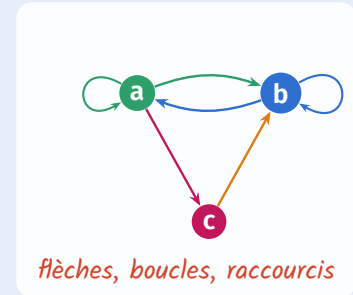


Les relations binaires

Méthodes, astuces et pièges : de la base au concours



Dans cette fiche

1. Relation : trois façons de la voir
2. Les quatre propriétés (avec la « lecture express » sur la grille et sur le graphe)
3. Relations d'équivalence et classes
4. Relations d'ordre
5. Compter les relations : formules de concours
6. 12 exercices sur 4 niveaux, tous corrigés

1 Une relation, trois façons de la voir

Définition : relation binaire

Soit E un ensemble. Une **relation binaire** $\mathcal{R}$ sur E est une partie de $E \times E$. On écrit $x \mathcal{R} y$ pour dire que le couple (x, y) appartient à $\mathcal{R}$. Plus généralement, une relation de E vers F est une partie de $E \times F$.

Exemple : une même relation, trois dessins

Sur $E = \{1, 2, 3, 4\}$, on pose $x \mathcal{R} y \iff y - x \in \{0; 2\}$.

Liste : $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$.



Diagramme sagittal : une flèche de x vers y pour chaque couple, une boucle pour (x, x) .

$x \backslash y$	1	2	3	4
1				
2				
3				
4				

Grille : ligne x , colonne y .

Domaine : $\{x : \exists y, x \mathcal{R} y\}$.

Image : $\{y : \exists x, x \mathcal{R} y\}$.

Ici, tous deux valent E .

Définition : réciproque et identité

La **relation réciproque** de $\mathcal{R}$ est $\mathcal{R}^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in \mathcal{R}\}$: on **retourne toutes les flèches**, et la grille est **symétrisée par rapport à sa diagonale**. L'**identité** de E est $I_E = \{(x, x) : x \in E\}$: uniquement des boucles, seulement la diagonale de la grille.

2

Les quatre propriétés

Définitions et lecture express

Propriété	Définition	Sur la grille	Sur le graphe
réflexive	$\forall x \in E, x \mathcal{R} x$	toute la diagonale est coloriée	une boucle en chaque point
symétrique	$x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$	symétrique par rapport à la diagonale	chaque flèche a son retour
antisymétrique	$(x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} x) \Rightarrow x = y$	jamais deux cases symétriques hors diagonale	aucun aller-retour entre deux points distincts
transitive	$(x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} z) \Rightarrow x \mathcal{R} z$	(pas de lecture immédiate)	chaque chemin de deux flèches a son « raccourci »

Méthode : démontrer ou réfuter une propriété

1. Pour **démontrer**, on part d'éléments **quelconques** : « soient $x, y \in E$ tels que $x \mathcal{R} y$... ». 2. Pour **réfuter**, un **seul contre-exemple** suffit, avec des éléments explicites. 3. Pour la transitivité, on écrit les deux hypothèses avec deux paramètres puis on les **combine** (on additionne, on multiplie, on compose...).

Exemple : sur $\mathbb{Z} : x \mathcal{R} y \iff x + 2y$ est multiple de 3

Réflexive : $x + 2x = 3x$. **Symétrique** : si $x + 2y = 3k$, alors $y + 2x = 3(x + y) - (x + 2y) = 3(x + y - k)$. **Transitive** : si $x + 2y = 3k$ et $y + 2z = 3m$, alors $x + 2z = 3k + 3m - 3y$. C'est donc une relation d'équivalence (section 3), et en fait $x \mathcal{R} y \iff x \equiv y [3]$, puisque $x + 2y = (x - y) + 3y$.

Attention, piège ! « symétrique + transitive $\Rightarrow$ réflexive »

Le « raisonnement » $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} x$ donc $x \mathcal{R} x$ suppose qu'il **existe** un y en relation avec x . Contre-exemple : sur $E = \{1, 2\}$, $\mathcal{R} = \{(1, 1)\}$ est symétrique et transitive, mais $2 \mathcal{R} 2$ est faux. De même, la relation **vide** est symétrique, antisymétrique et transitive (rien à vérifier), mais pas réflexive si $E \neq \emptyset$.

Attention, piège ! symétrique $\neq$ contraire d'antisymétrique

I_E est à la fois symétrique **et** antisymétrique. Sur $\{1, 2, 3\}$, $\{(1, 2), (2, 1), (1, 3)\}$ n'est **ni** l'une **ni** l'autre.

Attention, piège ! le cas $z = x$ dans la transitivité

$\{(1, 2), (2, 1)\}$ n'est pas transitive : $1 \mathcal{R} 2$ et $2 \mathcal{R} 1$ imposent $1 \mathcal{R} 1$, qui manque.

★ **Astuce de concours : traduire avec des ensembles**

$\mathcal{R}$ réflexive $\iff I_E \subset \mathcal{R}$; symétrique $\iff \mathcal{R}^{-1} = \mathcal{R}$; antisymétrique $\iff \mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1} \subset I_E$.
Ces écritures rendent certaines preuves immédiates : par exemple, l'intersection de deux relations réflexives (ou symétriques, ou transitives) l'est encore.

3

Équivalences et classes**Définition : relation d'équivalence, classe**

$\mathcal{R}$ est une **relation d'équivalence** si elle est réflexive, symétrique et transitive. La **classe** de x est $\bar{x} = \{y \in E : x \mathcal{R} y\}$, et l'ensemble des classes se note $E/\mathcal{R}$.

Théorème : les classes forment une partition

Les classes sont **non vides** ($x \in \bar{x}$), **deux à deux disjointes ou égales** ($\bar{x} = \bar{y} \iff x \mathcal{R} y$) et leur **réunion est** E . Réciproquement, toute partition de E définit une relation d'équivalence : « être dans le même morceau ».

★ **Astuce de concours : la méthode « $f(x) = f(y)$ » : zéro vérification**

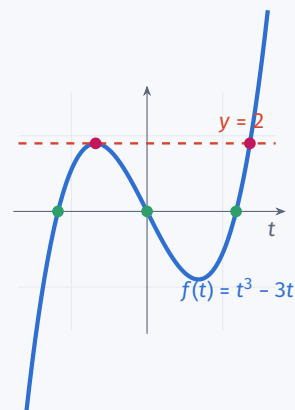
Si $x \mathcal{R} y \iff f(x) = f(y)$ pour une application f définie sur E , alors $\mathcal{R}$ est **automatiquement** une relation d'équivalence, car l'égalité l'est. **Les classes sont les ensembles** $\{t \in E : f(t) = f(x)\}$ et il y en a autant que de valeurs prises par f . Réflexe : **chercher à « séparer les variables »** pour faire apparaître $f(x) = f(y)$.

Exemple : sur $\mathbb{R} : x \mathcal{R} y \iff x^3 - y^3 = 3(x - y)$

On sépare les variables : $x^3 - 3x = y^3 - 3y$, donc $f(t) = t^3 - 3t$ et $\mathcal{R}$ est une équivalence. La classe de x est l'ensemble des solutions de $t^3 - 3t = f(x)$.

- $\bar{0} : t^3 - 3t = 0$, donc $\bar{0} = \{-\sqrt{3}; 0; \sqrt{3}\}$ (3 éléments) ;
- $\bar{2} : t^3 - 3t - 2 = (t-2)(t+1)^2$, donc $\bar{2} = \{-1; 2\}$ (2 éléments) ;
- $\bar{3} : t^3 - 3t - 18 = (t-3)(t^2 + 3t + 6)$, donc $\bar{3} = \{3\}$.

Lecture graphique : la classe de x se lit sur la droite horizontale $y = f(x)$; elle a 3 éléments exactement quand $|f(x)| < 2$.

**Attention, piège ! « être proche » n'est pas une équivalence**

$x \mathcal{R} y \iff |x - y| \leq 1$ est réflexive et symétrique, mais $0 \mathcal{R} 1$, $1 \mathcal{R} 2$ et pas $0 \mathcal{R} 2$: pas transitive.

★ **Astuce de concours : compter les couples**

Une équivalence dont les classes ont $n_1, \dots, n_k$ éléments contient $n_1^2 + \dots + n_k^2$ couples (chaque classe de n_i éléments donne un carré plein de n_i^2 cases dans la grille).

Méthode : la plus petite équivalence contenant des couples donnés

On **regroupe** les éléments reliés, de proche en proche, puis on ajoute les singletons. Exemple : sur $\{1, \dots, 6\}$, avec $(1, 3)$, $(3, 5)$ et $(2, 6)$, les classes sont $\{1, 3, 5\}$, $\{2, 6\}$ et $\{4\}$; la relation contient $9 + 4 + 1 = 14$ couples.

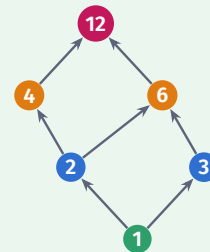
4 Relations d'ordre

Définition : relation d'ordre

$\mathcal{R}$ est une **relation d'ordre** si elle est réflexive, **antisymétrique** et transitive. L'ordre est **total** si deux éléments sont toujours comparables ($x \mathcal{R} y$ ou $y \mathcal{R} x$), sinon il est **partiel**.

Exemple : la divisibilité

Sur $\mathbb{N}^*$, « a divise b » est une relation d'ordre : $a \mid b$ et $b \mid a$ donnent $a = b$ (entiers positifs). L'ordre est **partiel** : ni $2 \mid 3$, ni $3 \mid 2$. Le dessin des diviseurs de 12 (on ne trace que les flèches « directes », les boucles et les raccourcis étant sous-entendus) montre deux chemins de 1 à 12.



Attention, piège ! la divisibilité sur $\mathbb{Z}$

Sur $\mathbb{Z}$, « divise » n'est **pas** antisymétrique : $2 \mid -2$ et $-2 \mid 2$, mais $2 \neq -2$. Le même énoncé change de nature selon l'ensemble !

5

Compter les relations

Formules de concours : E a n éléments

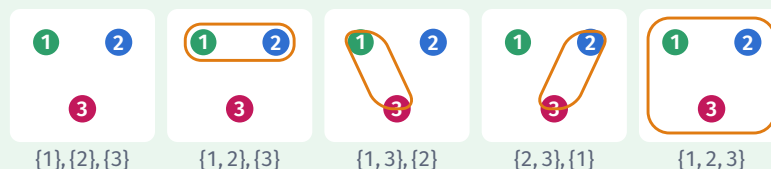
La grille a n^2 cases : n sur la diagonale et $\frac{n(n-1)}{2}$ paires de cases symétriques hors diagonale.
Une relation = un choix « colorier ou non » pour chaque case.

Relations...	Nombre	Pour $n = 3$	Idée
toutes	2^{n^2}	512	chaque case : 2 choix
réflexives	2^{n^2-n}	64	diagonale imposée
symétriques	$2^{\frac{n(n+1)}{2}}$	64	diagonale + une case par paire
réflexives et symétriques	$2^{\frac{n(n-1)}{2}}$	8	une case par paire
antisymétriques	$2^n \times 3^{\frac{n(n-1)}{2}}$	216	paire : rien, (i, j) ou (j, i)
symétriques et antisymétriques	2^n	8	ce sont les parties de I_E
d'équivalence	nb de partitions	5	1, 2, 5, 15, 52 ($n = 1$ à 5)
d'ordre total	$n!$	6	ranger les éléments

De E (m éléments) vers F (n éléments), il y a 2^{mn} relations.

★ Astuce de concours : les 5 équivalences sur $\{1, 2, 3\}$

Une équivalence = une partition : tout le monde seul (1 façon), une paire et un singleton (3 façons), tout le monde ensemble (1 façon). Total : $1 + 3 + 1 = 5$.



Attention, piège ! ne pas confondre les deux comptes

« Nombre de relations d'équivalence » (des partitions : 5 pour $n = 3$) et « nombre de couples d'une équivalence » (somme des carrés des tailles des classes). Lis bien la question !

6

Exercices

Niveau 1 · Bases ★

Exercice 1 Lire une grille ★

corrigé p. 8

Sur $E = \{1, 2, 3, 4\}$, la relation $\mathcal{R}$ est donnée par la grille ci-contre (ligne x , colonne y).

$x \backslash y$	1	2	3	4
1				
2				
3				
4				

1. Écrire $\mathcal{R}$ comme ensemble de couples, puis $\mathcal{R}^{-1}$.
2. $\mathcal{R}$ est-elle réflexive ? symétrique ? antisymétrique ? transitive ?

Exercice 2 Un diagramme à boucles ★

corrigé p. 8

Sur $E = \{a, b, c\}$, on pose $\mathcal{R} = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c)\}$. Dessiner le diagramme sagittal, montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et donner ses classes.

Exercice 3 Domaine, image, réciproque ★

corrigé p. 8

Sur $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, on pose $\mathcal{R} = \{(1, 2), (2, 3), (3, 3), (4, 1)\}$. Donner le domaine, l'image et $\mathcal{R}^{-1}$. Quels couples faut-il ajouter, au minimum, pour que $\mathcal{R}$ devienne transitive ?

Niveau 2 · Bac ★★

Exercice 4 Des classes à deux éléments ★★

corrigé p. 8

Sur $\mathbb{R}^*$, on pose $x \mathcal{R} y \iff x + \frac{1}{x} = y + \frac{1}{y}$. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et déterminer la classe de tout réel $x \neq 0$. Quelles classes n'ont qu'un élément ?

Exercice 5 Les carrés modulo 3 ★★

corrigé p. 8

Sur $\mathbb{Z}$, on pose $x \mathcal{R} y \iff 3 \mid x^2 - y^2$. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et déterminer ses classes. Combien y en a-t-il ?

Exercice 6 Vrai ou faux sur $\mathbb{R}$ ★★

corrigé p. 8

Pour chaque relation, dire si elle est réflexive (Ré), symétrique (S), antisymétrique (A), transitive (T) : (a) $x - y \in \mathbb{Z}$; (b) $xy \geq 0$; (c) $|x| \leq |y|$; (d) $x < y$.

Niveau 3 · Approfondissement ★★★

Exercice 7 La plus petite équivalence ★★★

corrigé p. 8

Sur $E = \{1, 2, \dots, 8\}$, déterminer la plus petite relation d'équivalence contenant les couples $(1, 4)$, $(4, 7)$, $(2, 5)$, $(5, 8)$ et $(3, 6)$. Donner ses classes et son nombre de couples.

Exercice 8 L'ordre de la divisibilité ★★★

corrigé p. 9

On considère $D = \{2, 3, 4, 6\}$ muni de la relation « a divise b ».

1. Dessiner le schéma des flèches « directes ». Quels éléments ne divisent aucun autre élément de D (éléments maximaux) ? Quels éléments ne sont divisés par aucun autre (éléments minimaux) ?
2. D a-t-il un plus grand élément ? un plus petit ? Que change l'ajout de 12 ?

Exercice 9 L'équivalence associée à une application ★★★

corrigé p. 9

Soit $f : E \rightarrow F$ une application et $x \mathcal{R} y \iff f(x) = f(y)$.

1. Montrer que le nombre de classes est égal au nombre d'éléments de $f(E)$.
2. Application : $E = \{1, 2, \dots, 10\}$ et $f(n) =$ chiffre des unités de n^2 . Donner les classes.

Niveau 4 · Concours ★★★★★**Exercice 10** Compter sur un ensemble à 4 éléments ★★★★★

corrigé p. 9

E a 4 éléments. Combien existe-t-il de relations sur E qui sont : (a) symétriques ; (b) réflexives et symétriques ; (c) antisymétriques ; (d) d'équivalence ; (e) d'ordre total ?

Exercice 11 QCM de concours ★★★★★

corrigé p. 9

1. Sur $E = \{1, 2, 3\}$, combien de relations sont à la fois symétriques et antisymétriques ? (A) 1 (B) 3 (C) 8 (D) 27
2. Une relation d'équivalence sur un ensemble à 7 éléments a pour classes des ensembles de tailles 3, 2, 1, 1. Combien de couples contient-elle ? (A) 7 (B) 15 (C) 16 (D) 49
3. Sur $\{1, 2, 3\}$, combien de relations sont à la fois réflexives et antisymétriques ? (A) 8 (B) 19 (C) 27 (D) 64

Exercice 12 Intersection et réunion ★★★★★

corrigé p. 9

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations d'équivalence sur E .

1. Montrer que $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$ est une relation d'équivalence. Que sont ses classes ?
2. Montrer par un contre-exemple que $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ n'en est pas toujours une.

7

Corrigés

■ Corrigé de l'exercice 1

1. $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 4)\}$ et $\mathcal{R}^{-1} = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 3), (4, 4)\}$.

2. **Réflexive** : oui, toute la diagonale est coloriée. **Symétrique** : non, $(1, 2) \in \mathcal{R}$ mais $(2, 1) \notin \mathcal{R}$. **Antisymétrique** : oui, aucune paire de cases symétriques hors diagonale. **Transitive** : le seul chemin de deux flèches distinctes est $3 \rightarrow 1 \rightarrow 2$, et $(3, 2) \in \mathcal{R}$: oui. C'est une **relation d'ordre** (partielle : 4 n'est comparable à aucun autre élément).

■ Corrigé de l'exercice 2

Boucles sur a, b, c (réflexive), aller-retour entre a et b (symétrique), et les chemins $a \rightarrow b \rightarrow a$, $b \rightarrow a \rightarrow b$ donnent (a, a) et (b, b) , présents (transitive). Classes : $\{a, b\}$ et $\{c\}$.

■ Corrigé de l'exercice 3

Domaine : $\{1, 2, 3, 4\}$; image : $\{1, 2, 3\}$; $\mathcal{R}^{-1} = \{(2, 1), (3, 2), (3, 3), (1, 4)\}$. Chemins de deux flèches : $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ demande $(1, 3)$; $2 \rightarrow 3 \rightarrow 3$ donne $(2, 3)$, présent ; $4 \rightarrow 1 \rightarrow 2$ demande $(4, 2)$. Après ajout de $(1, 3)$ et $(4, 2)$ apparaît $4 \rightarrow 1 \rightarrow 3$, qui demande $(4, 3)$. Il faut donc ajouter **trois** couples : $(1, 3), (4, 2), (4, 3)$.

■ Corrigé de l'exercice 4

Avec $f(t) = t + \frac{1}{t}$ sur $\mathbb{R}^*$, on a $x \mathcal{R} y \iff f(x) = f(y)$: c'est une équivalence. $f(y) = f(x) \iff y - x = \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{y-x}{xy} \iff (y-x)\left(1 - \frac{1}{xy}\right) = 0 \iff y = x$ ou $y = \frac{1}{x}$. Donc $\bar{x} = \{x; \frac{1}{x}\}$, singleton exactement quand $x = \frac{1}{x}$, c'est-à-dire $x = 1$ ou $x = -1$.

■ Corrigé de l'exercice 5

$3 \mid x^2 - y^2 \iff x^2 \equiv y^2 [3]$: c'est la forme $f(x) = f(y)$ avec $f(x) =$ reste de x^2 modulo 3, donc une équivalence. Or $x^2 \equiv 0 [3]$ si $3 \mid x$, et $x^2 \equiv 1 [3]$ sinon ($1^2 = 1, 2^2 = 4 \equiv 1$). Deux classes : $3\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z} \setminus 3\mathbb{Z}$.

■ Corrigé de l'exercice 6

(a) Ré, S, T (pas A : 0 et 1) : **équivalence**. (b) Ré ($x^2 \geq 0$), S, mais **pas T** : $(-1) \cdot 0 \geq 0$ et $0 \cdot 1 \geq 0$, mais $(-1) \cdot 1 < 0$. (c) Ré, T, mais ni S ($|0| \leq |1|$, pas l'inverse) ni A ($|1| \leq |-1|$ et $|-1| \leq |1|$ avec $1 \neq -1$). (d) A (aucun couple $x < y$ et $y < x$), T, ni Ré, ni S.

Piège. En (b), le 0 « relie » tout le monde : c'est lui qui casse la transitivité. Sur $\mathbb{R}^*$, la même relation devient une équivalence (classes $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$).

■ Corrigé de l'exercice 7

On regroupe de proche en proche : $1-4-7, 2-5-8, 3-6$. Classes : $\{1, 4, 7\}, \{2, 5, 8\}, \{3, 6\}$, et aucun singleton (les 8 éléments sont utilisés). Nombre de couples : $3^2 + 3^2 + 2^2 = 22$.

■ **Corrigé de l'exercice 8**

1. Flèches directes : $2 \rightarrow 4$, $2 \rightarrow 6$, $3 \rightarrow 6$. Maximaux : $\boxed{4 \text{ et } 6}$; minimaux : $\boxed{2 \text{ et } 3}$. 2. Pas de plus grand élément (4 et 6 sont incomparables), pas de plus petit (2 et 3 aussi). Avec 12, qui est multiple de 2, 3, 4, 6, 12 devient le **plus grand élément** ; il n'y a toujours pas de plus petit élément.

★ **Astuce de concours : maximal $\neq$ plus grand**

Un élément maximal n'a personne « au-dessus » ; le plus grand élément est au-dessus de **tous**. Dans un ordre partiel, il peut y avoir plusieurs maximaux et aucun plus grand élément.

■ **Corrigé de l'exercice 9**

1. La classe de x est $\{t : f(t) = f(x)\}$. L'application qui associe à une classe la valeur commune $f(x)$ est bien définie, injective (deux classes de même valeur sont égales) et surjective sur $f(E)$: il y a $|f(E)|$ classes. 2. Unités de n^2 pour $n = 1, \dots, 10$: 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, 0. Six valeurs, donc six classes : $\boxed{\{1, 9\}, \{2, 8\}, \{3, 7\}, \{4, 6\}, \{5\}, \{10\}}$.

■ **Corrigé de l'exercice 10**

$n = 4$: $n^2 = 16$, $\frac{n(n-1)}{2} = 6$. (a) $2^{10} = \boxed{1024}$; (b) $2^6 = \boxed{64}$; (c) $2^4 \times 3^6 = 16 \times 729 = \boxed{11\,664}$; (d) les partitions d'un ensemble à 4 éléments : 1 (tout ensemble) + 4 (un triplet et un singleton) + 3 (deux paires) + 6 (une paire et deux singletons) + 1 (quatre singletons) = $\boxed{15}$; (e) $4! = \boxed{24}$.

■ **Corrigé de l'exercice 11**

1. (C) : symétrique et antisymétrique $\iff \mathcal{R} \subset I_E$, d'où $2^3 = 8$ relations. 2. (C) : $3^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 = 16$. *Piège* : (A) compte les éléments, (D) toutes les cases. 3. (C) : la diagonale est imposée et, pour chacune des 3 paires $\{i, j\}$, il y a 3 choix (rien, (i, j) ou (j, i)) : $3^3 = 27$. *Piège* : (B) = 19 compte les relations d'**ordre** (il faut en plus la transitivité).

■ **Corrigé de l'exercice 12**

1. $I_E \subset \mathcal{R} \cap \mathcal{S}$; si (x, y) est dans les deux, (y, x) aussi ; et si $x \mathcal{R} y$, $y \mathcal{R} z$, $x \mathcal{S} y$, $y \mathcal{S} z$, alors $x \mathcal{R} z$ et $x \mathcal{S} z$. La classe de x est l'intersection de ses deux classes : $\boxed{\overline{x}^{\mathcal{R} \cap \mathcal{S}} = \overline{x}^{\mathcal{R}} \cap \overline{x}^{\mathcal{S}}}$. 2. Sur $E = \{1, 2, 3\}$: $\mathcal{R}$ de classes $\{1, 2\}, \{3\}$ et $\mathcal{S}$ de classes $\{1\}, \{2, 3\}$. La réunion contient $(1, 2)$ et $(2, 3)$ mais pas $(1, 3)$: elle n'est **pas transitive**.

★ **Astuce de concours : à retenir**

L'intersection « affine » les partitions (on découpe plus finement) ; la réunion peut créer des chaînes qu'il faudrait « fermer ».

Et maintenant : **le chapitre « Ensembles et applications »**

Maths Olympiad