Les valeurs 1, 4 et 9 sont celles du polynôme x^2 aux points 1, 2 et 3. On considère donc $Q(x) = P(x) - x^2$. Ce polynôme s'annule en 1, 2 et 3.

2 Utiliser le degré et le coefficient dominant

Comme Q est un polynôme unitaire de degré 3, ses trois racines imposent :

$$P(x) = x^2 + (x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

3 Simplifier avant de passer à la limite

$$\frac{P(x) - 1}{x - 1} = x + 1 + (x - 2)(x - 3) \quad (x \neq 1)$$

$$L = 2 + (-1)(-2) = 4$$

● LE RÉFLEXE

Si P et un modèle simple R ont les mêmes valeurs en plusieurs points, étudiez $P - R$. Les zéros connus se transforment en facteurs.

● NOTE DE LECTURE

Condition essentielle : le degré et le coefficient dominant doivent être connus. Avec seulement trois valeurs, un polynôme de degré quelconque n'est pas déterminé. La transcription corrige elle-même les facteurs en $(x - 1)$, $(x - 2)$, $(x - 3)$.

Réduire les puissances

Le reste sans effectuer toute la division.

Exemple A : reste de x^4 modulo $x^2 + x + 1$

On travaille avec des polynômes. Écrire $A \equiv B \pmod{D}$ signifie que D divise $A - B$. Puisque $(x-1)(x^2+x+1) = x^3 - 1$, on a :

$$\begin{aligned}x^3 &\equiv 1 \pmod{x^2 + x + 1} \\x^4 &= x x^3 \equiv x \pmod{x^2 + x + 1}\end{aligned}$$

Le polynôme x est de degré inférieur à 2 : c'est bien le reste recherché.

Exemple B : une somme de douze termes

Trouver le reste de $S(x) = 1 + x^4 + x^8 + \dots + x^{44}$ dans la division par $D(x) = 1 + x + x^2 + x^3$.

$$(x-1)D(x) = x^4 - 1 \implies x^4 \equiv 1 \pmod{D}$$

Chaque terme est donc congru à 1. Les exposants vont de 0 à 44, avec un pas de 4 : il y a $44/4 + 1 = 12$ termes.

$$S(x) \equiv 1 + 1 + \dots + 1 = 12 \pmod{D}$$

● MÉTHODE EN TROIS TEMPS

Relier le diviseur à une identité remarquable ; réduire les puissances ; vérifier que le degré du résultat est strictement inférieur à celui du diviseur.

● À VÉRIFIER

On ne suppose pas que x est une racine réelle du diviseur. Dire « poser le diviseur égal à zéro » est ici un raccourci oral pour un calcul de congruences polynomiales.

Des puissances à une récurrence

Éviter de calculer les racines.

L'énoncé

Les nombres α et β sont les racines de $x^2 - 5x - 7 = 0$. Pour tout entier $n \geq 0$, on pose $T_n = 3\alpha^n + 5\beta^n$. Calculer :

$$\frac{T_{2025} - 7T_{2023}}{T_{2024}}$$

La relation vient de l'équation des racines

Chaque racine u vérifie $u^2 = 5u + 7$. En multipliant par u^{n-2} , pour $n \geq 2$, on obtient $u^n = 5u^{n-1} + 7u^{n-2}$.

Cette relation reste vraie après multiplication par 3 ou 5 et addition. Ainsi :

$$\begin{aligned} T_n &= 5T_{n-1} + 7T_{n-2} \\ T_{2025} - 7T_{2023} &= 5T_{2024} \end{aligned}$$

$$\frac{T_{2025} - 7T_{2023}}{T_{2024}} = 5$$

Le dénominateur est strictement positif : les racines sont réelles et non nulles, 2024 est pair et les coefficients 3 et 5 sont positifs.

● FORME GÉNÉRALE

Si les racines vérifient $u^2 + bu + c = 0$, toute suite $V_n = A\alpha^n + B\beta^n$ vérifie $V_n + bV_{n-1} + cV_{n-2} = 0$, pour $n \geq 2$.

● À VÉRIFIER

Les poids A et B peuvent être différents. Ils ne modifient pas la récurrence. En revanche, il faut toujours vérifier qu'un quotient demandé possède un dénominateur non nul.

Encadrer un quotient symétrique

Deux carrés donnent les deux bornes.

Déterminer toutes les valeurs de la fonction

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 4}{x^2 + 3x + 4} \quad (x \in \mathbb{R})$$

Le dénominateur est toujours positif : $x^2 + 3x + 4 = (x + 3/2)^2 + 7/4$. Il est donc possible de comparer les quotients sans inverser les inégalités.

La borne inférieure

$$f(x) - \frac{1}{7} = \frac{6(x-2)^2}{7(x^2 + 3x + 4)} \geq 0$$

L'égalité a lieu pour $x = 2$, d'où $f(2) = 1/7$.

La borne supérieure

$$7 - f(x) = \frac{6(x+2)^2}{x^2 + 3x + 4} \geq 0$$

L'égalité a lieu pour $x = -2$, d'où $f(-2) = 7$. La fonction est continue ; elle prend toutes les valeurs entre ces deux extrêmes.

$$f(\mathbb{R}) = [1/7 ; 7]$$

● POURQUOI TESTER ± 2 ?

Les termes du second degré et constants s'équilibrent lorsque $x^2 = 4$. Plus généralement, pour $(ax^2 - bx + c)/(ax^2 + bx + c)$ avec $a, c > 0$ et $0 < |b| < 2\sqrt{ac}$, les extrêmes sont atteints en $x = \pm \sqrt{c/a}$.

● À VÉRIFIER

Ne généralisez pas à n'importe quel quotient de polynômes. Si le dénominateur peut s'annuler, la fonction peut devenir non bornée. Si $b = 0$, le quotient vaut simplement 1.

Compter les relations

Compter les choix libres dans une matrice.

Une relation sur un ensemble E de n éléments est une partie de $E \times E$. On peut la représenter par une matrice de n lignes et n colonnes : une case vaut 1 si le couple appartient à la relation, 0 sinon.

Une relation réflexive

Les n couples (a, a) doivent être présents. Les $n^2 - n$ autres couples sont libres : chacun offre deux choix indépendants.

$$N_{\text{réflexives}} = 2^{n^2 - n}$$

Une relation symétrique

La présence de (a, b) impose celle de (b, a) . Il reste n choix sur la diagonale et un choix pour chacune des $n(n-1)/2$ paires hors diagonale.

$$N_{\text{symétriques}} = 2^{n + n(n-1)/2} = 2^{n(n+1)/2}$$

Application de la transcription : $n = 6$

Type de relation	Nombre
Réflexive	$2^{36-6} = 2^{30}$
Symétrique	$2^{(36+6)/2} = 2^{21}$
Réflexive et symétrique (complément)	$2^{6 \times 5/2} = 2^{15}$

● LE TEST À FAIRE

Pour la symétrie, les deux cases situées de part et d'autre de la diagonale sont liées. Il ne faut pas les compter comme deux décisions indépendantes.

● À VÉRIFIER

Être à la fois réflexive et symétrique ne suffit pas pour être une relation d'équivalence : la transitivité est aussi nécessaire.

Le triangle des équivalences

Des partitions aux nombres de Bell.

Une relation d'équivalence découpe E en classes disjointes, non vides, dont la réunion est E. Compter ces relations revient donc à compter les partitions de l'ensemble.

Construire le tableau

On commence par 1. Chaque nouvelle ligne commence par le dernier nombre de la ligne précédente. Ensuite, on additionne le nombre écrit à gauche et celui placé au-dessus à gauche.

n	Col. 1	Col. 2	Col. 3	Col. 4	Col. 5	Col. 6	Bell
1	1						1
2	1	2					2
3	2	3	5				5
4	5	7	10	15			15
5	15	20	27	37	52		52
6	52	67	87	114	151	203	203

Application : six éléments

$$B_6 = 203$$

Il existe donc 203 relations d'équivalence sur un ensemble de six éléments. Par comparaison, les nombres de relations seulement réflexives ou seulement symétriques sont beaucoup plus grands.

● **COMPRENDRE SUR TROIS ÉLÉMENTS**

Sur {a, b, c}, les cinq partitions sont : {abc}, {a | bc}, {b | ac}, {c | ab}, {a | b | c}. Les barres séparent les classes.

● **À VÉRIFIER**

Dans le tableau affiché, le résultat est le dernier terme de chaque ligne. Il existe d'autres conventions d'indexation du triangle de Bell : ne mélangez pas les diagonales.

Suite linéaire, somme quadratique

Ne pas confondre un terme et une somme.

L'exemple : 3, 7, 11, 15, ...

La différence constante est 4. Le terme général est donc affine en n . En commençant l'indexation à $n = 1$, on écrit $u_n = 4n + b$. La condition $u_1 = 3$ donne $b = -1$.

$$u_n = 4n - 1$$

Trouver la somme des n premiers termes

Posons $S_n = u_1 + \dots + u_n$. La formule de la somme d'une suite arithmétique donne directement :

$$S_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n) = \frac{n}{2}(3 + 4n - 1)$$

$$S_n = 2n^2 + n$$

Autre lecture : déterminer les coefficients

Une somme de termes affines a la forme $S_n = An^2 + Bn$, avec $S_0 = 0$. Comme $S_1 = 3$ et $S_2 = 10$, on obtient $A + B = 3$ et $4A + 2B = 10$. D'où $A = 2$ et $B = 1$.

● LE CONTRÔLE RAPIDE

Le premier terme vaut 3, le deuxième vaut 7 et leur somme vaut 10. Vérifiez toujours la formule pour $n = 1$ et $n = 2$ avant de l'utiliser sur un grand indice.

● NOTE DE LECTURE

La transcription emploie une fois « terme général » pour le résultat $2n^2 + n$. Il s'agit bien de la somme S_n , et non du terme u_n . La différence $S_n - S_{n-1}$ redonne $4n - 1$.

Une somme qui se télescope

Produits d'entiers consécutifs.

Le problème

$$S = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + 12 \cdot 13 \cdot 14$$

Plutôt que développer chaque produit, on cherche une différence dont les termes intermédiaires vont se supprimer.

L'identité utile

$$r(r+1)(r+2) = \frac{F(r+1) - F(r)}{4}$$

Ici, $F(r) = (r-1)r(r+1)(r+2)$. En effet, on met $r(r+1)(r+2)$ en facteur ; il reste $(r+3) - (r-1) = 4$.

Additionner : seuls les bords subsistent

$$\sum_{r=1}^n r(r+1)(r+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

$$S = \frac{12 \times 13 \times 14 \times 15}{4} = 8190$$

● LA GÉNÉRALISATION

Pour un produit de k facteurs consécutifs commençant par r , la somme de $r = 1$ à n vaut le produit $n(n+1)\dots(n+k)$ divisé par $k+1$.

● À VÉRIFIER

Cette forme suppose que la somme commence à $r = 1$. Pour une autre borne de départ, retranchez la somme des termes qui précèdent. Un facteur manquant ou un décalage change la formule.

Reconnaître une série logarithmique

Un dénominateur r est un indice.

La somme proposée

$$S = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(1/7)^r}{r}$$

La formule à reconnaître

$$-\ln(1-t) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{t^r}{r} \quad (|t| < 1)$$

Pour comprendre cette identité, partez de la série géométrique $1/(1-t) = 1 + t + t^2 + \dots$ et intégrez entre 0 et t . L'intégration terme à terme est justifiée sur tout segment strictement intérieur à $] -1 ; 1[$.

Substituer $t = 1/7$

$$S = -\ln\left(1 - \frac{1}{7}\right) = \ln\left(\frac{7}{6}\right)$$

Estimer l'erreur d'une somme tronquée

Complément : pour $0 < t < 1$, si l'on garde les N premiers termes, la somme des termes oubliés est positive et vérifie :

$$0 < R_N \leq \frac{t^{N+1}}{(N+1)(1-t)}$$

● POUR ÉVITER LE PIÈGE DE SIGNE

La somme est positive, car tous ses termes le sont. Un résultat $\ln(6/7)$ serait négatif et ne pourrait donc pas convenir.

● À VÉRIFIER

Cette méthode utilise une série infinie. Elle est proposée comme approfondissement ; elle ne se réduit pas à une identité finie applicable sans condition de convergence.

La variance sans grands carrés

Translation et changement d'échelle.

Le modèle 1, 2, ..., n

Pour une série de n valeurs équipondérées, la variance est la moyenne des carrés moins le carré de la moyenne. Pour les n premiers entiers :

$$\bar{x} = \frac{n+1}{2}, \quad V = \frac{n^2-1}{12}$$

Passer à une suite arithmétique

Ajouter une constante à toutes les valeurs ne change pas la variance. Multiplier toutes les valeurs par d multiplie la variance par d^2 , et l'écart-type par $|d|$.

$$V(a, a+d, \dots, a+(n-1)d) = d^2 \frac{n^2-1}{12}$$

L'exemple : 5, 11, 17, ..., 59

Il y a dix valeurs, de raison 6. On peut les écrire $x_r = 6r - 1$ pour r allant de 1 à 10. La translation -1 ne contribue pas à la dispersion.

$$V = 6^2 \frac{10^2-1}{12} = 36 \frac{99}{12} = 297$$

$$\sigma = \sqrt{297} = 3\sqrt{33} \approx 17,23$$

● VÉRIFICATION

La moyenne vaut $(5+59)/2 = 32$. Les valeurs sont réparties symétriquement autour de 32. Attention : 297 est la variance, pas l'écart-type.

● NOTE DE LECTURE

Le diviseur utilisé est n . Avec une variance d'échantillon corrigée, le diviseur serait $n-1$ et la formule changerait. Le « 16 » isolé dans la transcription est corrigé en 17 pour respecter la suite de raison 6.

FICHE 11 / GÉOMÉTRIE

Deux réflexes pour les droites

Pente et rapport de partage.

A. Écrire une équation à partir de la pente

La transcription donne une pente $m = 6/(-4) = -3/2$ et le point $A(3 ; 4)$. Une équation a donc la forme $3x + 2y = c$. En remplaçant x et y par les coordonnées de A :

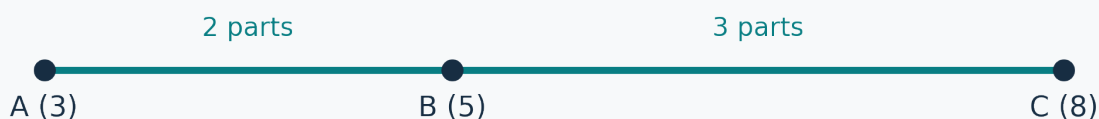
$$c = 3 \times 3 + 2 \times 4 = 17 \implies 3x + 2y = 17$$

Le point A et la pente suffisent : il n'est pas nécessaire de retrouver un second point. Pour une droite verticale, utilisez directement une équation $x = x_A$.

B. Lire un rapport avec les coordonnées

Si A , B et C sont alignés, avec B entre A et C , et si leurs abscisses valent 3, 5 et 8, alors :

$$\frac{AB}{BC} = \frac{|5 - 3|}{|8 - 5|} = \frac{2}{3}$$



Les variations d'abscisse sont proportionnelles aux longueurs sur une même droite non verticale. Le point B partage donc le segment $[AC]$ dans le rapport 2 : 3.

● FORMULE COHÉRENTE AVEC LE RAPPORT

On a $B = (3A + 2C)/5$, coordonnée par coordonnée. Le poids de A est 3 et celui de C est 2 : les poids sont associés aux segments opposés.

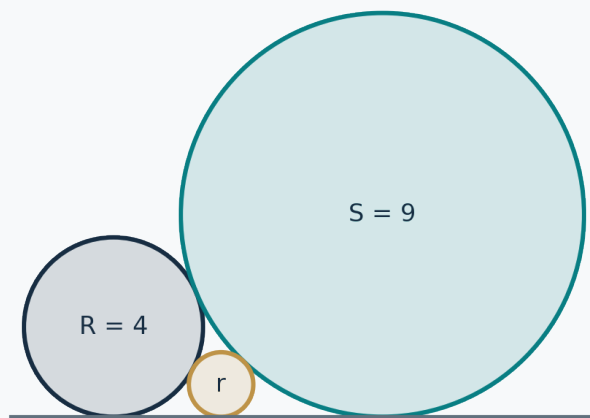
● À VÉRIFIER

Si les abscisses sont toutes égales, utilisez les ordonnées. Sans alignement, les seuls écarts d'abscisse ne permettent pas de déduire le rapport des distances.

Trois cercles sur une tangente

Une relation entre les racines des rayons.

Deux cercles de rayons R et S sont tangents extérieurement entre eux et à une même droite. Un troisième cercle, de rayon r , se place dans le petit espace entre eux et la droite, du même côté de celle-ci.



Mesurer les écarts horizontaux

Pour deux cercles tangents de rayons u et v posés sur la droite, la distance entre centres est $u + v$ et l'écart vertical vaut $|u - v|$. Le théorème de Pythagore donne un écart horizontal de $2\sqrt{uv}$.

$$2\sqrt{Rr} + 2\sqrt{Sr} = 2\sqrt{RS}$$

$$\frac{1}{\sqrt{r}} = \frac{1}{\sqrt{R}} + \frac{1}{\sqrt{S}}$$

Ajout pédagogique : $R = 4$ et $S = 9$

$$\frac{1}{\sqrt{r}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \implies r = \frac{36}{25}$$

● À VÉRIFIER

La configuration compte : r désigne ici le petit cercle situé entre les deux autres et la droite. Pour un cercle tangent placé à l'extérieur, la relation peut faire intervenir une différence.

FICHE 13 / GÉOMÉTRIE

Un module devient un cercle

Le cercle d'Apollonius.

L'exemple de la transcription

$$\frac{|z-2|}{|z-7|} = 5 \quad (z \neq 7)$$

Les modules sont des distances : le point M d'affixe z est cinq fois plus éloigné de A(2 ; 0) que de B(7 ; 0). Le lieu est un cercle.

Trouver les deux extrémités d'un diamètre

Sur l'axe réel, les deux points qui partagent AB intérieurement et extérieurement dans le rapport 5 : 1 ont pour abscisses :

$$u = \frac{5 \times 7 + 2}{6} = \frac{37}{6}, \quad v = \frac{5 \times 7 - 2}{4} = \frac{33}{4}$$

Ces deux points sont les extrémités du diamètre situé sur la droite (AB). Le centre est leur milieu et le rayon la moitié de leur distance.

$$c = \frac{173}{24}, \quad r = \frac{25}{24}$$

$$\left(x - \frac{173}{24}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{25}{24}\right)^2$$

Autre forme, utilisée dans la transcription : $(x - 37/6)(x - 33/4) + y^2 = 0$.

● FORMULE GÉNÉRALE

Pour $|z-a| = k|z-b|$, avec $a \neq b$, $k > 0$ et $k \neq 1$, le centre a pour affixe $(a - k^2b)/(1 - k^2)$ et le rayon vaut $k|a - b|/|1 - k^2|$.

● À VÉRIFIER

Si $k = 1$, le lieu est la médiatrice du segment joignant a et b : ce n'est plus un cercle. La formule des extrémités ne doit pas être utilisée avec un dénominateur nul.

Voir la dépendance des colonnes

Résoudre un système sans développer un déterminant.

● NOTE DE LECTURE

Exemple reconstitué : les valeurs orales permettent de retrouver la structure ci-dessous, mais la transcription ne reproduit pas intégralement le système affiché.

Chercher λ et μ pour une infinité de solutions

$$2x + 3y + 17z = 5$$

$$x + 4y + 16z = 5$$

$$3x + 5y + \lambda z = \mu$$

Notons C_1 , C_2 , C_3 les colonnes des coefficients. Les deux premières lignes suggèrent $C_3 = 4C_1 + 3C_2$, puisque $17 = 4 \times 2 + 3 \times 3$ et $16 = 4 \times 1 + 3 \times 4$.

$$\lambda = 4 \times 3 + 3 \times 5 = 27$$

Le second membre doit aussi être compatible. Les deux premières lignes donnent $5 = 2 + 3$ et $5 = 1 + 4$: il est égal à $C_1 + C_2$. La troisième composante impose donc :

$$\mu = 3 + 5 = 8$$

Vérifier et paramétrer

Le mineur $2 \times 4 - 3 \times 1 = 5$ est non nul : C_1 et C_2 sont indépendantes. Le système a donc exactement un paramètre libre.

$$z = t, \quad x = 1 - 4t, \quad y = 1 - 3t \quad (t \in \mathbb{R})$$

● CONDITION COMPLÈTE

Une infinité de solutions exige la compatibilité et un rang strictement inférieur au nombre d'inconnues. Un déterminant nul, à lui seul, ne garantit pas l'existence de solutions.

Des lignes en progression

La deuxième différence révèle une contrainte.

Le signal à repérer

Trois nombres a, b, c sont en progression arithmétique exactement lorsque $a - 2b + c = 0$. Cette même relation peut relier trois lignes d'une matrice.

$$L_1 - 2L_2 + L_3 = 0$$

Si cette relation est vraie pour les coefficients du système, elle doit aussi être vraie pour les seconds membres d_1, d_2, d_3 , sinon le système est incompatible.

$$d_1 - 2d_2 + d_3 = 0$$

La contrainte audible dans la transcription

Les seconds membres y conduisent au calcul suivant :

$$(\lambda - 1) - 2\lambda + (2 - \lambda) = 0$$

$$1 - 2\lambda = 0 \implies \lambda = \frac{1}{2}$$

Cette valeur est une condition nécessaire. Le système complet n'étant pas disponible dans le fichier texte, on ne peut pas vérifier à partir de cette seule transcription qu'elle est suffisante.

● COMMENT TERMINER SUR UN ÉNONCÉ COMPLET

Après avoir trouvé le paramètre, remplacez-le dans le système. Vérifiez la compatibilité des lignes et le nombre d'inconnues libres. Si deux lignes restent indépendantes dans un système à trois inconnues, il reste un paramètre.

● À VÉRIFIER

La structure arithmétique doit porter sur les coefficients des lignes entières. Quelques nombres en progression dans une seule colonne ne suffisent pas pour imposer la relation à tout le système.

Sommes pondérées du binôme

Décomposer les puissances en produits décroissants.

Le problème : calculer la somme suivante

$$S_n = \sum_{r=0}^n r^3 \binom{n}{r} \quad (n \geq 3)$$

Le poids r^3 est moins commode que les produits r , $r(r-1)$, $r(r-1)(r-2)$, qui s'accordent avec les coefficients binomiaux.

$$r^3 = r(r-1)(r-2) + 3r(r-1) + r$$

Trois identités utiles

$$\sum_{r=0}^n r \binom{n}{r} = n2^{n-1}$$

$$\sum_{r=0}^n r(r-1) \binom{n}{r} = n(n-1)2^{n-2}$$

$$\sum_{r=0}^n r(r-1)(r-2) \binom{n}{r} = n(n-1)(n-2)2^{n-3}$$

On les obtient en dérivant une, deux ou trois fois $(1+t)^n$, puis en prenant $t = 1$.

Assembler et simplifier

$$S_n = 2^{n-3} [n(n-1)(n-2) + 6n(n-1) + 4n]$$

$$S_n = n^2(n+3)2^{n-3}$$

● **RETROUVER LES COEFFICIENTS**

Écrivez $r^3 = r(r-1)(r-2) + Ar(r-1) + Br + C$. Les substitutions $r = 0, 1, 2$ donnent successivement $C = 0$, $B = 1$ et $A = 3$.

● **À VÉRIFIER**

Vérification ajoutée : pour $n = 3$, la somme vaut $3 + 24 + 27 = 54$, comme la formule. Les bornes $r = 0$ et $r = n$ font partie de la somme.

Réduire un très grand exposant

Petit théorème de Fermat.

Trouver le reste de 2^{2025} dans la division par 13

13 est premier et 2 n'est pas divisible par 13. Le petit théorème de Fermat donne :

$$2^{12} \equiv 1 \pmod{13}$$

Réduire l'exposant modulo 12

$$2025 = 12 \times 168 + 9$$

$$2^{2025} = (2^{12})^{168} 2^9 \equiv 2^9 \pmod{13}$$

Réduire le résultat modulo 13

$$2^9 = 512 = 13 \times 39 + 5$$

$$\text{Reste} = 5$$

● L'ÉNONCÉ À CONNAÎTRE

Si p est un nombre premier et a un entier non divisible par p , alors $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Pour calculer a^N modulo p , on peut donc réduire N modulo $p - 1$.

Deux vérifications indispensables

Vérifiez que le diviseur est premier et que la base n'en est pas un multiple. Si p divise a et si N est strictement positif, le reste vaut directement 0.

● À VÉRIFIER

Le symbole $\equiv$ signifie « même reste », pas « égalité de nombres ». On réduit l'exposant modulo 12, puis la puissance obtenue modulo 13 : ces deux modules ont des rôles différents.

Une puissance dans l'exposant

Traiter la tour de haut en bas.

L'exemple précisé dans la transcription

Trouver $2^{(5^{2025})} \pmod{13}$

Il s'agit de $2^{(5^{2025})}$ et non de $(2^5)^{2025}$. Puisque $2^{12} \equiv 1 \pmod{13}$, seule compte la valeur de 5^{2025} modulo 12.

1 Réduire l'exposant supérieur

$$5^2 = 25 \equiv 1 \pmod{12}$$

2025 est impair, donc $5^{2025} = (5^2)^{1012} \times 5 \equiv 5 \pmod{12}$. Il existe ainsi un entier q tel que $5^{2025} = 12q + 5$.

2 Revenir à la puissance initiale

$$2^{(5^{2025})} \equiv 2^5 = 32 \equiv 6 \pmod{13}$$

Le lien avec la méthode d'Euler

La transcription utilise $\varphi(12) = 12(1 - 1/2)(1 - 1/3) = 4$. Comme 5 et 12 sont premiers entre eux, $5^4 \equiv 1 \pmod{12}$; on retrouve aussi $5^{2025} \equiv 5$.

● LE PRINCIPE GÉNÉRAL

Pour des entiers a et m premiers entre eux, $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$. Si $m = \prod p_i^{\alpha_i}$, alors $\varphi(m) = m \prod (1 - 1/p_i)$, avec un facteur pour chaque diviseur premier distinct.

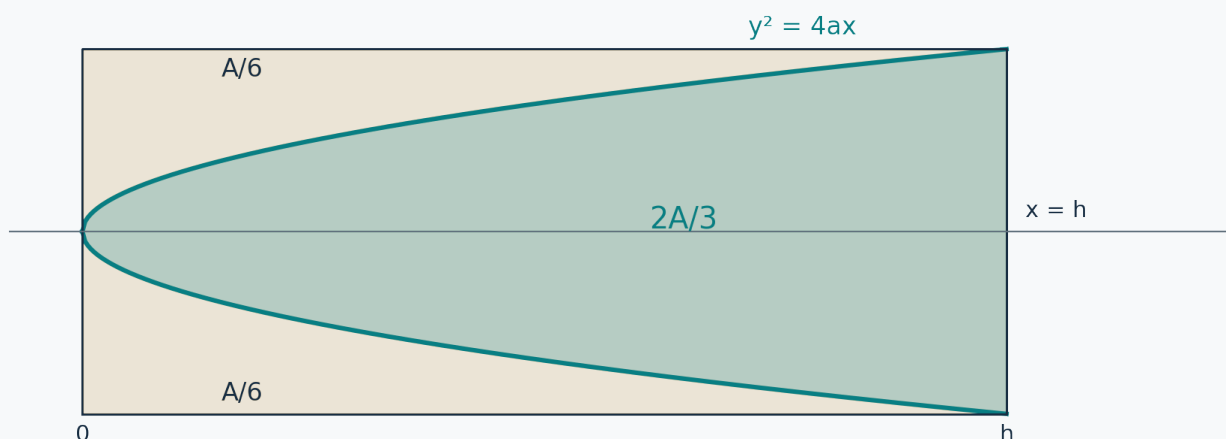
● À VÉRIFIER

Réduire un exposant par la fonction φ sans vérifier que la base est première avec le module peut donner une réponse fautive. Ici, la période 2 de 5 modulo 12 rend le calcul particulièrement court.

L'aire d'un segment de parabole

Les deux tiers d'un rectangle.

On considère la parabole $y^2 = 4ax$, avec $a > 0$, coupée par la droite $x = h$, avec $h > 0$. Le rectangle de référence va de $x = 0$ à $x = h$, et de $y = -2\sqrt{ah}$ à $y = 2\sqrt{ah}$.



Calculer l'aire entre la parabole et la corde

Pour une abscisse x comprise entre 0 et h , la hauteur à l'intérieur de la parabole est $4\sqrt{ax}$. Ainsi :

$$\mathcal{A} = \int_0^h 4\sqrt{ax} \, dx = \frac{8}{3} \sqrt{a} h^{3/2}$$

L'aire du rectangle vaut $A = 4h\sqrt{ah}$. On en déduit :

$$\mathcal{A} = \frac{2}{3}A$$

● LES DEUX ZONES RESTANTES

Par symétrie, les deux morceaux du rectangle situés hors de la parabole ont la même aire. Leur aire totale est $A/3$: chacun vaut donc $A/6$.

● NOTE DE LECTURE

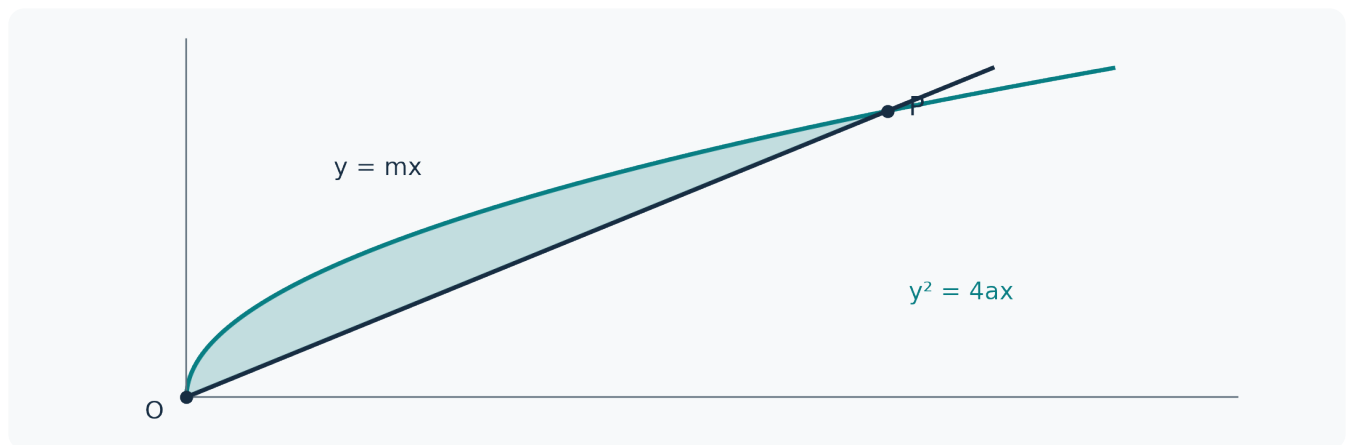
Le dessin original n'est pas présent dans le texte. La configuration ci-dessus est explicitement définie pour rendre la règle des deux tiers exacte et vérifiable.

Parabole et droite par l'origine

Une formule courte, une configuration précise.

Les deux courbes

$$y^2 = 4ax, \quad y = mx \quad (a > 0, m > 0)$$



1 Déterminer les intersections

En remplaçant x par y/m , on obtient $y^2 = 4ay/m$, donc $y = 0$ ou $y = 4a/m$. La borne supérieure n'est pas à deviner.

2 Intégrer horizontalement

Entre les intersections, la droite $x = y/m$ est à droite de la parabole $x = y^2/(4a)$. L'aire vaut donc :

$$\mathcal{A} = \int_0^{4a/m} \left(\frac{y}{m} - \frac{y^2}{4a} \right) dy$$

$$\mathcal{A} = \frac{8a^2}{3m^3}$$

● AJOUT PÉDAGOGIQUE

Pour $a = 1$ et $m = 2$, les intersections sont $O(0 ; 0)$ et $P(1 ; 2)$. L'aire vaut $8/(3 \times 8) = 1/3$ unité d'aire.

● À VÉRIFIER

Pour $m < 0$, la région est située sous l'axe des abscisses et l'aire positive vaut $8a^2/(3|m|^3)$. Pour $m = 0$, la droite est tangente : il n'y a pas de région fermée de cette forme.

Une corde quelconque

Complément pour une parabole verticale.

● NOTE DE LECTURE

La transcription évoque une formule générale sans la rendre lisible. Voici une version explicitement définie et démontrée.

Configuration

$$x^2 = 4ay, \quad y = mx + c \quad (a > 0)$$

Les intersections ont pour abscisses les racines u et v de $x^2 - 4amx - 4ac = 0$. On suppose $u < v$, c'est-à-dire que le discriminant D est strictement positif.

$$D = 16a^2m^2 + 16ac = 16a(am^2 + c) > 0$$

Factoriser la hauteur plutôt que développer

$$mx + c - \frac{x^2}{4a} = \frac{(x-u)(v-x)}{4a} \quad (u \leq x \leq v)$$

La droite est au-dessus de la parabole entre les points d'intersection. Avec $t = x - u$ et $L = v - u$, l'intégrale devient $\int_0^L t(L-t)/(4a) dt$.

$$\mathcal{A} = \frac{(v-u)^3}{24a} = \frac{D^{3/2}}{24a}$$

Ajout pédagogique : $x^2 = 4y$ et $y = 1$

Ici $a = 1$, $m = 0$, $c = 1$, $D = 16$ et les intersections sont $x = -2$ et $x = 2$.

$$\mathcal{A} = \frac{16^{3/2}}{24} = \frac{64}{24} = \frac{8}{3}$$

● À VÉRIFIER

$D = 0$ correspond à une tangente et à une aire nulle. Pour $D < 0$, il n'y a pas deux intersections réelles et donc pas de segment de parabole délimité par cette droite.

Dériver une relation implicite

Organiser le calcul avec les dérivées partielles.

La formule structurante

Si $F(x, y(x)) = 0$, si F est continûment différentiable près du point considéré et si $F_y \neq 0$, la règle de la chaîne donne $F_x + F_y y' = 0$. Ainsi :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

Exemple long reconstitué de la transcription

Les exposants sont corrigés oralement pendant la séance. La version cohérente suivante reprend les termes identifiables ; le niveau constant K n'est pas précisé :

$$3xy + 4x^2y^3 + 7x^2y^4 + 8xy^4 + 7x^5 + y^2 = K$$

1 Dériver en x en considérant y comme constant

$$F_x = 3y + 8xy^3 + 14xy^4 + 8y^4 + 35x^4$$

2 Dériver en y en considérant x comme constant

$$F_y = 3x + 12x^2y^2 + 28x^2y^3 + 32xy^3 + 2y$$

3 Former le quotient

$$y' = -\frac{3y + 8xy^3 + 14xy^4 + 8y^4 + 35x^4}{3x + 12x^2y^2 + 28x^2y^3 + 32xy^3 + 2y}$$

● VÉRIFIER UN MONÔME

Pour $7x^2y^4$, la dérivée partielle en x est $14xy^4$; celle en y est $28x^2y^3$. La variable tenue constante ne change pas.

● À VÉRIFIER

Si $F_y = 0$, ce quotient n'est pas utilisable. Il faut analyser séparément le point : tangente verticale, point singulier ou autre situation. La dérivation implicite n'autorise pas une division par zéro.

Relier les produits de vecteurs

L'identité de Lagrange.

Dans un espace euclidien de dimension 3, le produit scalaire mesure l'alignement, tandis que la norme du produit vectoriel mesure l'aire du parallélogramme engendré par les deux vecteurs.

$$\|u \times v\|^2 + (u \cdot v)^2 = \|u\|^2 \|v\|^2$$

Pourquoi cette identité est vraie

Si θ est l'angle entre deux vecteurs non nuls, alors $u \cdot v = \|u\| \|v\| \cos \theta$ et $\|u \times v\| = \|u\| \|v\| \sin \theta$. L'identité découle de $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$. Elle reste vraie si un vecteur est nul.

Ajout pédagogique : calculer une aire

Prenons $u = (1 ; 2 ; 0)$ et $v = (2 ; 0 ; 1)$. On a $\|u\|^2 = 5$, $\|v\|^2 = 5$ et $u \cdot v = 2$.

$$\|u \times v\|^2 = 5 \times 5 - 2^2 = 21$$

$$\text{Aire du parallélogramme} = \sqrt{21}$$

L'aire du triangle construit sur ces deux vecteurs est la moitié : $\sqrt{21}/2$. On n'a pas eu besoin de calculer les trois coordonnées du produit vectoriel.

● CE QUE L'IDENTITÉ FOURNIT

Elle donne la norme du produit vectoriel. Elle ne donne ni sa direction ni son sens. Pour cela, il faut effectuer le produit vectoriel ou utiliser une information géométrique supplémentaire.

● NOTE DE LECTURE

La transcription mentionne aussi un quotient de déterminants, sans énoncé ni formule lisible. Il n'est pas possible d'en restituer fidèlement le problème à partir du seul fichier texte.

Reconnaître une dérivée de produit

Une primitive en une ligne.

Le motif à repérer

$$\int e^x [f(x) + f'(x)] dx$$

Il ne faut pas séparer les deux termes par réflexe. La règle de dérivation d'un produit donne précisément :

$$(e^x f(x))' = e^x f(x) + e^x f'(x)$$

$$\int e^x [f(x) + f'(x)] dx = e^x f(x) + C$$

Ajout pédagogique : un polynôme

$$\int e^x (x^2 + 2x) dx = e^x x^2 + C$$

On reconnaît $f(x) = x^2$ et $f'(x) = 2x$. Une simple dérivation du résultat vérifie toute la primitive.

La variante avec e^{ax}

$$\int e^{ax} [af(x) + f'(x)] dx = e^{ax} f(x) + C$$

● COMMENT CHERCHER f

Repérez un terme dont la dérivée ressemble au terme voisin. Pour un polynôme, commencez par celui de plus haut degré. Contrôlez ensuite le coefficient de l'exponentielle.

● À VÉRIFIER

L'identité est valable sur un intervalle où f est dérivable. Une intégrale indéfinie demande une constante C . Pour une intégrale définie, évaluez la primitive aux deux bornes.

Exponentielle et sinus

Une primitive par les nombres complexes.

L'intégrale de la transcription

$$I = \int e^{2x} \sin(3x) dx$$

La formule d'Euler $e^{it} = \cos t + i \sin t$ permet d'écrire l'intégrande comme la partie imaginaire de $e^{(2+3i)x}$.

$$I = \operatorname{Im} \left(\frac{e^{(2+3i)x}}{2+3i} \right) + C$$

Rationaliser le coefficient

$$\frac{1}{2+3i} = \frac{2-3i}{13}$$

Dans $(2-3i)(\cos 3x + i \sin 3x)$, la partie imaginaire est $2 \sin 3x - 3 \cos 3x$.

$$I = \frac{e^{2x}}{13} [2 \sin(3x) - 3 \cos(3x)] + C$$

Formule générale

$$\int e^{ax} \sin(bx) dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} [a \sin(bx) - b \cos(bx)] + C$$

Cette formule suppose que a et b sont réels et non tous les deux nuls. Elle peut aussi se démontrer avec deux intégrations par parties.

● LA VÉRIFICATION LA PLUS FIABLE

Dérivez le résultat. Les termes en cosinus doivent se supprimer et le coefficient du sinus doit devenir 1 après division par 13.

● À VÉRIFIER

Le dénominateur $2^2 + 3^2 = 13$ est indispensable. La partie réelle de la même primitive fournit la formule analogue pour $e^{2x} \cos(3x)$.

Binôme et trigonométrie

Une somme de cosinus devient une puissance.

La somme étudiée

$$S_n(\theta) = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} \cos(r\theta) \quad (n \geq 1)$$

On remplace temporairement le cosinus par la partie réelle de $e^{ir\theta}$. Le binôme de Newton devient alors immédiatement utilisable.

$$S_n(\theta) = \operatorname{Re} [(1 + e^{i\theta})^n]$$

Faire apparaître le demi-angle

$$1 + e^{i\theta} = e^{i\theta/2} (e^{-i\theta/2} + e^{i\theta/2})$$

$$1 + e^{i\theta} = 2\cos(\theta/2) e^{i\theta/2}$$

$$S_n(\theta) = \left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^n \cos\frac{n\theta}{2}$$

Ajout pédagogique : $n = 4$ et $\theta = \pi/3$

$$S_4(\pi/3) = (\sqrt{3})^4 \cos(2\pi/3) = -\frac{9}{2}$$

● VARIANTE AVEC LES SINUS

En prenant la partie imaginaire au lieu de la partie réelle, on obtient

$$\sum_{r=0}^n \binom{n}{r} \sin(r\theta) = (2\cos(\theta/2))^n \sin(n\theta/2).$$

● À VÉRIFIER

On ne remplace pas $2\cos(\theta/2)$ par sa valeur absolue : son signe compte lorsque n est impair. Les bornes $r = 0$ à n doivent être conservées.

Un produit remarquable de sinus

Vérifier l'exposant avant de mémoriser.

L'identité correcte

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}} \quad (n \geq 2)$$

Il y a $n - 1$ facteurs. Le dénominateur est donc 2^{n-1} , et non 2^n . La fin de la transcription laisse précisément cet exposant ambigu.

Contrôle sur $n = 2$

$$\sin(\pi/2) = 1 = \frac{2}{2^1}$$

Ajout pédagogique : $n = 6$

$$\sin\frac{\pi}{6} \sin\frac{2\pi}{6} \sin\frac{3\pi}{6} \sin\frac{4\pi}{6} \sin\frac{5\pi}{6} = \frac{3}{16}$$

Une justification avec les racines de l'unité

Posons $\zeta_k = e^{2i\pi k/n}$. La factorisation de $(X^n - 1)/(X - 1)$, évaluée en $X = 1$, donne $n = \prod_{k=1}^{n-1} (1 - \zeta_k)$. En prenant les modules :

$$n = \prod_{k=1}^{n-1} |1 - \zeta_k| = \prod_{k=1}^{n-1} 2 \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

Tous les sinus sont positifs puisque leurs angles sont strictement compris entre 0 et π . On peut diviser par les $n - 1$ facteurs égaux à 2.

● LE BON RÉFLEXE

Testez une identité générale sur un petit entier, puis comptez exactement ses facteurs. Cela permet de détecter immédiatement de nombreuses erreurs d'indice ou d'exposant.

EXERCICES 01-06 / ASTUCES MATHÉMATIQUES

À vous de jouer : algèbre

Entraînement supplémentaire, créé pour ce livret.

● MODE D'EMPLOI

Pour chaque exercice, écrivez le signal qui déclenche la méthode et les conditions à vérifier. Les corrigés se trouvent pages 32 et 33.

01 Un polynôme caché

P est un polynôme unitaire de degré 3 tel que $P(0)=0$, $P(1)=1$ et $P(2)=4$. Calculer $P'(1)$ sans déterminer séparément tous ses coefficients.

02 Un reste polynomial

Quel est le reste de $1+x^3+x^6+\dots+x^{30}$ dans la division par x^2+x+1 ?

03 Une récurrence de racines

α et β sont les racines de $x^2-3x+2=0$. On pose $U_n=2\alpha^n+\beta^n$. Calculer $(U_{10}+2U_8)/U_9$.

04 Des relations à compter

Sur un ensemble de quatre éléments, combien existe-t-il de relations réflexives ? De relations symétriques ? De relations d'équivalence ?

05 Une dispersion rapide

Calculer la moyenne, la variance et l'écart-type de la série équipondérée 2, 5, 8, 11, 14.

06 Une somme binomiale

$$\text{Calculer } \sum_{r=0}^8 r^3 \binom{8}{r}$$

● À VÉRIFIER

Ne confondez pas la variance avec l'écart-type. Dans le problème 02, le terme constant compte comme le premier terme de la somme.

EXERCICES 07-12 / ASTUCES MATHÉMATIQUES

À vous de jouer : connexions

Géométrie, arithmétique et analyse.

07 Une puissance entière

Déterminer le reste de 3^{100} dans la division euclidienne par 7. Justifier la réduction de l'exposant.

08 Une suite dans une somme

Calculer
$$\sum_{r=1}^{10} r(r+1)$$

09 Un lieu de points

Dans le plan complexe, déterminer le centre et le rayon du lieu défini par $|z| = 2|z - 3|$.

10 Une aire

Calculer l'aire comprise entre la parabole $y^2 = 8x$ et la droite $y = 2x$. Commencer par les intersections.

11 Une primitive structurée

Trouver une primitive de $e^x(x^3 + 3x^2)$

12 Un produit de sinus

Calculer
$$\prod_{k=1}^4 \sin\left(\frac{k\pi}{5}\right)$$

● AUTOÉVALUATION

Une réponse juste ne suffit pas : pouvez-vous expliquer pourquoi la méthode s'applique ? Reprenez en priorité les questions où vous avez utilisé une formule sans en vérifier les hypothèses.

● NOTE DE LECTURE

Ces douze exercices sont des ajouts pédagogiques. Ils servent à réinvestir les méthodes de la transcription ; ils ne sont pas présentés comme des questions du document original.

Corrigés : les six premiers

Des solutions courtes, mais justifiées.

01 Modèle polynomial

Le polynôme $P(x) - x^2$ est unitaire de degré 3 et s'annule en 0, 1 et 2. Donc $P(x) = x^2 + x(x-1)(x-2)$. En $x = 1$, la dérivée du produit vaut $1 \times (1-2) = -1$. Ainsi $P'(1) = 2 - 1 = 1$.

02 Restes

Modulo $x^2 + x + 1$, on a $x^3 \equiv 1$. Les exposants sont 0, 3, ..., 30 : la somme contient 11 termes, chacun congru à 1. Le reste est 11.

03 Récurrence

Chaque racine vérifie $u^2 = 3u - 2$, donc $U_{10} = 3U_9 - 2U_8$. Le quotient vaut 3. Les racines sont 1 et 2, donc $U_9 > 0$ quel que soit leur ordre.

04 Relations

$$N_{\text{ref}} = 2^{16-4} = 4096, \quad N_{\text{sym}} = 2^{10} = 1024$$

Le triangle de Bell donne $B_4 = 15$: il existe 15 relations d'équivalence.

05 Moyenne et dispersion

$$\bar{x} = 8, \quad V = 3 \frac{25^2 - 1}{12} = 18, \quad \sigma = 3\sqrt{2}$$

Contrôle direct : les écarts à la moyenne sont -6, -3, 0, 3, 6. La moyenne de leurs carrés est $(36 + 9 + 0 + 9 + 36)/5 = 18$.

06 Binôme pondéré

$$\sum_{r=0}^8 r^3 \binom{8}{r} = 8^2(8+3)2^{8-3} = 64 \times 11 \times 32 = 22528$$

Corrigés : changer de point de vue

Revenir à la structure de chaque problème.

07 Reste entier

7 est premier et ne divise pas 3, donc $3^6 \equiv 1 \pmod{7}$. Puisque $100 = 6 \times 16 + 4$, on a $3^{100} \equiv 3^4 = 81 \equiv 4 \pmod{7}$. Le reste est 4.

08 Somme télescopique

$$\sum_{r=1}^{10} r(r+1) = \frac{10 \times 11 \times 12}{3} = 440$$

La formule à deux facteurs consécutifs s'obtient par la différence de produits de trois facteurs. Le diviseur est $2 + 1 = 3$.

09 Cercle

En posant $z = x + iy$ et en élevant les deux membres au carré, on obtient $x^2 + y^2 = 4[(x-3)^2 + y^2]$. Après simplification :

$$(x-4)^2 + y^2 = 4$$

Le centre est $(4 ; 0)$ et le rayon est 2. Les points d'intersection avec l'axe réel sont 2 et 6.

10 Aire

Ici $a = 2$ et $m = 2$. Les intersections ont pour ordonnées 0 et 4, et pour abscisses 0 et 2. L'aire vaut $8a^2/(3m^3) = 32/24 = 4/3$.

11 Primitive

$$F(x) = e^x x^3 + C$$

La dérivation de ce produit redonne bien $e^x x^3 + 3e^x x^2$.

12 Produit trigonométrique

$$\prod_{k=1}^4 \sin\left(\frac{k\pi}{5}\right) = \frac{5}{2^4} = \frac{5}{16}$$

Votre fiche de décision

Reconnaître, vérifier, calculer, contrôler.

Si vous voyez...	Pensez à...
Des valeurs de P qui suivent un modèle simple	Soustraire le modèle ; factoriser les zéros
Des puissances des mêmes racines	Utiliser leur équation et une récurrence
Des puissances avec un diviseur structuré	Réduire modulo le diviseur
Des produits d’entiers consécutifs dans une somme	Chercher une différence télescopique
Une suite arithmétique en statistiques	Translation et facteur d’échelle
Des coefficients binomiaux pondérés	Produits décroissants et dérivation
Un rapport constant de distances	Cercle d’Apollonius ou médiatrice
Une relation $F(x, y) = 0$	Dérivation implicite, avec contrôle de F_y
Exponentielle $\times$ somme de deux termes	Reconnaître la dérivée d’un produit

Les contrôles qui évitent les fausses astuces

Vérifiez les dénominateurs, le domaine et les bornes des sommes. Distinguez terme, somme, variance et écart-type. Pour une aire, identifiez les intersections et la courbe située au-dessus. Pour un système, vérifiez la compatibilité, pas seulement le déterminant.

Note éditoriale

Source de travail : transcription fournie, séquence mathématique de 02:14 à 56:55. Les passages incomplets concernent notamment les systèmes (32:19-36:27), certains schémas d’aires (43:12-44:24), la formule implicite corrigée oralement (44:27-46:17) et un quotient de déterminants en vecteurs (50:44-51:01). Leur statut est signalé dans les fiches.

Les méthodes sont reformulées et les exemples exploitables sont développés. Les compléments sont identifiés. Ce document constitue une adaptation pédagogique, pas une reproduction des supports visuels absents.

● L’OBJECTIF

Gagner du temps parce que vous comprenez mieux la structure du problème. Une bonne méthode doit rester explicable et vérifiable.