

Histoire de la notion de limite

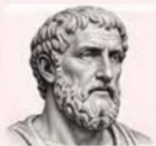
Une longue
histoire...

De l'idée de s'approcher à la précision mathématique

1

Vers 450 av. J.-C.

Zénon d'Élée



Ses paradoxes du mouvement interrogent l'infini : comment parcourir une infinité d'étapes en un temps fini ?

$$1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots$$

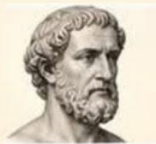


Des étapes toujours plus petites

2

Ive siècle av. J.-C.

Eudoxe de Cnide



La méthode d'épuisement permet de comparer rigoureusement des aires et des volumes par des approximations successives.

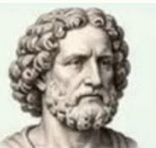


Encadrer le cercle par des polygones

3

IIIe siècle av. J.-C.

Archimède



Il perfectionne cette méthode et obtient des encadrements de plus en plus précis, notamment pour le nombre π .

$$223/71 < \pi < 22/7$$

Un célèbre encadrement de π

4

XVIIe siècle

**Newton
et Leibniz**



Ils développent le calcul différentiel et intégral. Fluxions et infinitésimaux précèdent la formalisation moderne des limites.

$$\frac{dy}{dx} \quad \text{et} \quad \int$$

Dérivées et intégrales

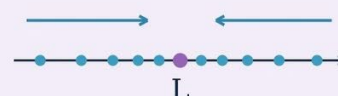
5

1765

d'Alembert



Dans l'Encyclopédie, il défend le calcul fondé sur les limites. Une quantité peut approcher une valeur aussi près que voulu.



Se rapprocher d'une valeur fixée

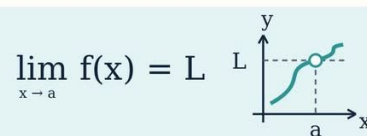
6

1817 / 1821

**Bolzano
et Cauchy**



Bolzano recherche des preuves purement analytiques. Cauchy place les limites au centre de son Cours d'analyse.



$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

7

Années 1860

Weierstrass



La formulation en ε et δ donne aux limites leur précision moderne.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, \\ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

a : point d'accumulation du domaine D

L'idée essentielle

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Lorsque x tend vers a , $f(x)$ s'approche de L aussi près qu'on le souhaite.

La limite peut exister même si $f(a)$ n'est pas définie.

Pourquoi c'est important ?

- ✓ Définir les dérivées
- ✓ Construire les intégrales
- ✓ Étudier continuité et suites

Maths Olympiad