

Limites : astuces avancées

2^e BAC PC • POUR ALLER PLUS LOIN

Quand les premiers termes s'annulent, il faut faire apparaître ce qui reste.

LE FIL CONDUCTEUR

Les exemples de cette fiche conduisent à des formes $0/0$ où le dénominateur contient x^2 ou x^3 . La bonne transformation doit conserver les termes que des approximations trop rapides feraient disparaître.

Six méthodes à maîtriser

1. Remplacer une racine par une nouvelle variable - p. 2.
2. Exploiter une symétrie et conjuguer plusieurs fois - p. 3.
3. Transformer une différence trigonométrique en produit - p. 4.
4. Encadrer un reste logarithmique - p. 5.
5. Passer au logarithme dans une puissance indéterminée - p. 6.
6. Étudier le reste après soustraction à l'infini - p. 7.

Entraînement : six exercices en page 8, corrigés détaillés en pages 9 à 11 et fiche mémo en page 12.

REPÈRES DE NIVEAU

Les méthodes 1, 2, 3 et 6 utilisent surtout l'algèbre et les limites usuelles. La preuve de la méthode 4 utilise le calcul intégral ; la méthode 5 en exploite le résultat avec le logarithme et l'exponentielle.

Toutes les limites trigonométriques sont calculées en radians. Les égalités de simplification sont utilisées dans un voisinage adapté, en excluant les points où un dénominateur s'annule.

01 • Changer la variable de la racine

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1 - \frac{x}{3}}{x^2}$$

Le terme $x/3$ annule la première variation de la racine cubique. La substitution suivante permet de factoriser exactement le numérateur.

1 • Poser $t = \sqrt[3]{1+x}$

$$x = t^3 - 1 = (t - 1)(t^2 + t + 1), \quad t \rightarrow 1$$

Lorsque $x \neq 0$, on a $t \neq 1$. Le dénominateur x^2 contient donc le facteur $(t - 1)^2$. Cherchons le même facteur au numérateur.

2 • Factoriser le numérateur

$$t - 1 - \frac{t^3 - 1}{3} = -\frac{t^3 - 3t + 2}{3}$$

$$t^3 - 3t + 2 = (t - 1)^2(t + 2)$$

Pour vérifier la factorisation, développez $(t^2 - 2t + 1)(t + 2)$: les termes en t^2 s'annulent et il reste $t^3 - 3t + 2$.

3 • Simplifier avant de passer à la limite

$$\frac{\sqrt[3]{1+x} - 1 - \frac{x}{3}}{x^2} = -\frac{t+2}{3(t^2+t+1)^2}$$

$$L = -\frac{1+2}{3(1+1+1)^2} = -\frac{1}{9}$$

QUAND Y PENSER ?

Une racine n -ième apparaît avec un terme qui annule sa première variation. Poser t égal à la racine remplace l'expression radicale par des identités polynomiales.

02 • Utiliser une symétrie

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} - x}{x^3}$$

On travaille pour $0 < |x| < 1$. Les deux racines existent. Posons $S = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$ et $R = \sqrt{1-x^2}$. Alors $S \rightarrow 2$ et $R \rightarrow 1$.

1 • Transformer la différence de racines

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} &= \frac{2x}{S} \\ \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} - x}{x^3} &= \frac{2-S}{Sx^2}\end{aligned}$$

2 • Exploiter le carré de la somme

$$\begin{aligned}S^2 &= 2 + 2\sqrt{1-x^2} = 2 + 2R \\ 2-S &= \frac{4-S^2}{2+S} = \frac{2(1-R)}{2+S}\end{aligned}$$

3 • Faire apparaître le facteur x^2

$$\begin{aligned}1-R &= \frac{x^2}{1+R} \\ \frac{2-S}{Sx^2} &= \frac{2}{S(2+S)(1+R)} \\ L &= \frac{2}{2 \times 4 \times 2} = \frac{1}{8}\end{aligned}$$

L'IDÉE À RETENIR

La symétrie x et $-x$ fait apparaître $1-x^2$ après le produit des racines. C'est ce x^2 , associé au premier facteur x , qui explique la présence de x^3 dans le numérateur initial.

03 • Une différence devient un produit

Exemple A • Tangente moins sinus

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$$

Soustraire directement deux expressions proches ne montre pas ce qui reste. Réécrivons $\tan x$ avec le sinus et le cosinus :

$$\begin{aligned} \tan x - \sin x &= \frac{\sin x(1 - \cos x)}{\cos x} \\ \frac{\tan x - \sin x}{x^3} &= \frac{\sin x}{x} \times \frac{1 - \cos x}{x^2} \times \frac{1}{\cos x} \end{aligned}$$

Le premier facteur tend vers 1 et le troisième aussi. Pour le deuxième, l'identité $1 - \cos x = 2 \sin^2(x/2)$ donne :

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(x/2)}{x/2} \right)^2 \longrightarrow \frac{1}{2} \\ L &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Exemple B • Une combinaison bien choisie

$$\begin{aligned} \sin(3x) &= 3\sin x - 4\sin^3 x \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x) - 3\sin x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} -4 \left(\frac{\sin x}{x} \right)^3 = -4 \end{aligned}$$

LE BON RÉFLEXE

Avant de calculer une limite trigonométrique avec x^2 ou x^3 au dénominateur, cherchez une identité qui transforme les soustractions en produits de petits facteurs.

04 • Encadrer un reste logarithmique

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$$

La limite $\ln(1+x)/x = 1$ ne suffit pas : la soustraction de x fait disparaître l'information du premier ordre. Une écriture intégrale permet d'encadrer ce qui reste.

1 • Une identité exacte

$$\ln(1+x) - x = \int_0^x \left(\frac{1}{1+t} - 1 \right) dt = - \int_0^x \frac{t}{1+t} dt$$

Pour $x \neq 0$ proche de 0, le changement de variable $t = xu$ donne $dt = x du$. Les bornes deviennent 0 et 1, même lorsque $x < 0$: le signe est pris en compte par dt .

$$\frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = - \int_0^1 \frac{u}{1+xu} du$$

2 • Encadrer avec des dénominateurs positifs

Pour $|x| < 1$ et $0 \leq u \leq 1$, on a $1 - |x| \leq 1 + xu \leq 1 + |x|$. En prenant les inverses puis en multipliant par $u \geq 0$:

$$\frac{u}{1+|x|} \leq \frac{u}{1+xu} \leq \frac{u}{1-|x|}$$

3 • Intégrer et conclure

On intègre de 0 à 1, puis on multiplie par -1 , ce qui inverse les inégalités. Comme l'intégrale de u sur $[0 ; 1]$ vaut $1/2$:

$$-\frac{1}{2(1-|x|)} \leq \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \leq -\frac{1}{2(1+|x|)}$$

$$L = -\frac{1}{2}$$

POURQUOI CETTE PREUVE EST SOLIDE

Les deux bornes tendent vers $-1/2$. Le théorème d'encadrement conclut à gauche comme à droite de 0. On n'a pas interverti une limite et une intégrale sans justification.

05 • Une puissance indéterminée

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} [(1+x)e^{-x}]^{1/x^2}$$

La base tend vers 1, tandis que l'exposant tend vers $+\infty$. La forme « 1 puissance l'infini » ne donne pas la limite : il faut mesurer la vitesse à laquelle la base approche 1.

1 • Vérifier la positivité de la base

Pour $x > -1$, $(1+x)e^{-x}$ est strictement positif. On peut donc définir la puissance réelle avec le logarithme. Notons $Y(x)$ l'expression dont on cherche la limite, pour $x \neq 0$.

2 • Faire descendre l'exposant

$$\begin{aligned} \ln Y(x) &= \frac{1}{x^2} \ln((1+x)e^{-x}) \\ \ln Y(x) &= \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \end{aligned}$$

C'est exactement le reste logarithmique étudié à la page précédente. On sait donc que $\ln Y(x)$ tend vers $-1/2$.

3 • Revenir à la puissance par continuité

$$Y(x) = e^{\ln Y(x)} \implies L = e^{-1/2}$$

LE SCHÉMA GÉNÉRAL

Pour une base $A(x) > 0$, écrivez $A(x)^{B(x)} = \exp(B(x) \ln A(x))$. Si $B(x) \ln A(x)$ tend vers un réel ℓ , la puissance tend vers e^ℓ .

Un contrôle de cohérence

L'inégalité $\ln(1+x) \leq x$, valable pour $x > -1$, montre que la base $(1+x)e^{-x}$ est ≤ 1 . Avec un exposant positif, $Y(x)$ reste ≤ 1 . Le résultat $\exp(-1/2) < 1$ est cohérent.

06 • Examiner le reste à l'infini

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\sqrt{x^2 + 2x} - x - 1 + \frac{1}{2x} \right)$$

La différence de racines est d'abord proche de 1. Le terme -1 la compense, puis $+1/(2x)$ compense encore le terme suivant. Il faut conserver les égalités exactes.

1 • Comparer la racine à $x + 1$

Posons $D = \sqrt{x^2 + 2x} + x + 1$. Pour $x > 0$, D est strictement positif. Le conjugué donne :

$$\sqrt{x^2 + 2x} - x - 1 = \frac{x^2 + 2x - (x + 1)^2}{D} = -\frac{1}{D}$$

2 • Réduire les deux fractions

$$-\frac{1}{D} + \frac{1}{2x} = \frac{D - 2x}{2xD}$$

$$x^2 \left(-\frac{1}{D} + \frac{1}{2x} \right) = \frac{\sqrt{x^2 + 2x} - x + 1}{2(D/x)}$$

3 • Calculer séparément les deux limites

$$\sqrt{x^2 + 2x} - x = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = \frac{2}{\sqrt{1 + 2/x} + 1} \rightarrow 1$$

$$\frac{D}{x} = \sqrt{1 + \frac{2}{x}} + 1 + \frac{1}{x} \rightarrow 2$$

$$L = \frac{1+1}{2 \times 2} = \frac{1}{2}$$

LE PIÈGE

Savoir seulement que $\sqrt{x^2 + 2x}/x$ tend vers 1 ne suffit pas après plusieurs soustractions. Chaque compensation peut rendre nécessaire une information plus précise sur le reste.

Six défis progressifs

Calculez les limites suivantes en justifiant les transformations. Pour les racines, vérifiez le domaine près du point étudié. Tous les angles sont en radians.

1 • Racine cubique

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x} - 1 - x}{x^2}$$

2 • Symétrie

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-2x} - 2x}{x^3}$$

3 • Identité trigonométrique

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin(3x) - \sin(6x)}{x^3}$$

4 • Deux logarithmes

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x) - 2\ln(1+x)}{x^2}$$

5 • Une puissance à analyser

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+3x}{(1+x)^3} \right)^{1/x^2}$$

6 • Une compensation à l'infini

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\sqrt{x^2 + 4x} - x - 2 + \frac{2}{x} \right)$$

Corrigés : exercices 1 et 2 en page 9 ; exercices 3 et 4 en page 10 ; exercices 5 et 6 en page 11.

Corrigés • Les changements d'échelle

1 • Un facteur 3 dans la racine cubique

Posons $t = 3x$. Alors t tend vers 0 et $x^2 = t^2/9$. Le terme x devient $t/3$. L'expression se ramène exactement à la méthode 1 :

$$\frac{\sqrt[3]{1+3x} - 1 - x}{x^2} = 9 \frac{\sqrt[3]{1+t} - 1 - t/3}{t^2}$$

La limite de la fraction de droite est $-1/9$, d'après la factorisation démontrée en page 2. Donc :

$$L_1 = 9 \times \left(-\frac{1}{9}\right) = -1$$

POURQUOI LE FACTEUR EST-IL 9 ?

Le dénominateur est au carré. Remplacer x par $t/3$ transforme x^2 en $t^2/9$: diviser par x^2 revient à multiplier par 9 puis à diviser par t^2 .

2 • Une symétrie avec $2x$

Pour $|x| < 1/2$, les deux racines existent. Posons $h = 2x$: le dénominateur x^3 devient $h^3/8$, et le terme $2x$ devient h .

$$\frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-2x} - 2x}{x^3} = 8 \frac{\sqrt{1+h} - \sqrt{1-h} - h}{h^3}$$

La fraction de droite tend vers $1/8$ d'après la méthode 2, en page 3. Ainsi :

$$L_2 = 8 \times \frac{1}{8} = 1$$

LE DÉTAIL DÉCISIF

Un changement $h = ax$ produit un facteur a^2 si le dénominateur est x^2 , et a^3 si le dénominateur est x^3 . Réécrivez tout le quotient avant de conclure.

Corrigés • Révéler les annulations

3 • Une différence de sinus

On utilise $\sin(6x) = 2 \sin(3x) \cos(3x)$. La soustraction devient un produit :

$$2\sin(3x) - \sin(6x) = 2\sin(3x)(1 - \cos(3x))$$

$$\frac{2\sin(3x) - \sin(6x)}{x^3} = 54 \frac{\sin(3x)}{3x} \frac{1 - \cos(3x)}{(3x)^2}$$

En radians, les deux fractions tendent respectivement vers 1 et 1/2. Le facteur 54 est égal à 2×3^3 .

$$L_3 = 54 \times 1 \times \frac{1}{2} = 27$$

4 • Soustraire les termes linéaires

Pour x proche de 0 avec $x > -1/2$, les logarithmes sont définis. Posons, pour $t \neq 0$ proche de 0 :

$$R(t) = \frac{\ln(1+t) - t}{t^2}, \quad R(t) \longrightarrow -\frac{1}{2}$$

Ajoutons puis retranchons les termes $2x$. Cela isole deux restes dont on connaît déjà la limite :

$$\ln(1+2x) - 2\ln(1+x) = [\ln(1+2x) - 2x] - 2[\ln(1+x) - x]$$

$$\frac{\ln(1+2x) - 2\ln(1+x)}{x^2} = 4R(2x) - 2R(x)$$

$$L_4 = 4\left(-\frac{1}{2}\right) - 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

LE BON REGROUPEMENT

Quand les termes du premier ordre se compensent, regroupez chaque fonction avec son terme linéaire. Vous faites apparaître les restes du second ordre déjà étudiés.

Corrigés • Puissance et infini

5 • Une puissance qui masque une compensation

Pour x proche de 0 et $x > -1/3$, la base est positive. Notons $Y(x)$ la puissance de l'énoncé et utilisons R défini à la page précédente.

$$\ln Y(x) = \frac{\ln(1+3x) - 3\ln(1+x)}{x^2}$$

Les termes linéaires $3x$ et $3 \times x$ s'annulent. Les restes donnent :

$$\ln Y(x) = 9R(3x) - 3R(x) \rightarrow -\frac{9}{2} + \frac{3}{2} = -3$$

$$L_5 = e^{-3}$$

6 • Conjuguer, puis réunir les fractions

Pour $x > 0$, posons $D = \sqrt{x^2 + 4x} + x + 2$. On a $D > 0$. La conjugaison donne :

$$\sqrt{x^2 + 4x} - x - 2 = \frac{x^2 + 4x - (x+2)^2}{D} = -\frac{4}{D}$$

$$x^2 \left(-\frac{4}{D} + \frac{2}{x} \right) = \frac{2(D-2x)}{D/x} = \frac{2(\sqrt{x^2+4x}-x+2)}{D/x}$$

Il reste deux limites simples, toujours pour x tendant vers $+\infty$:

$$\sqrt{x^2 + 4x} - x = \frac{4}{\sqrt{1+4/x} + 1} \rightarrow 2$$

$$\frac{D}{x} = \sqrt{1 + \frac{4}{x}} + 1 + \frac{2}{x} \rightarrow 2$$

$$L_6 = \frac{2(2+2)}{2} = 4$$

CE QU'IL FALLAIT CONSERVER

Dans l'exercice 5, les restes logarithmiques. Dans l'exercice 6, la fraction exacte obtenue par conjugaison. Une approximation du premier ordre aurait perdu l'information nécessaire.

Mémo • Reconnaître la bonne structure

Dans les quatre formules suivantes, a est un réel fixé et x tend vers 0. Les expressions sont considérées là où elles sont définies, dans un voisinage de 0, avec $x \neq 0$.

Racine cubique : une annulation au carré

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+ax} - 1 - ax/3}{x^2} = -\frac{a^2}{9}$$

Racines symétriques : une annulation au cube

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+ax} - \sqrt{1-ax} - ax}{x^3} = \frac{a^3}{8}$$

Logarithme : isoler le reste du second ordre

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+ax) - ax}{x^2} = -\frac{a^2}{2}$$

Puissance : logarithme, puis exponentielle

$$\lim_{x \rightarrow 0} [(1+ax)e^{-ax}]^{1/x^2} = e^{-a^2/2}$$

Pour $a \neq 0$, ces résultats se déduisent des méthodes du livret en posant $h = ax$. Pour $a = 0$, les trois premiers quotients sont nuls et la dernière expression vaut 1.

AVANT DE CONCLURE

1. Vérifier le domaine et le côté de la limite.
2. Conserver les égalités exactes après une soustraction.
3. Compter les facteurs a^2 ou a^3 après un changement de variable.
4. Vérifier la positivité avant de prendre un logarithme.

Les formules sont des raccourcis utiles si vous savez retrouver leur preuve. À l'écrit, indiquez l'identité, la substitution ou l'encadrement qui justifie votre réponse.