

Limites : 3 astuces essentielles

2^e BAC • SCIENCES PC

Transformer une expression compliquée en une limite que l'on sait calculer.

01 • UNE LIMITE FINIE IMPOSE UNE ANNULATION

Quand un paramètre intervient dans une forme $0/0$, l'existence d'une limite finie peut obliger le numérateur à s'annuler. On détermine le paramètre, puis on factorise. Page 2.

02 • RECONNAÎTRE UNE DÉRIVÉE CACHÉE

Un quotient peut être un taux d'accroissement. La définition de la dérivée fournit alors la limite, sans multiplier les calculs. Page 3.

03 • CONJUGUER DEUX FOIS

Après une première conjugaison, une nouvelle différence de racines peut apparaître. Une seconde conjugaison fait ressortir le facteur x^2 recherché. Page 4.

Votre parcours de révision

Lisez une méthode, refaites l'exemple sans regarder, puis cherchez les exercices de la page 5. Comparez votre raisonnement aux corrigés des pages 6 et 7. La fiche mémo se trouve en page 8.

Prérequis : factorisation, continuité et limites trigonométriques usuelles en radians. La méthode 2 utilise la dérivabilité ; son exemple logarithmique se travaille après les cours de logarithme et d'exponentielle.

01 • Exploiter une limite finie

On cherche les réels r et p pour lesquels :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\tan(x-2)[rx^2 + (p-2)x - 2p]}{(x-2)^2} = 5$$

Étape 1 • Isoler la limite usuelle

$$\frac{\tan(x-2)}{x-2} \times \frac{rx^2 + (p-2)x - 2p}{x-2}$$

Le premier facteur tend vers 1, car $\tan u / u$ tend vers 1 lorsque u tend vers 0, avec les angles en radians. Le second facteur doit donc tendre vers 5.

Étape 2 • Imposer l'annulation nécessaire

Notons $P(x) = rx^2 + (p-2)x - 2p$. Puisque $P(x)/(x-2)$ a une limite finie, $P(x) = (x-2) \times [P(x)/(x-2)]$ tend vers 0. Le polynôme P est continu, donc $P(2) = 0$.

$$4r + 2(p-2) - 2p = 4r - 4 = 0 \implies r = 1$$

Étape 3 • Factoriser et calculer la limite

$$P(x) = x^2 + (p-2)x - 2p = (x-2)(x+p)$$

Pour $x \neq 2$, l'expression se simplifie en $[\tan(x-2)/(x-2)](x+p)$. Sa limite est donc $2+p$. La valeur imposée donne :

$$2 + p = 5 \implies p = 3$$

RÉSULTAT ET PIÈGE

$r = 1$ et $p = 3$. L'annulation $P(2) = 0$ est une condition nécessaire. Elle ne termine pas le problème : il faut encore calculer la limite et vérifier sa valeur.

02 • Voir une dérivée cachée

La propriété à reconnaître

Si g est dérivable en 0 et $g(0) = 0$, la définition de la dérivée donne directement :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = g'(0)$$

En particulier, si $g(x) = xf(x)$ près de 0 et si g est dérivable en 0, alors la limite de $f(x)$ en 0 vaut $g'(0)$. Cette limite ne dépend pas de la valeur attribuée à $f(0)$.

Une extension très utile

Si u et v sont dérivables en 0, avec $u(0) = v(0) = 0$ et $v'(0) \neq 0$, on écrit, pour $x \neq 0$ proche de 0 :

$$\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u(x)/x}{v(x)/x} \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u'(0)}{v'(0)}$$

Exemple • Logarithme et exponentielle

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x)}{e^{2x} - 1}$$

On pose $u(x) = \ln(1 + 3x)$ et $v(x) = e^{2x} - 1$. Les deux fonctions s'annulent en 0. Elles sont dérivables près de 0 et :

$$u'(0) = \frac{3}{1 + 3 \times 0} = 3, \quad v'(0) = 2e^0 = 2$$

$$L = \frac{3}{2}$$

LES CONDITIONS COMPTENT

Vérifiez les annulations, la dérivabilité et $v'(0) \neq 0$. Si les deux dérivées sont nulles, cette formule ne permet pas de conclure. Ici, $\ln(1 + 3x)$ est défini pour $x > -1/3$.

03 • La double conjugaison

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}}{x^2}$$

La substitution directe donne $0/0$. Le terme $-x/2$ est précisément ce qui rend une première simplification insuffisante. On travaille pour $x \neq 0$ suffisamment proche de 0.

Étape 1 • Conjuguer la première différence

$$\sqrt{1+x} - 1 = \frac{x}{\sqrt{1+x} + 1}$$

Étape 2 • Mettre au même dénominateur

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2} &= \frac{x}{\sqrt{1+x} + 1} - \frac{x}{2} \\ &= \frac{x(1 - \sqrt{1+x})}{2(\sqrt{1+x} + 1)} \end{aligned}$$

Étape 3 • Conjuguer une seconde fois

$$\begin{aligned} 1 - \sqrt{1+x} &= -\frac{x}{1 + \sqrt{1+x}} \\ \frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}}{x^2} &= -\frac{1}{2(\sqrt{1+x} + 1)^2} \end{aligned}$$

L'expression de droite est continue en 0 et son dénominateur y vaut $2 \times 2^2 = 8$. On obtient :

$$L = -\frac{1}{8}$$

RÉFLEXE

Après la première conjugaison, cherchez s'il reste une différence de racines. Conservez les égalités exactes : remplacer trop tôt $\sqrt{1+x}$ par $1 + x/2$ ferait perdre l'information recherchée.

À vous de jouer

Annuler puis factoriser

1. Trouvez a pour que la limite suivante soit finie, puis calculez cette limite :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax - 2}{x - 1}$$

2. Déterminez a et b sachant que :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x - 1)[ax^2 + (b - 1)x - b]}{(x - 1)^2} = 6$$

Reconnaître un taux d'accroissement

3. Calculez la limite en vérifiant les conditions de la méthode :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 4x)}{e^{3x} - 1}$$

4. Calculez :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4 + 3x} - 2}{\sin(2x)}$$

Conjuguer deux fois

5 et 6. Calculez ces deux limites en conservant des égalités exactes :

$$(5) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 4x} - 1 - 2x}{x^2}$$

$$(6) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9 + x} - 3 - \frac{x}{6}}{x^2}$$

Angles en radians. Pour chaque réponse, écrivez la transformation décisive avant d'annoncer la valeur de la limite.

Corrigés • Exercices 1 à 3

1 • Une limite finie impose $a = 1$

Le dénominateur tend vers 0. Si le quotient possède une limite finie, le numérateur doit tendre vers 0 : $1 + a - 2 = 0$. Ainsi $a = 1$. On factorise ensuite :

$$x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 2) = 3$$

La condition nécessaire a bien conduit à une limite finie. Réponse : $a = 1$ et la limite vaut 3.

2 • Deux paramètres, deux informations

On sépare $\sin(x - 1)/(x - 1)$, qui tend vers 1. Pour que le facteur restant ait une limite finie, son numérateur doit s'annuler en 1 : $a + (b - 1) - b = 0$, donc $a = 1$.

$$x^2 + (b - 1)x - b = (x - 1)(x + b)$$

Après simplification, la limite vaut $1 + b$. Comme elle doit être égale à 6, on obtient $b = 5$.

$$a = 1, \quad b = 5$$

3 • Un quotient de deux taux d'accroissement

Posons $u(x) = \ln(1 + 4x)$ et $v(x) = e^{3x} - 1$. On a $u(0) = v(0) = 0$, $u'(0) = 4$ et $v'(0) = 3$. Le logarithme est défini pour $x > -1/4$, donc sur un voisinage de 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 4x)}{e^{3x} - 1} = \frac{4}{3}$$

CE QUI JUSTIFIE LA DERNIÈRE ÉTAPE

On divise le numérateur et le dénominateur par x . Les deux nouvelles expressions ont des limites finies, et celle du dénominateur vaut 3, donc n'est pas nulle.

Corrigés • Exercices 4 à 6

4 • Une racine et un sinus

Les deux fonctions $u(x) = \sqrt{4 + 3x} - 2$ et $v(x) = \sin(2x)$ s'annulent en 0. Leurs dérivées en 0 valent :

$$u'(0) = \frac{3}{2\sqrt{4}} = \frac{3}{4}, \quad v'(0) = 2$$

$$L = \frac{3/4}{2} = \frac{3}{8}$$

On peut aussi conjuguer le numérateur et utiliser $\sin(2x)/(2x) \rightarrow 1$. La racine est bien définie et dérivable près de 0.

5 • Le coefficient 4 intervient deux fois

Notons $s = \sqrt{1 + 4x}$. Alors $s - 1 = 4x/(s + 1)$. On réduit la différence au même dénominateur, puis on conjugue à nouveau :

$$s - 1 - 2x = \frac{2x(1 - s)}{s + 1} = -\frac{8x^2}{(s + 1)^2}$$

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-8}{(\sqrt{1 + 4x} + 1)^2} = -2$$

6 • Le point de départ est 9

Notons $s = \sqrt{9 + x}$. Le conjugué donne $s - 3 = x/(s + 3)$. Il vient :

$$s - 3 - \frac{x}{6} = \frac{x(3 - s)}{6(s + 3)} = -\frac{x^2}{6(s + 3)^2}$$

$$L = -\frac{1}{6(3 + 3)^2} = -\frac{1}{216}$$

L'ERREUR FRÉQUENTE

Dans l'exercice 6, $\sqrt{9} = 3$: le conjugué est $\sqrt{9 + x} + 3$. Il faut adapter toutes les constantes, et non recopier mécaniquement le cas $\sqrt{1 + x}$.

La fiche mémo

1 • Une condition nécessaire

Si P est continue en a et si $P(x)/(x - a)$ possède une limite finie lorsque x tend vers a , alors :

$$P(a) = 0$$

Pour un polynôme, cela permet de factoriser par $x - a$. On calcule ensuite la limite. Avec un dénominateur $(x - a)^2$, une seule annulation peut ne pas suffire.

2 • Deux fonctions qui s'annulent

Si u et v sont dérivables en 0 , $u(0) = v(0) = 0$ et $v'(0) \neq 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u'(0)}{v'(0)}$$

3 • La double conjugaison, en général

Pour $A > 0$ et B réel, la même méthode conduit à l'identité suivante, pour $x \neq 0$ proche de 0 :

$$\frac{\sqrt{A+Bx} - \sqrt{A} - \frac{B}{2\sqrt{A}}x}{x^2} = -\frac{B^2}{2\sqrt{A}(\sqrt{A+Bx} + \sqrt{A})^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{A+Bx} - \sqrt{A} - \frac{B}{2\sqrt{A}}x}{x^2} = -\frac{B^2}{8A^{3/2}}$$

VOTRE MÉTHODE EN QUATRE GESTES

1. Vérifier le domaine.
2. Identifier la forme obtenue par substitution.
3. Transformer exactement : factoriser, diviser par x ou conjuguer.
4. Calculer la limite et justifier la dernière opération.

Pour mémoriser : refaites les exercices 2, 4 et 6 sans le corrigé. Ils représentent les trois méthodes du document.