

Relations entre racines et coefficients

Équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$

Auteur : Maths Olympiad

1. L'essentiel du cours
2. Formulaire des expressions symétriques
3. Les 6 astuces à connaître Niveaux : ★ facile ★★ moyen ★★★ JEE
4. 10 exercices corrigés (dont JEE Advanced)
5. 7 exercices d'entraînement + réponses

1 L'essentiel du cours

Rappel : résolution de $ax^2 + bx + c = 0$

Soient a, b, c des réels avec $a \neq 0$. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$ (le discriminant). Les racines sont

$$\alpha, \beta = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Si $\Delta > 0$: deux racines réelles distinctes ; si $\Delta = 0$: une racine double ; si $\Delta < 0$: deux racines complexes conjuguées (non réelles).

Théorème — Relations de Viète

Si α et β sont les racines de $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$), alors

$$\boxed{S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}} \quad \boxed{P = \alpha\beta = \frac{c}{a}} \quad \boxed{(\alpha - \beta)^2 = \frac{\Delta}{a^2}}$$

En particulier, si $\Delta \geq 0$: $|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$.

Démonstration. Le trinôme se factorise : $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta) = ax^2 - a(\alpha + \beta)x + a\alpha\beta$. En identifiant les coefficients : $b = -a(\alpha + \beta)$ et $c = a\alpha\beta$. Enfin

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = \frac{b^2}{a^2} - \frac{4c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{a^2} = \frac{\Delta}{a^2}.$$

Former une équation dont on connaît les racines

Réciproque

Les nombres de somme S et de produit P sont exactement les racines de

$$\boxed{x^2 - Sx + P = 0} \quad \text{c'est-à-dire} \quad x^2 - (\text{somme})x + (\text{produit}) = 0.$$

Exemple. Deux nombres ont pour somme 7 et pour produit 12 : ce sont les racines de $x^2 - 7x + 12 = 0$, soit 3 et 4.

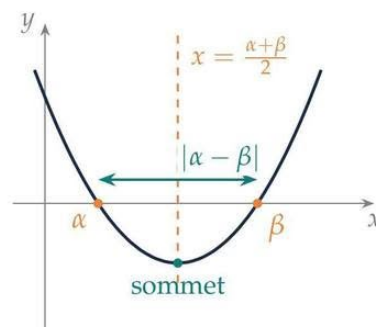
Lecture graphique

La parabole $y = ax^2 + bx + c$ coupe l'axe des abscisses en α et β . Son axe de symétrie passe au milieu des racines :

$$x_{\text{sommet}} = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{S}{2} = -\frac{b}{2a}.$$

On retrouve ainsi l'abscisse du sommet sans calcul,

$$\text{et les racines s'écrivent } \frac{S}{2} \pm \frac{|\alpha - \beta|}{2}.$$



Pièges à éviter

- Toujours vérifier que $a \neq 0$: sinon l'équation n'est pas du second degré.
- + Les relations de Viète restent vraies pour des racines complexes : inutile de les calculer (voir exercices 5 et 9).
- + Dès qu'on impose une condition sur des racines réelles (signe, position...), ne jamais oublier $\Delta \geq 0$ (ou $\Delta > 0$ si elles doivent être distinctes).
- Dans $|\alpha - \beta| = \sqrt{\Delta}/|a|$, la valeur absolue porte sur a !

2 Formulaire des expressions symétriques

Une expression est symétrique si elle ne change pas quand on échange α et β . C'est le cœur de la méthode : toute expression symétrique s'écrit avec S et P seulement.

Expression	En fonction de S et P
$\alpha^2 + \beta^2$	$S^2 - 2P$
$\alpha^3 + \beta^3$	$S^3 - 3PS$
$\alpha^4 + \beta^4$	$(S^2 - 2P)^2 - 2P^2$
$(\alpha - \beta)^2$	$S^2 - 4P$
$\alpha^2 - \beta^2$	$S(\alpha - \beta) = \pm S\sqrt{S^2 - 4P}$
$\alpha^2\beta + \alpha\beta^2$	PS
$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$	$\frac{S}{P}$
$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$	$\frac{S^2 - 2P}{P^2}$
$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$	$\frac{S^2 - 2P}{P}$
$(\alpha + k)(\beta + k)$	$P + kS + k^2$

Exemple rapide. Pour $x^2 - 3x + 1 = 0$: $S = 3$, $P = 1$, donc $\alpha^2 + \beta^2 = 9 - 2 = 7$ et $\alpha^3 + \beta^3 = 27 - 9 = 18$,

sans jamais calculer $\alpha = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

3 Les 6 astuces à connaître

Astuce 1 | Abaisser les degrés

Comme $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$, on a $\alpha^2 = -\frac{b\alpha + c}{a}$. On remplace α^2 partout, puis $\alpha^3 = \alpha \cdot \alpha^2$, etc. Toute expression polynomiale en α se ramène à la forme $p\alpha + q$.

Exemple. Si $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$: $\alpha^2 = \alpha + 1$, $\alpha^3 = \alpha^2 + \alpha = 2\alpha + 1$, $\alpha^4 = 2\alpha^2 + \alpha = 3\alpha + 2$.

Astuce 2 | La récurrence des puissances

Posons $s_n = \alpha^n + \beta^n$ (cela marche aussi pour $\alpha^n - \beta^n$ ou toute combinaison $u\alpha^n + v\beta^n$). En multipliant $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ par α^n (idem pour β) puis en additionnant :

$$a s_{n+2} + b s_{n+1} + c s_n = 0 \quad \text{avec } s_0 = 2, s_1 = S.$$

Exemple. Pour $x^2 - 3x + 1 = 0$: $s_{n+2} = 3s_{n+1} - s_n$, donc $s_2 = 3 \times 3 - 2 = 7$, $s_3 = 3 \times 7 - 3 = 18$, $s_4 = 3 \times 18 - 7 = 47$.

Astuce 3 | Les équations transformées

Si α, β sont les racines de $ax^2 + bx + c = 0$:

Racines voulues	Équation
$-\alpha, -\beta$	$ax^2 - bx + c = 0$
$\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ ($c \neq 0$)	$cx^2 + bx + a = 0$ (on «retourne» les coefficients)
$k\alpha, k\beta$	$ax^2 + kbx + k^2c = 0$
$\alpha + h, \beta + h$	$a(x - h)^2 + b(x - h) + c = 0$
α^2, β^2	$a^2x^2 - (b^2 - 2ac)x + c^2 = 0$

Principe général : si la nouvelle racine est $y = f(\alpha)$, on exprime α en fonction de y et on remplace dans l'équation. Sinon, on calcule la nouvelle somme et le nouveau produit.

Astuce 4 | Le signe des racines sans les calculer

On suppose $\Delta \geq 0$ (racines réelles).

- $P < 0$: racines de signes contraires (et alors $\Delta > 0$ automatiquement, car $ac < 0$).
- + $P > 0$ et $S > 0$: deux racines positives.
- + $P > 0$ et $S < 0$: deux racines négatives.
- $P = 0$: l'une des racines est nulle. $S = 0$: racines opposées.

Astuce 5 | La racine commune

Si deux équations ont une racine commune x_0 , on soustrait (après avoir égalisé les coefficients de x^2) pour éliminer x_0^2 : il reste une équation du premier degré qui donne x_0 .

Formule directe : si $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ et $a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$ ont une racine commune, alors

$$(c_1a_2 - c_2a_1)^2 = (a_1b_2 - a_2b_1)(b_1c_2 - b_2c_1).$$

Astuce 6 | Ajouter la bonne constante pour factoriser

$$xy + px + qy = (x + q)(y + p) - pq$$

Quand les racines doivent être entières, une relation entre S et P devient un produit égal à une constante : il ne reste qu'à lister ses diviseurs.

Exemple. $\alpha\beta + 2\alpha + 2\beta + 1 = 0 \Leftrightarrow (\alpha + 2)(\beta + 2) = 3$ (voir exercice 10).

La méthode en 3 réflexes

1. Écrire immédiatement S et P pour chaque équation.
2. Exprimer la quantité demandée avec S et P (formulaire) ou abaisser les degrés (astuces 1 et 2).
3. Vérifier les conditions : $a \neq 0$, signe de Δ , racines distinctes ou non.

4 Exercices corrigés

Exercice 1 — Echauffement

Soient α et β les racines de $2x^2 - 5x + 1 = 0$. Sans calculer α et β , déterminer :

a) $\alpha^2 + \beta^2$ b) $\alpha^3 + \beta^3$ c) $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$ d) $|\alpha - \beta|$

Corrigé. $\Delta = 25 - 8 = 17 > 0$, les racines sont réelles. $S = \frac{5}{2}$ et $P = \frac{1}{2}$.

a) $\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P = \frac{25}{4} - 1 = \frac{21}{4}$.

b) $\alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3PS = \frac{125}{8} - \frac{15}{4} = \frac{95}{8}$.

c) $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{P^2} = \frac{21/4}{1/4} = 21$.

d) $|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{17}}{2}$.

Réponse : $\frac{21}{4}$; $\frac{95}{8}$; 21; $\frac{\sqrt{17}}{2}$

Exercice 2 — Signe des racines

Pour quelles valeurs du réel m l'équation $x^2 - 2(m - 1)x + m + 5 = 0$ admet-elle deux racines réelles distinctes et strictement positives ?

Corrigé. D'après l'astuce 4, il faut $\Delta > 0$, $P > 0$ et $S > 0$.

• $\Delta = 4(m - 1)^2 - 4(m + 5) = 4(m^2 - 3m - 4) = 4(m + 1)(m - 4) > 0 \Leftrightarrow m < -1 \text{ ou } m > 4$.

• $P = m + 5 > 0 \Leftrightarrow m > -5$.

• $S = 2(m - 1) > 0 \Leftrightarrow m > 1$.

L'intersection des trois conditions donne $m > 4$.

Réponse : $m \in]4 ; +\infty[$

Astuce clé : une condition sur le signe des racines = trois conditions (Δ , S, P).

Exercice 3 — Equation transformée

Soient α et β les racines de $x^2 - 3x + 1 = 0$. Former l'équation du second degré dont les racines sont $\alpha + \frac{1}{\beta}$ et $\beta + \frac{1}{\alpha}$.

Corrigé. On a $S = 3$ et $P = 1$. Nouvelle somme :

$$S' = (\alpha + \beta) + \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) = S + \frac{S}{P} = 3 + 3 = 6.$$

Nouveau produit :

$$P' = \left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right) \left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right) = \alpha\beta + 1 + 1 + \frac{1}{\alpha\beta} = 1 + 2 + 1 = 4.$$

Réponse : $x^2 - 6x + 4 = 0$

Exercice 4 — Racine commune

Déterminer les réels k pour lesquels les équations $x^2 + kx + 1 = 0$ et $x^2 + x + k = 0$ ont une racine commune.

Corrigé. Soit x_0 une racine commune. En soustrayant les deux égalités :

$$(k - 1)x_0 + (1 - k) = 0 \Leftrightarrow (k - 1)(x_0 - 1) = 0.$$

- Si $k = 1$: les deux équations sont identiques ($x^2 + x + 1 = 0$) ; elles ont leurs deux racines (complexes) en commun.
- Si $k \neq 1$: $x_0 = 1$, et en remplaçant dans $x^2 + x + k = 0$: $1 + 1 + k = 0$, donc $k = -2$.
Vérification avec $k = -2$: $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$ et $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$ ont bien la racine 1 en commun.

Réponse : $k = -2$ (racine commune 1) ; et $k = 1$ si l'on accepte les racines complexes

Exercice 5 — Abaisser les degrés (type JEE Main)

Soient α et β les racines de $x^2 - 2x + 3 = 0$. L'équation dont les racines sont

$$\alpha^3 - 3\alpha^2 + 5\alpha - 2 \quad \text{et} \quad \beta^3 - \beta^2 + \beta + 5$$

est : (A) $x^2 - 3x + 2 = 0$ (B) $x^2 - 2x + 1 = 0$ (C) $x^2 - 4x + 3 = 0$ (D) $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Corrigé. Les racines sont complexes ($\Delta = -8$), mais on n'a pas besoin de les calculer (astuce 1). De $\alpha^2 - 2\alpha + 3 = 0$ on tire $\alpha^2 = 2\alpha - 3$, puis $\alpha^3 = 2\alpha^2 - 3\alpha$. Donc

$$\alpha^3 - 3\alpha^2 + 5\alpha - 2 = (2\alpha^2 - 3\alpha) - 3\alpha^2 + 5\alpha - 2 = -(\alpha^2 - 2\alpha) - 2 = -(-3) - 2 = 1.$$

De même, $\beta^3 = 2\beta^2 - 3\beta$, donc

$$\beta^3 - \beta^2 + \beta + 5 = (2\beta^2 - 3\beta) - \beta^2 + \beta + 5 = (\beta^2 - 2\beta) + 5 = -3 + 5 = 2.$$

Les nouvelles racines sont 1 et 2 : somme 3, produit 2.

Réponse : (A) $x^2 - 3x + 2 = 0$

Astuce clé : repérer $\alpha^2 - 2\alpha = -3$ dans le calcul, c'est-à-dire réutiliser l'équation elle-même.

Exercice 6 — Récurrence des puissances (d'après JEE Main 2015)

Soient α et β les racines de $x^2 - 6x - 2 = 0$, avec $\alpha > \beta$. On pose $a_n = \alpha^n - \beta^n$ pour $n \geq 1$. La valeur de $\frac{a_{10} - 2a_8}{2a_9}$ est : (A) 6 (B) -6 (C) 3 (D) -3.

Corrigé. $\alpha^2 = 6\alpha + 2$. En multipliant par α^8 : $\alpha^{10} = 6\alpha^9 + 2\alpha^8$, soit $\alpha^{10} - 2\alpha^8 = 6\alpha^9$. De même $\beta^{10} - 2\beta^8 = 6\beta^9$. En soustrayant :

$$a_{10} - 2a_8 = 6a_9 \implies \frac{a_{10} - 2a_8}{2a_9} = \frac{6a_9}{2a_9} = 3.$$

Réponse : (C) 3

Astuce clé : c'est exactement la relation $s_{n+2} = 6s_{n+1} + 2s_n$ de l'astuce 2, appliquée à a_n .

Exercice 7 — Inverses en progression arithmétique (réponse numérique)

Soient a et b deux réels non nuls. On suppose que p et r sont les racines de $x^2 - 8ax + 2a = 0$, que

q et s sont les racines de $x^2 + 12bx + 6b = 0$, et que $1/p, 1/q, 1/r, 1/s$ sont, dans cet ordre, en progression arithmétique. Calculer $a^{-1} - b^{-1}$.

Corrigé. Viète : $p + r = 8a$, $pr = 2a$ et $q + s = -12b$, $qs = 6b$. On en déduit

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = \frac{p+r}{pr} = \frac{8a}{2a} = 4, \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{s} = \frac{q+s}{qs} = \frac{-12b}{6b} = -2.$$

Dans une progression arithmétique, chaque terme est la moyenne de ses deux voisins :

- $\frac{1}{q}$ est la moyenne de $\frac{1}{p}$ et $\frac{1}{r}$: $\frac{2}{q} = 4$, donc $\frac{1}{q} = 2$.
- $\frac{1}{r}$ est la moyenne de $\frac{1}{q}$ et $\frac{1}{s}$: $\frac{2}{r} = -2$, donc $\frac{1}{r} = -1$.

La raison vaut $-1 - 2 = -3$, d'où $1/p = 5$ et $1/s = -4$. Enfin :

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{pr} = 2 \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{r} = 2 \times 5 \times (-1) = -10, \quad \frac{1}{b} = \frac{6}{qs} = 6 \cdot \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{s} = 6 \times 2 \times (-4) = -48.$$

Réponse : $a^{-1} - b^{-1} = -10 - (-48) = 38$

Astuce clé : travailler directement avec les inverses $1/p, 1/q, \dots$ plutôt qu'avec $p, q, \dots$

Exercice 8 — Système croisé (classique JEE)

Les nombres a et b sont les racines de $x^2 - 10cx - 11d = 0$, et c et d sont les racines de $x^2 - 10ax - 11b = 0$. Sachant que a, b, c, d sont deux à deux distincts, calculer $a + b + c + d$.

Corrigé. Viète donne : $a + b = 10c$, $ab = -11d$, $c + d = 10a$, $cd = -11b$. Donc $a + b + c + d = 10(a + c)$: il suffit de trouver $a + c$.

Étape 1. a est racine de la 1^{re} équation et c de la 2^e :

$$a^2 - 10ac - 11d = 0, \quad c^2 - 10ac - 11b = 0.$$

En soustrayant : $a^2 - c^2 = 11(d - b)$, soit $(a - c)(a + c) = 11(d - b)$.

Étape 2. En soustrayant les sommes : $(a+b) - (c+d) = 10c - 10a$, d'où $b - d = 11c - 11a$, c'est-à-dire $d - b = 11(a - c)$.

Étape 3. On remplace : $(a - c)(a + c) = 121(a - c)$. Comme $a \neq c$, on simplifie : $a + c = 121$.

Réponse : $a + b + c + d = 10 \times 121 = 1210$

Astuce clé : utiliser à la fois Viète et le fait que chaque racine vérifie son équation.

Exercice 9 — JEE Advanced 2020

Soient a, b les racines réelles distinctes de $x^2 + 20x - 2020$ et c, d les racines complexes distinctes de $x^2 - 20x + 2020$. La valeur de

$$ac(a - c) + ad(a - d) + bc(b - c) + bd(b - d)$$

est: (A) 0 (B) 8000 (C) 8080 (D) 16000.

Corrigé. Viète : $a + b = -20$, $ab = -2020$ et $c + d = 20$, $cd = 2020$. On développe et on regroupe :

$$E = a^2c - ac^2 + a^2d - ad^2 + b^2c - bc^2 + b^2d - bd^2 = (a^2 + b^2)(c + d) - (c^2 + d^2)(a + b).$$

Donc $E = 20(a^2 + b^2) + 20(c^2 + d^2) = 20(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$. Avec le formulaire :

$$a^2 + b^2 = (-20)^2 - 2(-2020) = 4440, \quad c^2 + d^2 = 20^2 - 2(2020) = -3640.$$

(Le résultat négatif n'est pas choquant : c et d sont complexes.) Ainsi

$$E = 20 \times (4440 - 3640) = 20 \times 800 = 16000.$$

Réponse : (D) 16000

Astuce clé : regrouper selon $(c + d)$ et $(a + b)$ pour faire apparaître les sommes de Viète.

Exercice 10 — JEE Advanced 2026 — plusieurs réponses possibles

Soient a, b, c des entiers strictement positifs, en progression arithmétique, tels que l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'ait que des solutions entières. Quelles affirmations sont vraies ?

- (A) $c - b$ est un multiple entier de a .
- (B) Les deux racines de $ax^2 + bx + c = 0$ sont des entiers impairs.
- (C) Si $c = 15$, alors $ab = 8$.
- (D) Si $b = 8$, alors $x = 3$ est une racine de $ax^2 + bx + c = 0$.

Corrigé. Progression arithmétique : $2b = a + c$. En divisant par a : $2 \cdot \frac{b}{a} = 1 + \frac{c}{a}$, soit avec Viète $-2(\alpha + \beta) = 1 + \alpha\beta$, c'est-à-dire

$$\alpha\beta + 2\alpha + 2\beta + 1 = 0 \iff (\alpha + 2)(\beta + 2) = 3 \quad (\text{astuce 6}).$$

Les racines étant entières, $\{\alpha + 2, \beta + 2\} = \{1, 3\}$ ou $\{-1, -3\}$, donc $\{\alpha, \beta\} = \{-1, 1\}$ ou $\{-3, -5\}$.

- $\{-1, 1\}$: $\alpha + \beta = 0$ donne $b = 0$, impossible car $b > 0$.
- $\{-3, -5\}$: $\alpha + \beta = -8$ et $\alpha\beta = 15$, donc $b = 8a$ et $c = 15a$ (on vérifie : $a, 8a, 15a$ est bien arithmétique de raison $7a$).
- (A) $c - b = 15a - 8a = 7a$: vrai.
- (B) -3 et -5 sont impairs : vrai.
- (C) $c = 15 > a = 1, b = 8$, donc $ab = 8$: vrai.
- (D) $b = 8 \Rightarrow a = 1, c = 15$: les racines sont -3 et -5 , pas 3 : faux.

Réponse : (A), (B) et (C)

Astuce clé : traduire la condition sur les coefficients en relation sur les racines, puis factoriser.

5 Entraînement

Entraînement 1

Soient α, β les racines de $x^2 - 4x + 2 = 0$. Calculer $\alpha^4 + \beta^4$.

Entraînement 2

Former l'équation dont les racines sont les carrés des racines de $x^2 - 5x + 3 = 0$.

Entraînement 3

Soient α, β les racines de $3x^2 + 7x - 2 = 0$. Calculer $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$.

Entraînement 4 ★★

Montrer que si l'une des racines de $x^2 - px + q = 0$ est le double de l'autre, alors $2p^2 = 9q$.

Entraînement 5 ★★

Soient α, β les racines de $x^2 - x - 1 = 0$. Calculer $\alpha^5 + \beta^5$ (utiliser l'astuce 2).

Entraînement 6 ★★

Pour quelle valeur de m la somme des carrés des racines de $x^2 + (m - 2)x - m = 0$ est-elle minimale?

Entraînement 7 ★★★

Les racines de $x^2 - px + r = 0$ sont α et β , et celles de $x^2 - qx + r = 0$ sont $\alpha/2$ et 2β . Exprimer r en fonction de p et q .

Réponses de l'entraînement

1. $S = 4, P = 2 : \alpha^2 + \beta^2 = 12$, donc $\alpha^4 + \beta^4 = 144 - 8 = 136$.
2. Nouvelle somme $S^2 - 2P = 19$, nouveau produit $P^2 = 9 : x^2 - 19x + 9 = 0$.
3. $S = -\frac{7}{3}, P = -\frac{2}{3} : \frac{S^2 - 2P}{P} = -\frac{61}{6}$.
4. Racines t et $2t : 3t = p$ et $2t^2 = q$, donc $q = 2 \cdot \frac{p^2}{9}$, soit $2p^2 = 9q$.
5. $s_{n+2} = s_{n+1} + s_n$ avec $s_0 = 2, s_1 = 1 : 3, 4, 7, 11$. Réponse : 11.
6. $\alpha^2 + \beta^2 = (m - 2)^2 + 2m = (m - 1)^2 + 3$ (et $\Delta = m^2 + 4 > 0$) ; minimum 3 pour $m = 1$.
7. $\alpha + \beta = p$ et $\frac{\alpha}{2} + 2\beta = q$ donnent $\beta = \frac{2q - p}{3}, \alpha = \frac{2(2p - q)}{3} : r = \alpha\beta = \frac{2}{9}(2p - q)(2q - p)$.