

Ensemble de définition d'une fonction

Racines, logarithmes, partie entière, trigonométrie

Auteur : Maths Olympiad

1. L'essentiel du cours
2. Tableau des fonctions usuelles
3. Les 6 astuces à connaître

4. 10 exercices corrigés (niveau concours)
5. 7 exercices d'entraînement + réponses

Niveaux : ★ facile ★★ moyen ★★★ JEE

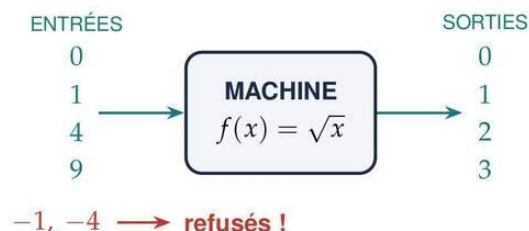
1 L'essentiel du cours

Une fonction est une machine

On peut voir une fonction comme une ma-

chine : on lui donne un nombre x (l'entrée), elle renvoie $f(x)$ (la sortie).

Mais la machine refuse certaines entrées. Par exemple, $f(x) = \sqrt{x}$ accepte 0, 1, 4, 9 et renvoie 0, 1, 2, 3, mais elle refuse -1 et -4 (pas de racine carrée d'un nombre négatif dans $\mathbb{R}$).



Définition

L'ensemble de définition de f , noté D_f , est l'ensemble des réels x pour lesquels $f(x)$ existe (se calcule dans $\mathbb{R}$).

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \text{ existe}\}.$$

Les conditions à vérifier

Les règles d'or

Si f contient...	alors il faut...
une fraction $\frac{A}{B}$	$B \neq 0$
une racine $\sqrt{A}$	$A \geq 0$
une racine au dénominateur $\frac{1}{\sqrt{A}}$	$A > 0$ (inégalité stricte)
un logarithme $\log_a(A)$ ou $\ln(A)$	$A > 0$ (et la base $a > 0, a \neq 1$)
$\tan(A)$ ou $\sec(A) = \frac{1}{\cos A}$	$A \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$
$\cot(A)$ ou $\operatorname{cosec}(A) = \frac{1}{\sin A}$	$A \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}$

D_f est l'intersection de toutes ces conditions.

Pièges à éviter

- $\sqrt{A}$ demande $A \geq 0$, mais $\frac{1}{\sqrt{A}}$ demande $A > 0$: le dénominateur ne peut pas être nul.
- Dans $\log_3(g(\log_3 x))$, il y a deux logarithmes : ne pas oublier la condition $x > 0$ du logarithme intérieur.
- On ne peut élever au carré une inégalité que si les deux membres sont positifs.
- Une racine du dénominateur est toujours exclue, même si l'inégalité est large ($\geq$).

2 Ensembles de définition des fonctions usuelles

Notations : $[x]$ désigne la partie entière de x (notée aussi $E(x)$), $\{x\} = x - [x]$ la partie fractionnaire, et $\text{sgn}(x)$ le signe de x .

N°	Fonction	Ens. de définition	N°	Fonction	Ens. de définition
1	Polynôme	$\mathbf{R}$	8	$\log_a x$	$x > 0$ ($a > 0, a \neq 1$)
2	$ x $	$\mathbf{R}$	9	$\sin x$	$\mathbf{R}$
3	$[x]$ (partie entière)	$\mathbf{R}$	10	$\cos x$	$\mathbf{R}$
4	$\{x\}$ (partie fract.)	$\mathbf{R}$	11	$\tan x$	$\mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + n\pi\}$
5	$\text{sgn}(x)$	$\mathbf{R}$	12	$\cot x$	$\mathbf{R} \setminus \{n\pi\}$
6	$\sqrt{x}$	$[0; +\infty[$	13	$\sec x = 1/\cos x$	$\mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + n\pi\}$
7	$1/x$	$\mathbf{R} \setminus \{0\} = \mathbf{R}^*$	14	$\text{cosec } x = 1/\sin x$	$\mathbf{R} \setminus \{n\pi\}$

(Dans tout le tableau, n décrit $\mathbb{Z}$.)

3 Les 6 astuces à connaître**Astuce 1 | Lister, puis intersecter**

On écrit toutes les conditions une par une (une par racine, par fraction, par logarithme...), on résout chacune, puis on prend l'intersection.

Exemple. $f(x) = \sqrt{x+3} + \frac{1}{x-2} : x \geq -3$ et $x \neq 2$, donc $D_f = [-3; 2[\cup]2; +\infty[$.

Astuce 2 | Le changement de variable

Quand la même expression revient plusieurs fois ($|x|$, $\log_3 x$, $[x]$, $\{x\}$, $\sin x \dots$), on la remplace par t . On obtient une inéquation simple en t (souvent du second degré), on la résout, puis on revient à x .

Exemple. $-(\log_3 x)^2 + 5 \log_3 x - 6 > 0$ devient $-t^2 + 5t - 6 > 0$ avec $t = \log_3 x$.

Astuce 3 | Le tableau de signes d'un quotient

Pour $\frac{t-a}{t-b} \geq 0$ (avec $a < b$) : le quotient est positif à l'extérieur des racines.

$$\frac{t-a}{t-b} \geq 0 \iff t \leq a \text{ ou } t > b.$$

La racine du numérateur est incluse (crochet fermé), celle du dénominateur est exclue (crochet ouvert).

Astuce 4 | Revenir de t à x

$$|x| \leq a \ (a \geq 0) \iff -a \leq x \leq a$$

$$|x| > a \iff x < -a \text{ ou } x > a$$

$$\alpha < \log_a x < \beta \ (a > 1) \iff a^\alpha < x < a^\beta \text{ (la fonction est croissante)}$$

$$[x] < k \ (k \in \mathbf{Z}) \iff x < k$$

$$[x] > k \ (k \in \mathbf{Z}) \iff [x] \geq k+1 \iff x \geq k+1$$

$\{x\}$ toujours dans $[0 ; 1[$: une condition $\{x\} \geq 1$ est impossible

Astuce 5 | Comparer x à une racine

Pour résoudre $x \geq \sqrt{A}$: le membre de droite est positif, donc

- si $x < 0$: impossible (un négatif ne dépasse pas un positif) ;
- si $x \geq 0$: les deux membres sont positifs, on peut élever au carré : $x^2 \geq A$.

Astuce 6 | Les fonctions périodiques

Pour sin ou cos, on résout sur une seule période $[0 ; 2\pi]$ à l'aide du cercle ou de la courbe, puis on ajoute $2n\pi$. Si une autre condition limite x à un intervalle borné (par exemple $[-4 ; 4]$), on compare ses bornes à $\pi \approx 3,14$ et $2\pi \approx 6,28$ pour ne garder que quelques valeurs de n .

La méthode en 3 réflexes

1. Repérer chaque « danger » : racine, dénominateur, logarithme, tangente...
2. Ecrire la condition associée et la résoudre (changement de variable, tableau de signes).
3. Prendre l'intersection de toutes les conditions et vérifier les bornes (crochets ouverts ou fermés).

4 Exercices corrigés

Exercice 1 — Echauffement

Déterminer l'ensemble de définition de $f(x) = \sqrt{x+3} + \frac{1}{x-2}$.

Corrigé. Deux conditions : la racine impose $x+3 \geq 0$, soit $x \geq -3$; la fraction impose $x-2 \neq 0$, soit $x \neq 2$.

Réponse : $D_f = [-3 ; 2[\cup]2 ; +\infty[$

Exercice 2 — Logarithme d'un trinôme

Déterminer l'ensemble de définition de $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$.

Corrigé. Il faut $x^2 - 5x + 6 > 0$. Or $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$, qui est positif à l'extérieur des racines 2 et 3.

Réponse : $D_f =]-\infty ; 2[\cup]3 ; +\infty[$

Exercice 3 — Trois conditions

Déterminer l'ensemble de définition de $f(x) = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{\ln x}$.

Corrigé.

• Racine : $4 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$.

+ Logarithme : $x > 0$.

• Dénominateur : $\ln x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$.

L'intersection donne $0 < x \leq 2$ avec $x \neq 1$.

Réponse : $D_f =]0 ; 1[\cup]1 ; 2]$

Astuce clé : ne pas oublier que le logarithme est au dénominateur : il doit être non nul.

Exercice 4 — Avec une valeur absolue

L'ensemble de définition de $f(x) = \sqrt{\frac{1 - |x|}{2 - |x|}}$ est :

(A) $\mathbb{R} \setminus [-1 ; 1]$ (B) $\mathbb{R} \setminus [-2 ; 2]$ (C) $[-1 ; 1] \cup]-\infty ; -2[\cup]2 ; +\infty[$ (D) aucune de ces réponses.

Corrigé. Il faut $\frac{1 - |x|}{2 - |x|} \geq 0$. Posons $t = |x| \geq 0$ (astuce 2) :

$$\frac{1 - t}{2 - t} \geq 0 \iff \frac{t - 1}{t - 2} \geq 0 \iff t \leq 1 \text{ ou } t > 2 \quad (\text{astuce 3 : } t = 2 \text{ est exclu}).$$

On revient à x (astuce 4) : $|x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$, et $|x| > 2 \Leftrightarrow x < -2$ ou $x > 2$.

Réponse : (C) $[-1 ; 1] \cup]-\infty ; -2[\cup]2 ; +\infty[$

Exercice 5 — Logarithme dans un logarithme

L'ensemble de définition de $f(x) = \log_3(-(\log_3 x)^2 + 5 \log_3 x - 6)$ est :

(A) $]0 ; 9[\cup]27 ; +\infty[$ (B) $[9 ; 27]$ (C) $]9 ; 27[$ (D) aucune de ces réponses.

Corrigé. Le logarithme intérieur impose $x > 0$. Le logarithme extérieur impose

$$-(\log_3 x)^2 + 5 \log_3 x - 6 > 0.$$

Avec $t = \log_3 x$: $-t^2 + 5t - 6 > 0 \Leftrightarrow t^2 - 5t + 6 < 0 \Leftrightarrow (t - 2)(t - 3) < 0 \Leftrightarrow 2 < t < 3$.

Comme $\log_3$ est croissante : $2 < \log_3 x < 3 \Leftrightarrow 3^2 < x < 3^3 \Leftrightarrow 9 < x < 27$ (ce qui assure bien $x > 0$).

Exercice 6 — Avec la partie entière

Combien d'entiers **n'appartiennent pas** à l'ensemble de définition de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{[x]^2 - [x] - 6}}$?
 (A)6 (B)4 (C)2 (D)0

Corrigé. La racine est au dénominateur, donc l'inégalité est stricte : $[x]^2 - [x] - 6 > 0$.

Avec $t = [x]$: $(t - 3)(t + 2) > 0 \Leftrightarrow t < -2$ ou $t > 3$.

On revient à x (astuce 4) : $[x] < -2 \Leftrightarrow x < -2$, et $[x] > 3 \Leftrightarrow [x] \geq 4 \Leftrightarrow x \geq 4$.

Donc $Df =]-\infty; -2[\cup [4; +\infty[$. Les entiers exclus sont $-2, -1, 0, 1, 2, 3$.

Réponse : (A) 6 entiers

Exercice 7 — Sinus et racine

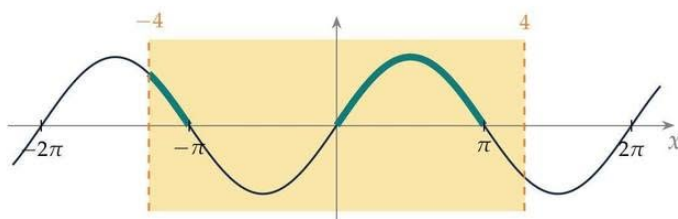
Déterminer l'ensemble de définition de $f(x) = \sqrt{\sin x} - \sqrt{16 - x^2}$.

Corrigé.

$$\bullet 16 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 4)(x + 4) \leq 0 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 4.$$

$$\bullet \sin x \geq 0 \Leftrightarrow x \in [2n\pi; 2n\pi + \pi], n \in \mathbb{Z}.$$

Comme $\pi \approx 3,14 < 4 < 2\pi \approx 6,28$ (astuce 6), seules deux « arches » du sinus touchent $[-4; 4]$: $[-2\pi; -\pi]$, qui donne $[-4; -\pi]$, et $[0; \pi]$.



Réponse : $Df = [-4; -\pi] \cup [0; \pi]$

Exercice 8 — Avec la partie fractionnaire

L'ensemble de définition, dans l'intervalle $[-1; 1]$, de $f(x) = \sqrt{2\{x\}^2 - 3\{x\} + 1}$ est :

(A) $[-1; 1] \setminus]1/2; 1[$ (B) $[-1; -1/2] \cup [0; 1/2] \cup \{1\}$ (C) $[-1; 1[$ (D) $[-1/2; 1]$

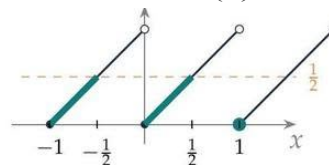
Corrigé. Posons $t = \{x\} \in [0; 1[$. Il faut $2t^2 - 3t + 1 \geq 0$, soit $(2t - 1)(t - 1) \geq 0 \Leftrightarrow t \leq 1/2$ ou $t \geq 1$.

Or $t \geq 1$ est impossible pour une partie fractionnaire (astuce 4) : la condition est donc $\{x\} \leq 1/2$.

On lit sur la courbe de $\{x\}$ (en « dents de scie ») :

- sur $[-1; 0[$, $\{x\} = x + 1 \leq 1/2 \Leftrightarrow x \leq -1/2$;
- sur $[0; 1[$, $\{x\} = x \leq 1/2$;

- en $x = 1$, $\{1\} = 0 \leq 1/2$: le point 1 convient.



Réponse : (B) $[-1; -1/2] \cup [0; 1/2] \cup \{1\}$

Astuce clé : la partie fractionnaire est toujours dans $[0; 1[$, ce qui élimine directement le cas $t \geq 1$.

Exercice 9 — Racines imbriquées

L'ensemble de définition de $f(x) = \sqrt{x - \sqrt{1 - x^2}}$ est :

- (A) $[-1; -1/\sqrt{2}] \cup [1/\sqrt{2}; 1]$ (B) $[-1; 1]$ (C) $]-\infty; -1/2] \cup [1/\sqrt{2}; +\infty[$ (D) $[1/\sqrt{2}; 1]$

Corrigé. Racine intérieure : $1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$.

Racine extérieure : $x - \sqrt{1 - x^2} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \sqrt{1 - x^2}$ (astuce 5).

• Si $x < 0$: un nombre négatif ne peut pas dépasser une racine (positive) : impossible.

• Si $x \geq 0$: on élève au carré : $x^2 \geq 1 - x^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 1/2 \Leftrightarrow x \geq 1/\sqrt{2}$ (car $x \geq 0$).

Avec $-1 \leq x \leq 1$, on obtient $1/\sqrt{2} \leq x \leq 1$.

Réponse : (D) $[1/\sqrt{2}; 1]$

Exercice 10 — Trigonométrie

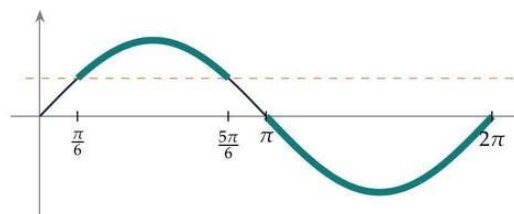
Déterminer l'ensemble de définition de $f(x) = \sqrt{2 - \sin x - 2 \cos^2 x}$.

Corrigé. On remplace $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$:

$$2 - \sin x - 2(1 - \sin^2 x) = 2 \sin^2 x - \sin x = \sin x (2 \sin x - 1).$$

Avec $t = \sin x$: $t(2t - 1) \geq 0 \Leftrightarrow t \leq 0$ ou $t \geq 1/2$.

Sur une période $[0; 2\pi]$ (astuce 6) : $\sin x \geq 1/2 \Leftrightarrow x \in [\pi/6; 5\pi/6]$ et $\sin x \leq 0 \Leftrightarrow x \in [\pi; 2\pi]$ (ainsi que $x = 0$).



Réponse : $D_f = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} ([2n\pi + \frac{\pi}{6}; 2n\pi + \frac{5\pi}{6}] \cup [2n\pi + \pi; 2n\pi + 2\pi])$

Astuce clé : transformer $\cos^2 x$ en $1 - \sin^2 x$ pour n'avoir qu'une seule variable $t = \sin x$.

5 Entraînement

Entraînement 1

Déterminer l'ensemble de définition de $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$.

Entraînement 2

Déterminer l'ensemble de définition de $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1} + \sqrt{x}$.

Entraînement 3

Déterminer l'ensemble de définition de $f(x) = \ln(2 - |x|)$.

Entraînement 4 ★★

Déterminer l'ensemble de définition de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{[x] - 2}}$.

Entraînement 5 ★★

Déterminer l'ensemble de définition de $f(x) = \sqrt{\log_2(x - 1)}$.

Entraînement 6 ★★

Déterminer, dans $[0 ; 2\pi]$, l'ensemble de définition de $f(x) = \sqrt[3]{(\cos x)}$.

Entraînement 7 ★★★

Déterminer l'ensemble de définition de $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+2}} + \ln(5-x)$.

Réponses de l'entraînement

1. $x^2 \geq 4 : Df =]-\infty ; -2] \cup [2 ; +\infty[$.
2. $x \geq 0$ et $x \neq \pm 1 : Df = [0 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$.
3. $|x| < 2 : Df =]-2 ; 2[$.
4. $[x] > 2 \Leftrightarrow [x] \geq 3 \Leftrightarrow x \geq 3 : Df = [3 ; +\infty[$.
5. $x > 1$ et $\log_2(x-1) \geq 0 \Leftrightarrow x-1 \geq 1 : Df = [2 ; +\infty[$.
6. $\cos x \geq 0 : Df = [0 ; \pi/2] \cup [3\pi/2 ; 2\pi]$.
7. $\frac{x-1}{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow x < -2$ ou $x \geq 1$, et $x < 5 : Df =]-\infty ; -2[\cup [1 ; 5[$.