

La nature des racines

Réelles, doubles, rationnelles ou complexes ?

Tout lire sur le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$

Auteur : Maths Olympiad

- | | | |
|------------------------------|--|--|
| 1. L'essentiel du cours | 4. 10 exercices corrigés | 5. 7 exercices d'entraînement + réponses |
| 2. Tableau récapitulatif | | |
| 3. Les 6 astuces à connaître | Niveaux : ★ facile ★★ moyen ★★★ concours | |

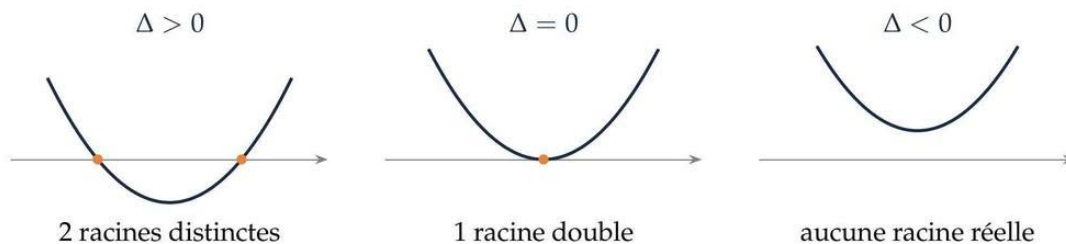
1 L'essentiel du cours

Le discriminant décide de tout

Pour $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$, on pose $\Delta = b^2 - 4ac$. Une équation du second degré a toujours deux racines (éventuellement confondues, éventuellement non réelles) ; c'est le signe de Δ qui dit lesquelles.

Théorème — nature des racines (a, b, c réels)

- $\Delta > 0$: deux racines **réelles distinctes** $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- $\Delta = 0$: une **racine double** $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
- $\Delta < 0$: aucune racine réelle ; les deux racines sont complexes conjuguées $\frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.



Quand les coefficients sont rationnels

Racines rationnelles ou irrationnelles (a, b, c rationnels)

- Si Δ est le carré d'un rationnel, les racines sont rationnelles.
- Si $\Delta > 0$ n'est pas un carré, les racines sont irrationnelles et conjuguées : $p + \sqrt{q}$ et $p - \sqrt{q}$.

Pourquoi ? Les racines valent $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$: elles sont rationnelles exactement quand $\sqrt{\Delta}$ l'est.

Les racines conjuguées

Si une équation à coefficients rationnels a pour racine $p + \sqrt{q}$ ($\sqrt{q}$ irrationnel), l'autre racine est $p - \sqrt{q}$. Si une équation à coefficients réels a pour racine $p + iq$ ($q \neq 0$), l'autre racine est $p - iq$. Dans les

deux cas :

$$x^2 - 2px + (\text{produit}) = 0.$$

Pièges à éviter

- Vérifier $a \neq 0$: si a dépend d'un paramètre, le cas $a = 0$ se traite à part (équation du premier degré).
- « Racines réelles » signifie $\Delta \geq 0$; « racines réelles distinctes » signifie $\Delta > 0$.
- Le critère « Δ carré parfait » ne vaut que si a, b, c sont rationnels.
- $\Delta < 0$ ne veut pas dire « pas de racines » : il y en a deux, mais elles ne sont pas réelles.

2 Tableau récapitulatif

Condition	Nature des racines
$\Delta > 0$	réelles et distinctes
$\Delta = 0$	réelles et égales (racine double $-b/(2a)$)
$\Delta < 0$	complexes conjuguées (non réelles)
$\Delta \geq 0$	réelles (distinctes ou confondues)
$a, b, c \in \mathbf{Q}$ et Δ carré d'un rationnel	rationnelles
$a, b, c \in \mathbf{Q}$, $\Delta > 0$ non carré	irrationnelles conjuguées $p \pm \sqrt{q}$
$ac < 0$	réelles distinctes, de signes contraires (sans calculer Δ)
$a + b + c = 0$	racines 1 et c/a (donc rationnelles si $a, c \in \mathbf{Q}$)

3 Les 6 astuces à connaître

Astuce 1 | Le discriminant réduit

Si $b = 2b'$ est pair, on calcule $\Delta' = b'^2 - ac$, qui a le même signe que Δ (car $\Delta = 4\Delta'$). Les racines sont alors $\frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}$: moins de calculs, moins d'erreurs.

Astuce 2 | Si $ac < 0$, pas besoin de Δ

Si a et c sont de signes contraires, alors $-4ac > 0$, donc $\Delta = b^2 - 4ac > 0$: deux racines réelles distinctes, de signes contraires.

Astuce 3 | Écrire Δ comme une somme de carrés

Pour montrer que $\Delta \geq 0$ « pour tout paramètre », on essaie d'écrire Δ comme une somme de carrés. L'identité clé :

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \geq 0.$$

Astuce 4 | La somme de deux discriminants

Si $\Delta_1 + \Delta_2 \geq 0$, alors Δ_1 et Δ_2 ne peuvent pas être tous les deux négatifs : au moins une des deux équations a des racines réelles.

Astuce 5 | Le changement de variable $t = e^u$

Une équation du type $e^u - e^{-u} = k$ devient $t - 1/t = k$, soit $t^2 - kt - 1 = 0$ avec $t > 0$. Puis on vérifie que la valeur trouvée est atteignable : si u est borné (par exemple $u = \sin x - \cos x \in [-\sqrt{2} ; \sqrt{2}]$), t l'est aussi.

Astuce 6 | Former une équation avec des racines conjuguées

Racines $p \pm \sqrt{q}$: somme $2p$, produit $p^2 - q$. Racines $p \pm iq$: somme $2p$, produit $p^2 + q^2$. On écrit $x^2 - (\text{somme})x + (\text{produit}) = 0$.

La méthode en 3 réflexes

1. Calculer Δ (ou Δ') et le simplifier au maximum (factoriser, faire apparaître des carrés).
2. Lire son signe : positif, nul, négatif ; carré parfait ou non si les coefficients sont rationnels.
3. Penser aux raccourcis : $ac < 0$, $a + b + c = 0$, $\Delta_1 + \Delta_2 \geq 0$.

4 Exercices corrigés

Exercice 1 — Lire le discriminant

Donner la nature des racines de : a) $2x^2 - 3x + 5 = 0$ b) $4x^2 - 12x + 9 = 0$ c) $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Corrigé.

- a) $\Delta = 9 - 40 = -31 < 0$: aucune racine réelle (deux racines complexes conjuguées).
 b) $\Delta' = 36 - 36 = 0$: racine double $x_0 = 12/8 = 3/2$.
 c) $\Delta = 25 - 24 = 1 > 0$, carré parfait : deux racines rationnelles, 2 et 3.

Exercice 2 — Racine double

Pour quelles valeurs de m l'équation $x^2 + 2mx + 4 = 0$ admet-elle une racine double ? Préciser cette racine.

Corrigé. $\Delta' = m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow m = 2$ ou $m = -2$. La racine double vaut $-b'/a = -m$: c'est -2 pour $m = 2$ et 2 pour $m = -2$.

Réponse : $m = \pm 2$

Exercice 3 — Rationnelles ou irrationnelles ?

Sans résoudre, dire si les racines sont rationnelles : a) $6x^2 - 5x + 1 = 0$ b) $x^2 - 4x + 1 = 0$.

Corrigé. a) $\Delta = 25 - 24 = 1 = 1^2$: racines rationnelles (ce sont $1/2$ et $1/3$).

b) $\Delta' = 4 - 1 = 3$, qui n'est pas un carré : racines irrationnelles conjuguées, $2 \pm \sqrt{3}$.

Exercice 4 — Toujours deux racines

Montrer que pour tout réel m , l'équation $x^2 - (m+1)x + m - 2 = 0$ admet deux racines réelles distinctes.

Corrigé. $\Delta = (m+1)^2 - 4(m-2) = m^2 - 2m + 9 = (m-1)^2 + 8$. C'est un carré plus 8, donc $\Delta \geq 8 > 0$ pour tout m .

Réponse : $\Delta = (m-1)^2 + 8 > 0$

Astuce clé : la mise sous forme canonique fait apparaître un carré.

Exercice 5 — Un grand classique

Soient a, b, c des réels. Montrer que l'équation $(x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) = 0$ a toujours des racines réelles, et qu'elles sont égales si et seulement si $a = b = c$.

Corrigé. En développant : $3x^2 - 2(a+b+c)x + (ab+bc+ca) = 0$. Donc

$$\begin{aligned}\Delta' &= (a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca) = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \\ &= \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \geq 0.\end{aligned}$$

Les racines sont donc réelles. Elles sont égales si et seulement si $\Delta' = 0$, c'est-à-dire si les trois carrés sont nuls : $a=b=c$.

Réponse : $\Delta' \geq 0$, avec égalité si et seulement si $a = b = c$

Astuce clé : l'astuce 3, la somme de carrés.

Exercice 6 — Avec une progression harmonique

Trois réels non nuls p, q, r sont en progression harmonique, c'est-à-dire que $1/p, 1/q, 1/r$ sont en progression arithmétique. On suppose p et r de même signe et $p \neq r$. Montrer que $px^2 + 2qx + r = 0$ n'a pas de racine réelle.

Corrigé. $2/q = 1/p + 1/r$ donne $q = 2pr/(p+r)$ (avec $p+r \neq 0$ car p et r ont le même signe). Alors

$$\Delta' = q^2 - pr = \frac{4p^2r^2}{(p+r)^2} - pr = \frac{pr[4pr - (p+r)^2]}{(p+r)^2} = -\frac{pr(p-r)^2}{(p+r)^2}.$$

Comme $pr > 0$ et $p \neq r$, on obtient $\Delta' < 0$.

Réponse : $\Delta' = -\frac{pr(p-r)^2}{(p+r)^2} < 0$: aucune racine réelle

Exercice 7 — Exponentielle et trigonométrie

Combien l'équation $e^{\sin x - \cos x} - e^{-(\sin x - \cos x)} = 4$ a-t-elle de solutions réelles ?

Corrigé. On pose $t = e^{\sin x - \cos x} > 0$ (astuce 5) : $t - \frac{1}{t} = 4 \iff t^2 - 4t - 1 = 0 \iff t = 2 \pm \sqrt{5}$.

Comme $t > 0$, seule $t = 2 + \sqrt{5} \approx 4,24$ est possible.

Or $\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4}) \leq \sqrt{2}$, donc $t \leq e^{\sqrt{2}} \approx 4,11$. La valeur 4,24 n'est jamais atteinte.

{ Réponse : aucune solution réelle

Astuce clé : après le changement de variable, toujours vérifier les bornes de t .

Exercice 8 — La somme des discriminants

Soient a, b, c, d des réels tels que $ac = 2(b + d)$. Montrer qu'au moins une des équations $x^2 + ax + b = 0$ et $x^2 + cx + d = 0$ a des racines réelles.

Corrigé. $\Delta_1 + \Delta_2 = (a^2 - 4b) + (c^2 - 4d) = a^2 + c^2 - 4(b + d) = a^2 + c^2 - 2ac = (a - c)^2 \geq 0$.
Les deux discriminants ne peuvent donc pas être tous les deux négatifs (astuce 4).

Réponse : $\Delta_1 + \Delta_2 = (a - c)^2 \geq 0$

Exercice 9 — Racines conjuguées

- a) Former une équation à coefficients entiers ayant pour racine $2 + \sqrt{3}$.
b) Former une équation à coefficients réels ayant pour racine $2 + i\sqrt{3}$.

Corrigé. a) L'autre racine est $2 - \sqrt{3}$: somme 4, produit $4 - 3 = 1$.
b) L'autre racine est $2 - i\sqrt{3}$: somme 4, produit $4 + 3 = 7$.

Réponse : a) $x^2 - 4x + 1 = 0$ b) $x^2 - 4x + 7 = 0$

Exercice 10 - Quand $a+b+c=0$

Soient $a \neq 0, b, c$ des rationnels tels que $a + b + c = 0$. Montrer, à l'aide de Δ , que les racines de $ax^2 + bx + c = 0$ sont rationnelles.

Corrigé. $b = -(a + c)$, donc $\Delta = (a + c)^2 - 4ac = (a - c)^2$: c'est le carré du rationnel $a - c$. Les racines sont rationnelles. On les retrouve d'ailleurs directement : 1 et c/a .

Réponse : $\Delta = (a - c)^2$

5 Entraînement**Entraînement 1**

Donner la nature des racines de $3x^2 + 2x - 1 = 0$.

Entraînement 2

Pour quelles valeurs de m l'équation $x^2 - (m + 2)x + 4 = 0$ a-t-elle une racine double ?

Entraînement 3

Pour quelles valeurs de m l'équation $x^2 + 2x + m = 0$ n'a-t-elle aucune racine réelle ?

Entraînement 4 ★★

Montrer que, pour tout réel k , l'équation $(x - 1)(x - 2) = k^2$ a deux racines réelles distinctes.

Entraînement 5 ★★

Former une équation à coefficients entiers ayant pour racine $3 - \sqrt{2}$.

Entraînement 6 ★★

Sachant que $b + d = 5$, montrer qu'au moins une des équations $x^2 + 2x + b = 0$ et $x^2 + 6x + d = 0$ a des racines réelles.

Entraînement 7 ★★★

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $e^x + e^{-x} = 3$.

Réponses de l'entraînement

1. $\Delta = 16 = 4^2$: deux racines rationnelles, $1/3$ et -1 .

2. $\Delta = (m+2)^2 - 16 = 0$: $m = 2$ ou $m = -6$.

3. $\Delta' = 1 - m < 0$: $m > 1$.

4. $x^2 - 3x + 2 - k^2 = 0$: $\Delta = 1 + 4k^2 > 0$.

5. Somme 6, produit $9 - 2 = 7$: $x^2 - 6x + 7 = 0$.

6. $\Delta'_1 + \Delta'_2 = (1 - b) + (9 - d) = 10 - 5 = 5 > 0$.

7. $t = e^x > 0$: $t^2 - 3t + 1 = 0$, $t = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ (toutes deux positives) : $x = \ln \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ ou $x = \ln \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$.