

Limites de fonctions

Les deux volumes réunis

Cours détaillés · Méthodes · Astuces
Exemples guidés et exercices corrigés

Volume 1 · Les fondations et les outils avancés

Comprendre les limites, choisir une méthode, maîtriser les limites usuelles, les équivalents, les développements limités et les puissances indéterminées.

18 chapitres et 30 exercices corrigés.

Volume 2 · Méthodes rapides et raisonnement rigoureux

Approfondir les termes dominants, les sommes, les asymptotes, la partie entière, les compositions et les liens avec les moyennes géométriques.

16 chapitres et 24 exercices corrigés.

54 exercices corrigés · 64 pages

[Sommaire cliquable](#) · [Pagination continue](#) · [Signets de navigation](#)

SOMMAIRE GÉNÉRAL · 1/2

Volume 1 : cours et méthodes

Volume 1 : pages 4 à 36. Les titres et les numéros de page du sommaire sont cliquables. La numérotation des exercices recommence dans le second volume.

Cours et méthodes	Page
1. Que signifie « tendre vers » ?	6
2. Gauche, droite et continuité	7
3. Une limite peut être infinie	8
4. Diagnostiquer avant de calculer	9
5. Factoriser pour lever un $0/0$	10
6. Les racines et le conjugué	11
7. Changer de variable intelligemment	12
8. Les limites trigonométriques usuelles	13
9. Logarithmes et exponentielles	14
10. Encadrer une expression oscillante	15
11. Les termes dominants à l'infini	16
12. Transformer les différences et les produits indéterminés	17
13. Les équivalents : puissants, mais précis	18
14. Dérivées et règle de l'Hôpital	19
15. Développements limités : lire l'ordre utile	20
16. DL composés et paramètres	21
17. Puissances indéterminées	22
18. Synthèse : choisir et rédiger	23
Exercices et révision	
Exercices 1 à 8 : les fondations	24
Exercices 9 à 16 : les outils usuels	25
Exercices 17 à 24 : annulations et puissances	26
Exercices 25 à 30 : les défis de synthèse	27
Corrigés détaillés des exercices 1 à 30	28
Fiche de révision du volume 1	36

Repère de lecture

Le mode d'emploi du premier volume est conservé page 5. Tous ses renvois ont été recalculés avec la pagination du livre complet.

SOMMAIRE GÉNÉRAL · 2/2

Volume 2 : approfondissements

Volume 2 : pages 37 à 64. Ce volume développe les raccourcis de calcul en précisant leurs conditions de validité.

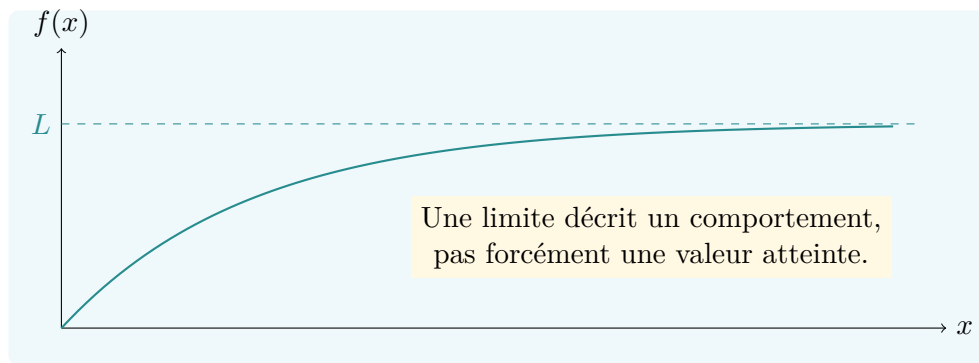
Cours et méthodes	Page
1. Ce que signifie une forme indéterminée	39
2. Quotients de polynômes : comparer les degrés	40
3. Des termes dominants sous les racines	41
4. Attention au nombre de termes qui augmente	42
5. Rationaliser en conservant le signe	43
6. Trouver une asymptote avec des paramètres	44
7. Dérivées : utiliser exactement les hypothèses	45
8. Trigonométrie : surveiller l'argument et l'unité	46
9. Partie entière : de quel côté arrive-t-on ?	47
10. Encadrer les oscillations	48
11. Simplifier avant de dériver	49
12. Exponentielles, logarithmes et compositions	50
13. Puissances : calculer le logarithme d'abord	51
14. Une puissance révèle une moyenne géométrique	52
15. Le théorème des gendarmes et la partie entière	53
16. Choisir une méthode et éviter les faux raccourcis	54
Exercices et révision	
Exercices 1 à 8 : croissances, sommes et paramètres	55
Exercices 9 à 16 : compositions et partie entière	56
Exercices 17 à 24 : puissances et synthèse	57
Corrigés détaillés des exercices 1 à 24	58
Fiche de révision du volume 2	64

Naviguer dans le livre

Les signets du PDF regroupent les chapitres, les séries d'exercices et les corrigés par volume. Le guide propre au volume 2 se trouve page 38.

Limites de fonctions

Comprendre les idées. Maîtriser les méthodes.
Résoudre les formes indéterminées.



Un parcours progressif, de l'intuition aux calculs avancés

- Définitions, limites à gauche et à droite, continuité et limites infinies.
- Factorisation, conjugaison, changement de variable et encadrement.
- Limites usuelles, équivalents, règle de l'Hôpital et développements limités.
- Puissances indéterminées, paramètres et problèmes de synthèse.

Pour s'entraîner

30 exercices progressifs avec corrigés détaillés, des exemples résolus tout au long du cours, une fiche de formules et une méthode de rédaction.

Maths Olympiad

Niveau : fin de lycée et approfondissement post-bac.

Toutes les fonctions sont étudiées dans le cadre réel.

MODE D'EMPLOI

Comment utiliser ce cours

Ce document transforme le transcript fourni en un cours structuré en français. Les hésitations et les échanges oraux sont retirés ; les hypothèses et les justifications sont explicitées. Des compléments et des exercices ont été ajoutés pour rendre l'ensemble autonome.

Deux parcours possibles

Parcours essentiel : lire les pages 6 à 17, puis faire les exercices 1 à 17.

Parcours approfondi : poursuivre avec les équivalents, les dérivées, les développements limités et les puissances, puis traiter les exercices 18 à 30.

Repères dans le document

Partie	Page
Comprendre une limite et son domaine	6
Limites latérales, continuité et infini	7
Calculs algébriques et formes indéterminées	9
Factoriser, rationaliser, changer de variable	10
Limites usuelles et encadrement	13
Calculer à l'infini et transformer une expression	16
Équivalents, dérivées, règle de l'Hôpital	18
Développements limités et paramètres	20
Puissances indéterminées et synthèse	22
Les 30 exercices	24
Les corrigés détaillés	28
Fiche de révision	36

Conventions indispensables

- Les angles des limites trigonométriques sont exprimés en **radians**.
- $\ln$ désigne le logarithme népérien ; $\log_b x = \ln x / \ln b$, avec $b > 0$ et $b \neq 1$.
- $\lfloor x \rfloor$ est la partie entière et $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ la partie fractionnaire.
- Une puissance réelle $u(x)^{v(x)}$ sera traitée avec une base $u(x) > 0$.

Travail personnel

Pour chaque exercice, noter d'abord le domaine local et la forme obtenue. Chercher pendant quelques minutes avant de consulter le corrigé. Après correction, refaire le calcul sans regarder la solution.

Support de départ : transcript fourni du cours vidéo de Namrata sur les limites, identifiant YouTube ydKI7U6XF6k.
Les formules illisibles ou incomplètes ne sont pas reproduites comme des énoncés certains.

COURS ET MÉTHODES

1. Que signifie « tendre vers » ?

Écrire $x \rightarrow a$ signifie que x peut être choisi aussi proche de a que nécessaire. Dans l'étude d'une limite en a , on regarde les valeurs de la fonction **au voisinage de a , avec $x \neq a$** .

Idée fondamentale

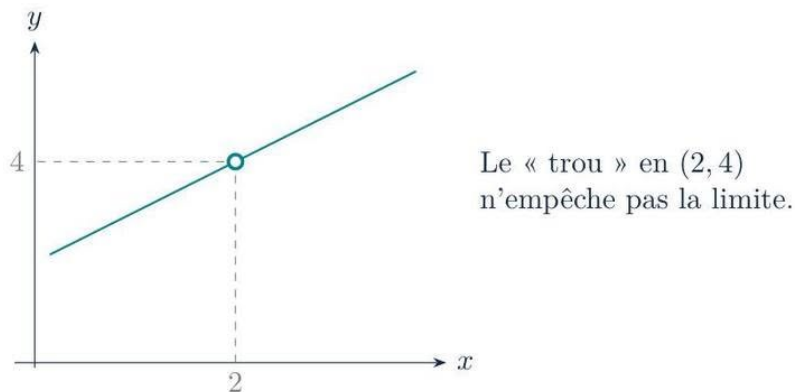
La notation $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ signifie que $f(x)$ devient arbitrairement proche de L lorsque x devient suffisamment proche de a , en restant dans le domaine de f .

Exemple 1 · Une fonction peut avoir une limite sans être définie au point

Pour $x \neq 2$,

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2.$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$, alors que la formule initiale ne définit pas $f(2)$.

**Pourquoi peut-on simplifier par $x - 2$?**

On ne remplace pas x par 2 pendant la simplification. On travaille avec $x \neq 2$, précisément les points utilisés par la limite. Deux fonctions égales sur un voisinage privé de a ont la même limite en a .

La définition précise, pour aller plus loin

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$x \in D_f, \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \implies \quad |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Le point a doit pouvoir être approché par des points du domaine autres que lui-même. Pour $f(x) = x + 2$ et $a = 2$, on a $|f(x) - 4| = |x - 2|$: choisir $\delta = \varepsilon$ suffit.

Piège à éviter

Une table de valeurs ou un graphique suggère une limite ; elle ne constitue pas, à elle seule, une preuve. La valeur $f(a)$ et la limite en a sont deux informations distinctes.

COURS ET MÉTHODES

2. Gauche, droite et continuité

Deux sens d'approche

$x \rightarrow a^- : x < a$ et x se rapproche de a .

$x \rightarrow a^+ : x > a$ et x se rapproche de a .

Si le domaine permet d'approcher a des deux côtés, une limite bilatérale existe exactement lorsque les deux limites latérales existent et sont égales.

Exemple 2 · Une rupture de comportement

Considérons

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 1, \\ 3 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Alors $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3$. La limite bilatérale n'existe pas. La valeur $f(1) = 3$ ne change pas cette conclusion.

Continuité en un point

Une fonction est continue en a si elle est définie en a et si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Ainsi, prolonger $(x^2 - 4)/(x - 2)$ par la valeur 4 en 2 donne une fonction continue. Toute autre valeur laisse la limite égale à 4, mais crée une discontinuité.

Exemple 3 · Partie entière et partie fractionnaire

Près d'un entier n , on a

	$x \rightarrow n^-$	$x \rightarrow n^+$
$\lfloor x \rfloor$	$n - 1$	n
$\{x\}$	1	0

Ces fonctions n'ont donc pas de limite bilatérale en un entier. Pour un point non entier, la partie entière est localement constante et la partie fractionnaire est localement affine.

Attention aux nombres négatifs

$\lfloor -1,3 \rfloor = -2$ et $\{-1,3\} = 0,7$. La partie entière est le plus grand entier *inférieur ou égal* à x ; elle ne s'obtient pas toujours en supprimant les chiffres après la virgule.

Quand séparer les deux côtés ?

Dès qu'apparaissent $|x - a|$, une fonction définie par morceaux, une partie entière, ou un dénominateur qui change de signe. Au bord d'un domaine, seule l'approche autorisée est à considérer : par exemple $x \rightarrow 0^+$ pour $\ln x$.

COURS ET MÉTHODES

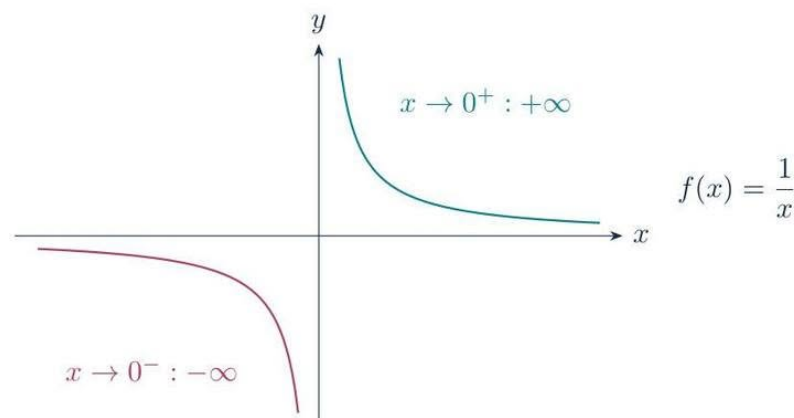
3. Une limite peut être infinie

Au voisinage d'un point

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ signifie que $f(x)$ dépasse tout seuil positif fixé dès que x est assez proche de a . Ce n'est pas une valeur réelle : on parle de **limite infinie**, et non de limite finie.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

La fonction $1/x$ n'a pas de limite bilatérale en 0, même en autorisant les limites infinies.



Quand la variable tend vers l'infini

$x \rightarrow +\infty$ signifie que x devient arbitrairement grand. Il n'existe pas de « nombre $+\infty$ » que l'on pourrait substituer à x .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty.$$

Lien avec les asymptotes

Si $f(x) \rightarrow \pm\infty$ lorsque $x \rightarrow a$ d'au moins un côté, la droite $x = a$ est une asymptote verticale. Si $f(x) \rightarrow L$ lorsque $x \rightarrow +\infty$ ou $-\infty$, la droite $y = L$ est une asymptote horizontale de ce côté.

Piège à éviter

« Le dénominateur tend vers zéro » ne suffit pas pour conclure. Il faut étudier le numérateur et le signe : $x/x = 1$ pour $x \neq 0$, tandis que $1/x$ change de comportement selon le côté.

COURS ET MÉTHODES

4. Diagnostiquer avant de calculer

Si $f(x) \rightarrow \ell$ et $g(x) \rightarrow m$ avec $\ell, m \in \mathbb{R}$, alors

$$f + g \rightarrow \ell + m, \quad fg \rightarrow \ell m, \quad \frac{f}{g} \rightarrow \frac{\ell}{m} \quad \text{si } m \neq 0.$$

La continuité autorise la substitution directe : polynômes partout, quotients là où le dénominateur est non nul, logarithme sur $]0, +\infty[$, etc.

Le premier réflexe en quatre étapes

1. Vérifier où l'expression est définie près du point visé.
2. Calculer séparément le comportement des composants.
3. Identifier une limite immédiate ou une forme indéterminée.
4. Transformer seulement si les règles usuelles ne permettent pas de conclure.

Les sept formes indéterminées classiques

Forme	Transformation à envisager
$0/0$	Factoriser, conjuguer, utiliser une limite usuelle ou un développement limité.
∞/∞	Comparer les termes dominants ; diviser par la croissance principale.
$\infty - \infty$	Réunir les fractions ou utiliser le conjugué.
$0 \times \infty$	Transformer le produit en quotient.
1^∞	Prendre le logarithme ; étudier l'exposant multiplié par l'écart de la base à 1.
$0^0, \infty^0$	Avec une base positive, étudier $v(x) \ln u(x)$.

« Indéterminée » signifie que la forme seule ne donne pas le résultat. Par exemple, lorsque $x \rightarrow 0^+$, les trois quotients x/x , x^2/x et x/x^2 ont la forme $0/0$, mais tendent respectivement vers 1, 0 et $+\infty$.

Ce ne sont pas des opérations sur des nombres

On n'écrit pas $0/0 = 1$ ni $\infty - \infty = 0$. Ces symboles décrivent le comportement de plusieurs fonctions avant transformation.

COURS ET MÉTHODES

5. Factoriser pour lever un $0/0$ **Repérer le facteur qui s'annule**

Si un polynôme P vérifie $P(a) = 0$, il possède un facteur $x - a$. Chercher ce facteur au numérateur et au dénominateur, simplifier pour $x \neq a$, puis calculer la nouvelle limite.

Exemple 4 · Différence de cubes

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x + 4) = 12.$$

L'identité générale, pour un entier $n \geq 1$, est

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + \dots + a^{n-1}).$$

D'où

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}.$$

Exemple 5 · Une simplification plus rapide qu'une dérivation

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^{10} - 2^{10}}{x^5 - 2^5} = \lim_{x \rightarrow 2} (x^5 + 2^5) = 64.$$

On reconnaît $U^2 - V^2 = (U - V)(U + V)$ avec $U = x^5$ et $V = 2^5$.

Exemple 6 · Déterminer un paramètre

Pour quelle valeur de a la limite suivante est-elle finie ?

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + ax + a + 3}{x^2 + x - 2}.$$

Le dénominateur tend vers 0. Le numérateur doit donc aussi tendre vers 0 :

$$3(-2)^2 - 2a + a + 3 = 15 - a = 0, \quad \text{donc } a = 15.$$

Il reste à vérifier que ce choix suffit :

$$\frac{3x^2 + 15x + 18}{x^2 + x - 2} = \frac{3(x+2)(x+3)}{(x+2)(x-1)} = \frac{3(x+3)}{x-1} \rightarrow -1.$$

Nécessaire ne signifie pas suffisant

Faire tendre le numérateur vers 0 ne garantit pas une limite finie. Par exemple x/x^2 est de forme $0/0$ en 0, mais n'a pas de limite bilatérale. Il faut poursuivre le calcul.

COURS ET MÉTHODES

6. Les racines et le conjugué

L'identité qui débloque le calcul

$$(\sqrt{U} - \sqrt{V})(\sqrt{U} + \sqrt{V}) = U - V.$$

Multiplier numérateur et dénominateur par le conjugué transforme une différence de racines en différence ordinaire.

Exemple 7 · Une racine simple

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{1+x} + 1)} = \frac{1}{2}.$$

L'expression est définie près de 0 pour $x \geq -1$, avec $x \neq 0$ dans le quotient. Le facteur x peut donc être simplifié au voisinage privé de 0.

Exemple 8 · Deux différences de racines

$$L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 - \sqrt{8x+1}}{5 - \sqrt{24x+1}}.$$

On rationalise chaque différence :

$$3 - \sqrt{8x+1} = \frac{8(1-x)}{3 + \sqrt{8x+1}}, \quad 5 - \sqrt{24x+1} = \frac{24(1-x)}{5 + \sqrt{24x+1}}.$$

Ainsi,

$$L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{3} \frac{5 + \sqrt{24x+1}}{3 + \sqrt{8x+1}} = \frac{1}{3} \frac{10}{6} = \boxed{\frac{5}{9}}.$$

Exemple 9 · Une racine combinée à la trigonométrie

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}.$$

Après multiplication par le conjugué, le dénominateur devient $1 - \cos x$. Or $\sin^2 x = (1 - \cos x)(1 + \cos x)$. Il reste

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x)(\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos x}) = \boxed{4\sqrt{2}}.$$

Racines emboîtées

Si une première conjugaison laisse encore une différence de racines, recommencer. Le but n'est pas de « supprimer toutes les racines », mais de faire apparaître le facteur qui s'annule.

COURS ET MÉTHODES

7. Changer de variable intelligemment

Un changement de variable doit transformer l'expression et le point d'approche. Pour étudier une limite en a , poser $h = x - a$ ramène souvent le problème à $h \rightarrow 0$.

Exemple 10 · Une puissance fractionnaire

Calculons $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-x)^{1/5} - 1}{x}$. Posons $t = (1-x)^{1/5}$. Alors $t \rightarrow 1$ et $x = 1 - t^5$:

$$\frac{t-1}{1-t^5} = -\frac{1}{1+t+t^2+t^3+t^4} \longrightarrow \boxed{-\frac{1}{5}}.$$

Exemple 11 · Transformer des exponentielles en polynômes

$$L = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3^x + 3^{3-x} - 12}{3^{-x/2} - 3^{1-x}}.$$

Posons $t = 3^{x/2} > 0$, donc $t \rightarrow 3$. Comme $3^x = t^2$, $3^{3-x} = 27/t^2$ et $3^{1-x} = 3/t^2$,

$$\frac{t^2 + 27/t^2 - 12}{1/t - 3/t^2} = \frac{t^4 - 12t^2 + 27}{t - 3} = \frac{(t^2 - 9)(t^2 - 3)}{t - 3}.$$

Pour $t \neq 3$, il reste $(t+3)(t^2-3)$, qui tend vers $6 \times 6 = \boxed{36}$.

Exemple 12 · Déplacer un angle vers zéro

Pour la limite

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{2^{-\cos x} - 1}{x(x - \pi/2)},$$

posons $h = x - \pi/2$. Alors $-\cos(\pi/2 + h) = \sin h$ et l'expression devient

$$\frac{2^{\sin h} - 1}{\sin h} \cdot \frac{\sin h}{h} \cdot \frac{1}{\pi/2 + h} \longrightarrow \ln 2 \times 1 \times \frac{2}{\pi} = \boxed{\frac{2 \ln 2}{\pi}}.$$

Les deux limites usuelles utilisées sont justifiées dans les pages suivantes.

Conserver le sens d'approche

Si $x \rightarrow +\infty$ et $t = 1/x$, alors $t \rightarrow 0^+$. Si $x \rightarrow a^-$ et $h = x - a$, alors $h \rightarrow 0^-$. Oublier le côté peut modifier le résultat.

COURS ET MÉTHODES

8. Les limites trigonométriques usuelles

En radians, lorsque $u \rightarrow 0$

$$\frac{\sin u}{u} \rightarrow 1, \quad \frac{\tan u}{u} \rightarrow 1, \quad \frac{\arcsin u}{u} \rightarrow 1, \quad \frac{\arctan u}{u} \rightarrow 1.$$

$$\frac{1 - \cos u}{u^2} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

Ces quotients sont considérés pour $u \neq 0$, près de 0.

Comprendre la première limite

La comparaison des aires dans le cercle unité donne, pour $0 < u < \pi/2$, $\sin u < u < \tan u$. Donc

$$\cos u < \frac{\sin u}{u} < 1.$$

Comme $\cos u \rightarrow 1$, l'encadrement donne la limite à droite. Le quotient $\sin u/u$ étant pair, la limite à gauche est la même. Ensuite $\tan u/u = (\sin u/u)/\cos u \rightarrow 1$.

Retrouver la limite du cosinus

L'identité $1 - \cos u = 2 \sin^2(u/2)$ donne

$$\frac{1 - \cos u}{u^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(u/2)}{u/2} \right)^2 \rightarrow \frac{1}{2}.$$

Pour les fonctions inverses, poser par exemple $v = \arcsin u$: alors $u = \sin v$, $v \rightarrow 0$, et $\arcsin u/u = v/\sin v \rightarrow 1$.

Exemple 13 · Faire correspondre les arguments

Pour des constantes a, b avec $b \neq 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{\tan(bx)} = \frac{a}{b}.$$

Si $a \neq 0$, on écrit $(\sin(ax)/(ax))(bx/\tan(bx))(a/b)$. Si $a = 0$, le numérateur est identiquement nul. Par exemple $\sin(2x)/\tan(3x) \rightarrow 2/3$.

L'argument doit tendre vers zéro

 $\sin u \sim u$ n'est valable que lorsque $u \rightarrow 0$. Pour $\sin(\pi \cos^2 x)$ près de 0, l'argument tend vers π : on commence par écrire $\sin(\pi \cos^2 x) = \sin(\pi \sin^2 x)$.

COURS ET MÉTHODES

9. Logarithmes et exponentielles

Les trois limites de base

Lorsque $u \rightarrow 0$,

$$\frac{\ln(1+u)}{u} \rightarrow 1, \quad \frac{e^u - 1}{u} \rightarrow 1, \quad \frac{a^u - 1}{u} \rightarrow \ln a \quad (a > 0).$$

Dans la première formule, il faut $1+u > 0$. La dernière vient de $a^u = e^{u \ln a}$; si $a = 1$, le quotient est nul.

Ces limites sont aussi les nombres dérivés en 0 des fonctions $\ln(1+u)$, e^u et a^u . On peut les établir à partir des propriétés de ces fonctions, sans utiliser la règle de l'Hôpital.

Exemple 14 · Un logarithme de quotient

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(5+x) - \ln(5-x)}{x}.$$

Près de 0, les deux arguments sont positifs. En posant $u = 2x/(5-x)$, on obtient

$$\frac{\ln\left(\frac{5+x}{5-x}\right)}{x} = \frac{\ln(1+u)}{u} \frac{2}{5-x} \rightarrow \boxed{\frac{2}{5}}.$$

Exemple 15 · Ajouter et retrancher le bon terme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{x^2} - 1}{x^2} + \frac{1 - \cos x}{x^2} \right) = 1 + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{3}{2}}.$$

Exemple 16 · Soustraction de deux exponentielles

Pour $u(x), v(x) \rightarrow 0$ et $u - v \neq 0$ au voisinage considéré,

$$\frac{e^{u(x)} - e^{v(x)}}{u(x) - v(x)} = e^{v(x)} \frac{e^{u(x)-v(x)} - 1}{u(x) - v(x)} \rightarrow 1.$$

En particulier, $(e^{\tan x} - e^x)/(\tan x - x) \rightarrow 1$ lorsque $x \rightarrow 0$.

Astuce

Devant deux exponentielles soustraites, factoriser par l'une d'elles. Devant deux logarithmes soustraits, réunir les termes en un logarithme de quotient, après vérification du domaine.

COURS ET MÉTHODES

10. Encadrer une expression oscillante

Théorème des gendarmes

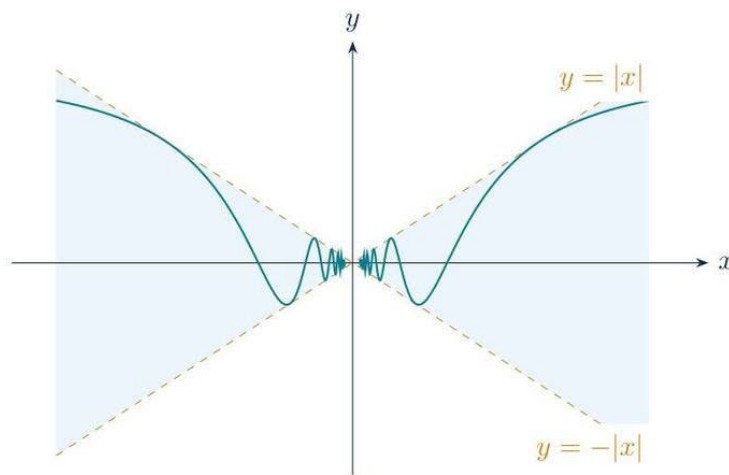
Si $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ au voisinage du point étudié et si $g(x) \rightarrow L$ et $h(x) \rightarrow L$, alors $f(x) \rightarrow L$.

Une conséquence très utile : si $u(x) \rightarrow 0$ et si v est bornée au voisinage considéré, alors $u(x)v(x) \rightarrow 0$. Il suffit d'écrire $|u(x)v(x)| \leq M|u(x)|$.

Exemple 17 · Une oscillation dont l'amplitude s'éteint

$$-|x| \leq x \sin(1/x) \leq |x| \quad (x \neq 0).$$

Les deux bornes tendent vers 0, donc $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin(1/x) = 0$.

**Pourquoi $\sin(1/x)$ seul n'a-t-il pas de limite ?**

Prenons $x_n = 1/(\pi/2 + 2\pi n)$ et $y_n = 1/(3\pi/2 + 2\pi n)$. Les deux suites tendent vers 0^+ , mais

$$\sin(1/x_n) = 1, \quad \sin(1/y_n) = -1.$$

Une même limite ne peut pas donner ces deux comportements. Le facteur x de l'exemple précédent est donc essentiel.

Piège à éviter

Une fonction peut être bornée sans avoir de limite. On ne remplace pas $\sin(1/x)$ par « $\sin \infty$ ». On exploite l'inégalité $|\sin t| \leq 1$, valable pour tout réel t .

COURS ET MÉTHODES

11. Les termes dominants à l'infini

Quotients de polynômes

Pour $P(x) = a_p x^p + \dots$ et $Q(x) = b_q x^q + \dots$, avec coefficients dominants non nuls,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \sim \frac{a_p}{b_q} x^{p-q} \quad (x \rightarrow \pm\infty).$$

$p < q$ La limite vaut 0.

$p = q$ La limite vaut a_p/b_q .

$p > q$ Le module tend vers l'infini ; le signe dépend de a_p/b_q , de $p - q$ et du côté.

Exemple 18 · Diviser par la plus grande puissance utile

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4x + 5}{3x^2 - x^3 + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x - 4/x^2 + 5/x^3}{3/x - 1 + 2/x^3} = 0.$$

Avec une racine : conserver la valeur absolue

$$\sqrt{3x^2 + 2} = |x| \sqrt{3 + \frac{2}{x^2}}.$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{3x^2 + 2}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{3 + 2/x^2}}{x} \frac{1}{1 - 2/x} = -\sqrt{3}.$$

À $+\infty$, le même quotient tend vers $+\sqrt{3}$.

Croissances comparées

Pour $\alpha > 0$ et $\beta > 0$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} = 0.$$

Le logarithme croît plus lentement qu'une puissance positive, elle-même plus lentement qu'une exponentielle de taux positif. Ces résultats se justifient notamment par dérivation ou par des encadrements.

Suites géométriques

Si $|r| < 1$, alors $r^n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Pour comparer des sommes de puissances a^n , diviser par la plus grande base positive : par exemple $(3^n - 4^n)/(2^n - 5^n) \rightarrow 0$.

COURS ET MÉTHODES

12. Transformer $\infty - \infty$ et $0 \times \infty$

Exemple 19 · Une différence de racines à l'infini

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 8x} - x).$$

L'expression est définie pour tout $x \geq 8$. Par conjugaison,

$$\sqrt{x^2 - 8x} - x = \frac{-8x}{\sqrt{x^2 - 8x} + x} = \frac{-8}{\sqrt{1 - 8/x} + 1} \rightarrow \boxed{-4}.$$

Exemple 20 · Réunir deux fractions

Pour $x \neq 1$ assez proche de 1,

$$\frac{2}{1-x^2} + \frac{1}{x-1} = \frac{2}{(1-x)(1+x)} - \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1+x}.$$

La limite en 1 vaut donc $1/2$, même si chaque terme initial devient non borné.

Exemple 21 · Un produit transformé en limite usuelle

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin(1/x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(1/x)}{1/x} = 1.$$

Cette limite à l'infini est différente de celle de $x \sin(1/x)$ lorsque $x \rightarrow 0$, qui vaut 0.

Exemple 22 · Un produit avec un logarithme

Pour $x \rightarrow 0^+$, posons $t = 1/x \rightarrow +\infty$:

$$x \ln x = -\frac{\ln t}{t} \rightarrow 0$$

par croissance comparée. Cela permet de prolonger continûment $x \ln x$ en 0 en lui attribuant la valeur 0.

Deux transformations à mémoriser

Différence : chercher un dénominateur commun ou un conjugué.

Produit : écrire $uv = u/(1/v)$ ou $v/(1/u)$ lorsque cela est permis, puis regarder la nouvelle forme obtenue.

Piège à éviter

Une transformation doit rester une égalité sur le domaine considéré. On ne peut pas additionner séparément des limites infinies de signes opposés pour en déduire une limite finie.

COURS ET MÉTHODES

13. Les équivalents : puissants, mais précis

Définition

On écrit $f(x) \sim g(x)$ au point étudié si g est non nulle au voisinage privé de ce point et si $f(x)/g(x) \rightarrow 1$. Les deux fonctions ont alors le même comportement multiplicatif au premier ordre.

Lorsque $u \rightarrow 0$, les limites usuelles donnent

$$\sin u \sim u, \quad \tan u \sim u, \quad \ln(1+u) \sim u, \quad e^u - 1 \sim u,$$

$$1 - \cos u \sim \frac{u^2}{2}, \quad (1+u)^\alpha - 1 \sim \alpha u \quad (\alpha \neq 0).$$

Les expressions doivent être définies ; pour la puissance réelle, on prend $1+u > 0$ près de 0.

Ce qui est autorisé

On peut multiplier et diviser des équivalents lorsque les quotients sont définis. Par exemple

$$\frac{\sin(3x) \ln(1+2x)}{1 - \cos(4x)} \sim \frac{(3x)(2x)}{(4x)^2/2} = \frac{3}{4}.$$

La limite cherchée est donc $3/4$. Chaque équivalent est appliqué à un argument qui tend vers 0.

Ce qui peut échouer : les soustractions

$\sin x \sim x$ ne permet pas de remplacer $\sin x - x$ par $x - x = 0$. Les termes principaux s'annulent et le résultat dépend du terme suivant :

$$\sin x - x = \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

De même, $\sqrt{x^2 + x} \sim x$ à $+\infty$, mais

$$\sqrt{x^2 + x} - x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} \rightarrow \frac{1}{2},$$

et non 0.

Une puissance variable exige aussi de la prudence

Même si $f \sim g$, on ne peut pas toujours remplacer $f^{h(x)}$ par $g^{h(x)}$ quand $h(x)$ diverge. Exemple : $1+x \sim 1$, mais $(1+x)^{1/x} \rightarrow e$, alors que $1^{1/x} = 1$.

Astuce

Utiliser les équivalents dans les **produits et quotients**. Devant une soustraction de termes proches, factoriser, conjuguer ou passer à un développement limité assez précis.

COURS ET MÉTHODES

14. Dérivées et règle de l'Hôpital

Reconnaître un taux d'accroissement

Si f est dérivable en a , alors, par définition,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a).$$

Par exemple, pour $a > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^\alpha - a^\alpha}{x - a} = \alpha a^{\alpha-1}.$$

Règle de l'Hôpital : une version pratique

Sur un intervalle d'approche du point considéré, supposons f et g dérivables, $g \neq 0$ et $g' \neq 0$. Supposons que f/g présente une forme $0/0$ ou ∞/∞ (avec les signes appropriés).

Si $\lim f'(x)/g'(x) = L$ existe, finie ou infinie, alors $\lim f(x)/g(x) = L$. Pour une limite bilatérale, appliquer le raisonnement de chaque côté si nécessaire.

Exemple 23 · Une annulation au troisième ordre

Pour $x \rightarrow 0$, $(x - \sin x)/x^3$ est de forme $0/0$. Une application de la règle donne

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \frac{1}{6}.$$

De même,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x}{3x^2} = \frac{1}{3}.$$

On dérive séparément le numérateur et le dénominateur ; **on n'utilise pas la formule de dérivation d'un quotient.**

Quand faut-il s'arrêter ?

Après chaque dérivation, réexaminer l'expression. Si une substitution ou une limite usuelle suffit, conclure. Si l'on veut recommencer, les hypothèses doivent encore être vérifiées.

Dériver sans diagnostic donne de faux résultats

Pour $x \rightarrow 0$, $(x + 1)/(2x + 4) \rightarrow 1/4$. Dériver séparément donnerait $1/2$, car la règle ne s'applique pas à une forme $1/4$. De plus, l'absence de limite de f'/g' ne prouve pas l'absence de limite de f/g .

La règle de l'Hôpital est un outil d'approfondissement. Pour justifier les formules de dérivation trigonométriques à partir des limites, on évite de les utiliser circulairement pour prouver ces mêmes limites.

COURS ET MÉTHODES

15. Développements limités : lire l'ordre utile

Un développement limité (DL) remplace localement une fonction par un polynôme, avec un reste contrôlé. La notation $r(x) = o(x^n)$ lorsque $x \rightarrow 0$ signifie que $r(x)/x^n \rightarrow 0$.

Formules à connaître au voisinage de 0

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3), \\ \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3), \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5), \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4), \\ \tan x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5), \\ (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$

La dernière formule est locale, avec $1+x > 0$ pour une puissance réelle. On obtient le DL de a^x en remplaçant x par $x \ln a$ dans celui de e^x , avec $a > 0$.

Choisir l'ordre, puis contrôler le reste

1. Déterminer l'ordre du dénominateur : par exemple $\sin^6(2x) \sim 64x^6$.
2. Développer le numérateur jusqu'au premier terme non nul utile.
3. Effectuer les annulations et conserver un reste négligeable après division.
4. Diviser, puis passer à la limite.

Exemple 24 · Deux termes s'annulent

$$\frac{e^x - 1 - x}{3x^2} = \frac{x^2/2 + o(x^2)}{3x^2} \rightarrow \frac{1}{6}.$$

Ne pas oublier le reste

Écrire $e^x = 1 + x + x^2/2$ comme une égalité exacte est faux. Un DL n'est pas une égalité polynomiale globale. Le terme $o(x^2)$ explique rigoureusement pourquoi l'erreur disparaît après division par x^2 .

COURS ET MÉTHODES

16. DL composés et paramètres

Exemple 25 · Composition et annulation d'ordre élevé

Calculons $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - 1 - x^3}{\sin^6(2x)}$. Posons $u = x^3$. Comme $u \rightarrow 0$,

$$e^{x^3} = 1 + x^3 + \frac{x^6}{2} + o(x^6), \quad \sin^6(2x) \sim (2x)^6 = 64x^6.$$

Le quotient tend donc vers $(1/2)/64 = \boxed{1/128}$.

Exemple 26 · Déterminer des coefficients par annulation

On cherche a, b pour que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - a - bx}{x^2}$$

soit finie. Le numérateur s'écrit

$$(1 - a) + (1 - b)x + \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Le terme constant doit s'annuler, donc $a = 1$. Ensuite, le terme linéaire doit s'annuler, donc $b = 1$. Il reste $x^2/2 + o(x^2)$, et la limite vaut $1/2$.

Principe général

Si le dénominateur est équivalent à cx^m avec $c \neq 0$, une limite finie impose l'annulation de tous les termes non nuls du numérateur d'ordre strictement inférieur à m . Le coefficient d'ordre m , divisé par c , donne alors la limite.

Exemple 27 · Une différence de cosinus

Pour $L = \lim_{x \rightarrow 0} (\cos(\sin x) - \cos x)/x^4$, on a

$$\sin^2 x = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4), \quad \sin^4 x = x^4 + o(x^4).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \cos(\sin x) &= 1 - \frac{\sin^2 x}{2} + \frac{\sin^4 x}{24} + o(x^4) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{24}\right)x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

En retranchant $\cos x = 1 - x^2/2 + x^4/24 + o(x^4)$, on obtient $x^4/6 + o(x^4)$, donc $\boxed{L = 1/6}$.

Astuce

L'ordre utile n'est pas seulement « la puissance visible en bas ». Il faut d'abord simplifier ou trouver un équivalent du dénominateur, puis tenir compte des annulations du numérateur.

COURS ET MÉTHODES

17. Puissances indéterminées

La méthode universelle : passer au logarithme

Pour $Y(x) = u(x)^{v(x)}$ avec $u(x) > 0$, écrire

$$Y(x) = \exp(v(x) \ln u(x)).$$

Étudier $H(x) = v(x) \ln u(x)$. Si $H \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$, alors $Y \rightarrow e^\ell$. Si $H \rightarrow +\infty$, alors $Y \rightarrow +\infty$; si $H \rightarrow -\infty$, alors $Y \rightarrow 0$.

Le raccourci justifié pour une base qui tend vers 1

Si $u(x) = 1 + w(x)$ avec $w(x) \rightarrow 0$, alors $\ln(1 + w) \sim w$. Ainsi, si $v(x)w(x) \rightarrow \ell$, on obtient

$$(1 + w(x))^{v(x)} \longrightarrow e^\ell.$$

Ce résultat inclut les limites infinies de l'exposant logarithmique. Il exprime une limite, pas une égalité exacte entre $(1 + w)^v$ et e^{vw} .

Exemple 28 · Deux formes classiques

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x} = e, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{bx} = e^{ab}$$

pour $a, b \in \mathbb{R}$. Dans le second cas, la base est positive pour x assez grand. En effet, $bx \ln(1 + a/x) \rightarrow ab$.

Exemple 29 · Une forme 0^0

Pour $x > 0$, $x^x = \exp(x \ln x)$. Or $x \ln x \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow 0^+$, donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1.$$

Exemple 30 · Une forme ∞^0

Lorsque $x \rightarrow +\infty$,

$$x^{1/x} = \exp\left(\frac{\ln x}{x}\right) \longrightarrow 1.$$

La forme ne donne pas le résultat

Quand $x \rightarrow 0^+$, $x^x \rightarrow 1$, mais $x^{1/\ln x} = e$. Dans les deux cas, la base tend vers 0 et l'exposant vers 0. Il faut calculer le produit logarithmique, puis revenir à l'exponentielle.

COURS ET MÉTHODES

18. Synthèse : choisir et rédiger

Une grille de décision

Ce que l'on voit	Le premier essai utile
Expression continue au point	Substitution directe.
Polynômes donnant 0/0	Factorisation et simplification.
Différence de racines	Conjugué, parfois deux fois.
Argument proche d'un nombre $a \neq 0$	Poser $h = x - a$, ou recentrer l'argument.
Sinus, logarithme, exponentielle près de 0	Faire apparaître une limite usuelle.
Terme borné multiplié par un petit facteur	Encadrement en valeur absolue.
Rapport à l'infini	Termes dominants et étude du signe.
Soustraction avec annulations fines	DL à l'ordre nécessaire.
Puissance avec base et exposant variables	Logarithme de l'expression.
Valeur absolue, partie entière, morceaux	Limites latérales.

Exemple 31 · Une somme avec parties entières

Pour $x \neq 0$, écrire $\lfloor k/x \rfloor = k/x - \{k/x\}$ donne

$$x \sum_{k=1}^{15} \lfloor \frac{k}{x} \rfloor = 120 - x \sum_{k=1}^{15} \left\{ \frac{k}{x} \right\}.$$

Comme $0 \leq \{t\} < 1$, le module du dernier terme est inférieur ou égal à $15|x|$. Il tend vers 0 : la limite bilatérale vaut 120. Le nombre de termes est fixe, ce qui rend l'encadrement immédiat.

Une rédaction complète en cinq lignes logiques

Domaine : où le calcul a-t-il un sens ?

Diagnostic : substitution ou forme indéterminée ?

Transformation : quelle égalité ou quel théorème est utilisé ?

Limite : quelles limites usuelles et quelles hypothèses ?

Conclusion : valeur, limite infinie, ou absence de limite, avec le côté si nécessaire.

Les trois vérifications finales

Contrôler le signe, l'argument des fonctions composées et la cohérence de l'ordre de grandeur. Un calcul numérique proche du point peut aider à repérer une erreur, mais ne remplace pas la démonstration.

EXERCICES · NIVEAU 1

Les fondations

Consigne générale

Justifier les résultats. Vérifier le domaine près du point étudié et préciser les limites latérales si nécessaire. Les corrigés commencent page 28.

1. Limite et prolongement

Continuité

Soit $f(x) = (x^2 - 4)/(x - 2)$ pour $x \neq 2$. Calculer $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, puis choisir $f(2)$ pour obtenir une fonction continue.

2. Raccorder deux formules

Limites latérales

On pose $f(x) = 2x + 1$ si $x < 1$ et $f(x) = x^2 + a$ si $x \geq 1$. Déterminer a pour que f soit continue en 1.

3. Partie entière

Domaine local

Calculer les limites à gauche et à droite en 2 de $\lfloor x \rfloor$ et de $\{x\}$. Ces deux fonctions ont-elles une limite bilatérale en 2 ?

4. La racine cache une valeur absolue

Signe

Étudier les limites latérales en 0 de

$$\frac{\sqrt{1 - \cos(2x)}}{x}.$$

En déduire si la limite bilatérale existe.

5. Deux polynômes

Factorisation

Calculer $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$.

6. Deux racines emboîtées

Conjugaison

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sqrt{1 + x^4}} - \sqrt{2}}{x^4}$.

7. Une racine cinquième

Substitution

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - x)^{1/5} - 1}{x}$ sans dériver.

8. Des exponentielles à factoriser

Substitution

Calculer $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3^x + 3^{3-x} - 12}{3^{-x/2} - 3^{1-x}}$ en posant $t = 3^{x/2}$.

EXERCICES · NIVEAU 2

Les outils usuels

9. Arguments différents

Trigonométrie

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{\tan(2x)}$.

10. Deux logarithmes

Limite usuelle

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(5+x) - \ln(5-x)}{x}$.

11. Un produit dissimulé

Factorisation

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{10^x - 2^x - 5^x + 1}{x \tan x}$.

12. Un angle proche de π

Composition

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi \cos^2 x)}{x^2}$.

13. Osciller ou converger ?

Encadrement

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos(1/x^2)$. Montrer ensuite que $\cos(1/x^2)$ n'a pas de limite en 0.

14. Une racine à $-\infty$

Valeur absolue

Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{3x^2 + 2}}{x - 2}$.

15. Soustraction à l'infini

Conjugué

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 8x} - x)$.

16. Une somme de parties entières

Encadrement

Calculer la limite bilatérale

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \left(\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2}{x} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{15}{x} \right\rfloor \right).$$

Si le calcul se bloque

Dans les exercices 11 et 12, transformer d'abord le numérateur. Dans les exercices 13 et 16, chercher une borne sur l'erreur plutôt qu'une formule exacte pour les oscillations.

EXERCICES · NIVEAU 3

Annulations et puissances

17. Un produit indéterminé

Croissances comparées

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$. Comment prolonger cette fonction continûment en 0 ?

18. Logarithmes de tangentes

Domaine et comparaison

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\tan^2(2x))}{\ln(\tan^2 x)}$.

19. Une différence au second ordre

Développement limité

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$.

20. Deux cosinus très proches

Ordre quatre

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^4}$.

21. Un numérateur d'ordre six

Composition

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - 1 - x^3}{\sin^6(2x)}$.

22. Annuler les bons coefficients

Paramètres

Déterminer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ pour que la limite suivante soit finie, puis calculer cette limite :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 + \alpha \sin x + \beta \cos x + \ln(1-x)}{3 \tan^2 x}.$$

23. Une base qui tend vers 1

Puissance indéterminée

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2+3x^2}{2+7x^2} \right)^{1/x^2}$.

24. Deux puissances classiques

Passage au logarithme

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/x}$.

EXERCICES · NIVEAU 4

Les défis de synthèse

25. Moyenne d'exponentielles

Paramètres positifs

Pour $a, b, c > 0$, calculer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)^{2/x}.$$

26. Soustraire la bonne droite

Comportement à l'infini

Déterminer les réels a, b tels que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - ax) = b.$$

Reprendre la question lorsque $x \rightarrow -\infty$; les paramètres peuvent alors être différents.

27. Une somme de cent termes

Somme finie

Calculer $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sum_{k=1}^{100} x^k - 100}{x - 1}.$

28. Une fonction inconnue

Nombre dérivé

Une fonction f est dérivable en 2, avec $f(2) = 4$ et $f'(2) = 1$. Calculer, sans supposer que f' est continue,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 f(2) - 4f(x)}{x - 2}.$$

29. Deux limites, une équation

Synthèse

On définit, avec $\cot x = \cos x / \sin x$,

$$\alpha = \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\tan^3 x - \tan x}{\cos(x + \pi/4)}, \quad \beta = \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\cot x}.$$

Calculer α et β , puis écrire le polynôme unitaire de degré 2 dont ils sont les racines.

30. Faire apparaître le troisième ordre

Paramètres et DL

Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ pour que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1 - ax - bx^2}{x^3}$$

soit finie. Calculer la limite obtenue.

Avant d'ouvrir les corrigés

Pour chaque réponse, expliquer pourquoi la méthode choisie s'applique. Une valeur correcte sans justification ne permet pas de savoir si le raisonnement est réutilisable.

CORRIGÉS DÉTAILLÉS · 1 À 4

Comprendre le comportement local

1. La limite ne dépend pas de la valeur isolée

Pour $x \neq 2$, $f(x) = (x-2)(x+2)/(x-2) = x+2$. Cette égalité vaut dans le voisinage privé de 2, donc

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4.$$

Pour obtenir la continuité, il faut et il suffit de poser $f(2) = 4$. Une autre valeur en 2 ne changerait pas la limite, mais détruirait la continuité.

2. Accorder les deux côtés et la valeur

À gauche de 1, on utilise $2x+1$, donc la limite vaut 3. À droite, on utilise x^2+a , donc la limite vaut $1+a$. La valeur en 1 vaut également $1+a$.

$$3 = 1 + a \iff a = 2.$$

Avec ce choix, les deux limites latérales et $f(1)$ valent 3. La fonction est bien continue en 1.

3. Identifier l'intervalle contenant x

Si $1 < x < 2$, alors $\lfloor x \rfloor = 1$ et $\{x\} = x-1$. Si $2 < x < 3$, alors $\lfloor x \rfloor = 2$ et $\{x\} = x-2$.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \lfloor x \rfloor = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \lfloor x \rfloor = 2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \{x\} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \{x\} = 0.$$

Les limites latérales étant différentes dans chaque cas, **aucune des deux limites bilatérales n'existe**.

4. La racine carrée est toujours positive

On utilise $1 - \cos(2x) = 2 \sin^2 x$, donc

$$\frac{\sqrt{1 - \cos(2x)}}{x} = \sqrt{2} \frac{|\sin x|}{x} = \sqrt{2} \frac{|\sin x|}{|x|} \frac{|x|}{x}.$$

Le premier quotient tend vers 1. Le dernier vaut 1 pour $x > 0$ et -1 pour $x < 0$. Ainsi,

$$L_+ = \sqrt{2}, \quad L_- = -\sqrt{2}.$$

Il n'existe pas de limite bilatérale. Le simple changement de signe ne suffirait pas à le prouver : ici, on a bien calculé deux limites non nulles et différentes.

CORRIGÉS DÉTAILLÉS · 5 À 8

Simplifier avant de substituer

5. Différence de cubes et différence de carrés

Pour $x \neq 2$ proche de 2,

$$\frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} = \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{(x - 2)(x + 2)} = \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 2} \rightarrow \boxed{3}.$$

Le facteur restant au dénominateur tend vers $4 \neq 0$, ce qui autorise la substitution finale.

6. Deux conjugaisons successives

Toutes les racines sont définies pour tout réel x . Pour $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{1 + \sqrt{1 + x^4}} - \sqrt{2}}{x^4} &= \frac{\sqrt{1 + x^4} - 1}{x^4(\sqrt{1 + \sqrt{1 + x^4}} + \sqrt{2})} \\ &= \frac{1}{(\sqrt{1 + x^4} + 1)(\sqrt{1 + \sqrt{1 + x^4}} + \sqrt{2})}. \end{aligned}$$

Le dénominateur tend vers $2 \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$. Ainsi,

$$L = \frac{1}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{8}.$$

7. Faire disparaître la racine cinquième

Posons $t = (1 - x)^{1/5}$. Quand $x \rightarrow 0$, $t \rightarrow 1$ et $x = 1 - t^5$. Pour $t \neq 1$,

$$\frac{t - 1}{1 - t^5} = -\frac{1}{1 + t + t^2 + t^3 + t^4} \rightarrow \boxed{-\frac{1}{5}}.$$

Le signe négatif provient de $1 - t^5 = -(t - 1)(1 + t + \dots + t^4)$.

8. Une substitution exponentielle

Avec $t = 3^{x/2}$, on a $t \rightarrow 3$ et

$$\frac{3^x + 3^{3-x} - 12}{3^{-x/2} - 3^{1-x}} = \frac{t^4 - 12t^2 + 27}{t - 3} = \frac{(t - 3)(t + 3)(t^2 - 3)}{t - 3}.$$

Après simplification, $(t + 3)(t^2 - 3) \rightarrow 6 \times 6 = \boxed{36}$. Le dénominateur initial s'annule seulement lorsque $t = 3$, soit $x = 2$, dans le voisinage étudié.

CORRIGÉS DÉTAILLÉS · 9 À 12

Faire apparaître les limites usuelles

9. Les coefficients des arguments

$$\frac{\sin(5x)}{\tan(2x)} = \frac{\sin(5x)}{5x} \frac{2x}{\tan(2x)} \frac{5}{2} \longrightarrow 1 \times 1 \times \frac{5}{2} = \boxed{\frac{5}{2}}.$$

Les angles sont en radians et les quotients sont définis pour $x \neq 0$ suffisamment petit.

10. Ramener le logarithme à $\ln(1+u)$

Pour $|x| < 5$, les arguments sont positifs. On écrit

$$\ln(5+x) - \ln(5-x) = \ln\left(1 + \frac{2x}{5-x}\right).$$

Avec $u = 2x/(5-x) \rightarrow 0$,

$$\frac{\ln(1+u)}{x} = \frac{\ln(1+u)}{u} \frac{2}{5-x} \longrightarrow \boxed{\frac{2}{5}}.$$

11. Reconnaître un produit

Comme $10^x = 2^x 5^x$, le numérateur se factorise :

$$10^x - 2^x - 5^x + 1 = (2^x - 1)(5^x - 1).$$

Par conséquent,

$$\frac{(2^x - 1)(5^x - 1)}{x \tan x} = \frac{2^x - 1}{x} \frac{5^x - 1}{x} \frac{x}{\tan x} \longrightarrow \boxed{\ln 2 \ln 5}.$$

Il s'agit d'un **produit** de logarithmes, pas de $\ln 10$.

12. Déplacer l'argument de π vers 0

Grâce à $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ et à $\sin(\pi - u) = \sin u$,

$$\sin(\pi \cos^2 x) = \sin(\pi \sin^2 x).$$

Ainsi,

$$\frac{\sin(\pi \cos^2 x)}{x^2} = \frac{\sin(\pi \sin^2 x)}{\pi \sin^2 x} \pi \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \longrightarrow \boxed{\pi}.$$

Cette fois, l'argument $\pi \sin^2 x$ tend bien vers zéro. Appliquer directement $\sin u \sim u$ à $u = \pi \cos^2 x$ aurait été incorrect.

CORRIGÉS DÉTAILLÉS · 13 À 16

Bornes, signes et termes dominants

13. Un facteur amortit les oscillations

Pour $x \neq 0$, $|x^2 \cos(1/x^2)| \leq x^2$. Puisque $x^2 \rightarrow 0$, le théorème des gendarmes donne $\boxed{L = 0}$.

En revanche, posons pour $n \geq 1$,

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}, \quad y_n = \frac{1}{\sqrt{(2n+1)\pi}}.$$

Ces deux suites tendent vers 0^+ , mais $\cos(1/x_n^2) = 1$ et $\cos(1/y_n^2) = -1$. Donc $\cos(1/x^2)$ n'a pas de limite en 0.

14. À $-\infty$, $|x| = -x$

$$\frac{\sqrt{3x^2+2}}{x-2} = \frac{|x|}{x} \frac{\sqrt{3+2/x^2}}{1-2/x} \rightarrow (-1) \frac{\sqrt{3}}{1} = \boxed{-\sqrt{3}}.$$

On peut contrôler le signe : près de $-\infty$, le numérateur est positif et le dénominateur négatif, donc une limite positive serait incohérente.

15. Une différence transformée en quotient

Pour $x \geq 8$,

$$\sqrt{x^2 - 8x} - x = \frac{-8x}{\sqrt{x^2 - 8x} + x} = \frac{-8}{\sqrt{1 - 8/x} + 1} \rightarrow \boxed{-4}.$$

Les deux grands termes se compensent presque, et le conjugué révèle l'écart qui subsiste.

16. Contrôler une erreur bornée

Écrivons $\lfloor k/x \rfloor = k/x - \{k/x\}$. Alors

$$x \sum_{k=1}^{15} \left\lfloor \frac{k}{x} \right\rfloor = \sum_{k=1}^{15} k - x \sum_{k=1}^{15} \left\{ \frac{k}{x} \right\} = 120 - r(x).$$

Comme $|r(x)| \leq 15|x| \rightarrow 0$, on obtient $\boxed{L = 120}$. L'encadrement en valeur absolue traite simultanément $x > 0$ et $x < 0$.

CORRIGÉS DÉTAILLÉS · 17 À 20

Comparer puis développer

17. Logarithme contre puissance

Pour $x > 0$, posons $t = 1/x$. Alors $x \rightarrow 0^+$ équivaut à $t \rightarrow +\infty$ et

$$x \ln x = -\frac{\ln t}{t} \longrightarrow \boxed{0}.$$

Le prolongement continu sur $[0, +\infty[$ est donc $g(0) = 0$ et $g(x) = x \ln x$ pour $x > 0$. La continuité en 0 s'entend sur ce domaine, donc à droite.

18. Utiliser les valeurs absolues dans les logarithmes

Pour $x \neq 0$ suffisamment petit, les carrés des tangentes sont positifs. On a

$$\frac{\ln(\tan^2(2x))}{\ln(\tan^2 x)} = \frac{\ln |\tan(2x)|}{\ln |\tan x|} = 1 + \frac{\ln \left| \frac{\tan(2x)}{\tan x} \right|}{\ln |\tan x|}.$$

Le numérateur du dernier quotient tend vers $\ln 2$, tandis que son dénominateur tend vers $-\infty$. Ce quotient tend donc vers 0, et $\boxed{L = 1}$. Les valeurs absolues rendent la preuve valable des deux côtés.

19. Conserver le terme quadratique

Près de 0, avec $x > -1$,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Donc $[\ln(1+x) - x]/x^2 = -1/2 + o(1)$ et $\boxed{L = -1/2}$.

20. Une solution sans DL composé

On utilise $\cos u - \cos v = 2 \sin((u+v)/2) \sin((v-u)/2)$:

$$\cos(\sin x) - \cos x = 2 \sin\left(\frac{x + \sin x}{2}\right) \sin\left(\frac{x - \sin x}{2}\right).$$

Les deux arguments tendent vers 0. Le numérateur est donc équivalent à

$$\frac{(x + \sin x)(x - \sin x)}{2} \sim \frac{(2x)(x^3/6)}{2} = \frac{x^4}{6}.$$

Ainsi $\boxed{L = 1/6}$. On a utilisé $x - \sin x \sim x^3/6$, établi au cours par l'Hôpital ou par DL.

CORRIGÉS DÉTAILLÉS · 21 À 24

Annuler et passer au logarithme

21. Deux ordres six se compensent

Avec $u = x^3$, $e^u - 1 - u = u^2/2 + o(u^2)$ donne

$$e^{x^3} - 1 - x^3 = \frac{x^6}{2} + o(x^6).$$

Puisque $\sin^6(2x) \sim 64x^6$, la limite vaut $\boxed{1/128}$.

22. Les coefficients de bas degré doivent disparaître

Le domaine contient un voisinage privé de 0 assez petit, avec $x < 1$. À l'ordre 2,

$$3 + \alpha \sin x + \beta \cos x + \ln(1 - x) = (3 + \beta) + (\alpha - 1)x - \frac{\beta + 1}{2}x^2 + o(x^2).$$

Le dénominateur est équivalent à $3x^2$. Une limite finie impose d'abord $3 + \beta = 0$, puis $\alpha - 1 = 0$. Ainsi $\boxed{\alpha = 1, \beta = -3}$. Le numérateur devient alors $x^2 + o(x^2)$, et $\boxed{L = 1/3}$.

Ces conditions sont suffisantes, car le calcul du reste montre bien que le quotient tend vers une valeur finie. Si le terme constant ne s'annule pas, il domine ; s'il est nul mais que le terme linéaire subsiste, celui-ci empêche encore une limite finie.

23. Calculer l'exposant logarithmique

La base est positive. Posons

$$w(x) = \frac{2 + 3x^2}{2 + 7x^2} - 1 = \frac{-4x^2}{2 + 7x^2}.$$

On a $w \rightarrow 0$ et $w(x)/x^2 \rightarrow -2$. Comme $\ln(1 + w) \sim w$,

$$\frac{1}{x^2} \ln \left(\frac{2 + 3x^2}{2 + 7x^2} \right) \rightarrow -2.$$

Par continuité de l'exponentielle, $\boxed{L = e^{-2}}$.

24. Revenir à l'exponentielle à la fin

Lorsque $x \rightarrow 0^+$, $x \ln x \rightarrow 0$, donc $x^x = e^{x \ln x} \rightarrow \boxed{1}$.

Lorsque $x \rightarrow +\infty$, $(\ln x)/x \rightarrow 0$, donc $x^{1/x} = e^{(\ln x)/x} \rightarrow \boxed{1}$. Le résultat 0 serait celui de l'exposant logarithmique, pas celui des puissances initiales.

CORRIGÉS DÉTAILLÉS · 25 À 27

Trois problèmes de synthèse

25. Une moyenne, puis une puissance

Posons $u(x) = (a^x + b^x + c^x)/3$. Comme $a, b, c > 0$, on a $u(x) > 0$ et $u(x) \rightarrow 1$. Les limites exponentielles usuelles donnent

$$\frac{u(x) - 1}{x} = \frac{1}{3} \left(\frac{a^x - 1}{x} + \frac{b^x - 1}{x} + \frac{c^x - 1}{x} \right) \rightarrow \frac{\ln a + \ln b + \ln c}{3}.$$

Notons $\kappa = (\ln a + \ln b + \ln c)/3$. Le calcul précédent donne $u(x) = 1 + \kappa x + o(x)$. Le DL du logarithme fournit alors $\ln u(x) = \kappa x + o(x)$, donc

$$\frac{2}{x} \ln u(x) \rightarrow \frac{2}{3} \ln(abc).$$

Ainsi $\boxed{L = (abc)^{2/3}}$. Cette justification inclut les cas où certains paramètres valent 1, ou même $a = b = c = 1$.

26. Identifier la pente, puis l'écart

À $+\infty$, $\sqrt{x^2 - x + 1}/x \rightarrow 1$. Si $\sqrt{x^2 - x + 1} - ax$ tend vers un réel, alors, en divisant par x , on doit avoir $1 - a = 0$. Donc $a = 1$ est nécessaire.

Pour ce choix, le conjugué donne

$$\sqrt{x^2 - x + 1} - x = \frac{-x + 1}{\sqrt{x^2 - x + 1} + x} = \frac{-1 + 1/x}{\sqrt{1 - 1/x + 1/x^2} + 1} \rightarrow -\frac{1}{2}.$$

Ainsi $\boxed{a = 1, b = -1/2}$ à $+\infty$.

À $-\infty$, $\sqrt{x^2 - x + 1}/x \rightarrow -1$, donc $a = -1$ est nécessaire. En posant $t = -x \rightarrow +\infty$,

$$\sqrt{x^2 - x + 1} + x = \sqrt{t^2 + t + 1} - t = \frac{t + 1}{\sqrt{t^2 + t + 1} + t} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

Donc $\boxed{a = -1, b = 1/2}$ à $-\infty$.

27. Distribuer la constante dans une somme finie

$$\frac{\sum_{k=1}^{100} x^k - 100}{x - 1} = \sum_{k=1}^{100} \frac{x^k - 1}{x - 1}.$$

Chaque terme tend vers k lorsque $x \rightarrow 1$. Le nombre de termes est fini, donc on peut additionner les limites :

$$\boxed{L = \sum_{k=1}^{100} k = \frac{100 \times 101}{2} = 5050.}$$

CORRIGÉS DÉTAILLÉS · 28 À 30

Mobiliser plusieurs idées

28. Utiliser seulement la dérivabilité au point

On ajoute et retranche $4f(2)$ au numérateur :

$$\frac{x^2 f(2) - 4f(x)}{x - 2} = f(2) \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}.$$

Le premier quotient tend vers 4, le second vers $f'(2) = 1$. Donc

$$L = 4 \times 4 - 4 \times 1 = 12.$$

Cette preuve n'utilise que la dérivabilité en 2. Invoquer directement l'Hôpital demanderait des hypothèses supplémentaires sur un voisinage du point.

29. Deux calculs indépendants, puis une synthèse

Pour la première limite, on écrit

$$\tan^3 x - \tan x = \frac{\tan x (\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)}{\cos^2 x},$$

et $\cos(x + \pi/4) = (\cos x - \sin x)/\sqrt{2}$. Après simplification pour $x \neq \pi/4$ proche de ce point,

$$\frac{\tan^3 x - \tan x}{\cos(x + \pi/4)} = -\sqrt{2} \frac{\tan x (\sin x + \cos x)}{\cos^2 x} \rightarrow -4.$$

Donc $\alpha = -4$.

Près de 0, $\cos x > 0$, et

$$\ln((\cos x)^{\cot x}) = \cot x \ln(\cos x).$$

Or $\ln(\cos x) \sim -x^2/2$ et $\cot x \sim 1/x$. Le produit est équivalent à $-x/2$ et tend vers 0. Ainsi $\beta = 1$.

Le polynôme unitaire demandé est

$$(X - \alpha)(X - \beta) = (X + 4)(X - 1) = X^2 + 3X - 4.$$

30. Faire disparaître les ordres un et deux

Le DL $e^{2x} = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$ donne le numérateur

$$(2 - a)x + (2 - b)x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3).$$

Une limite finie après division par x^3 impose $a = 2, b = 2$. Pour ces valeurs, le quotient vaut $4/3 + o(1)$, d'où $L = 4/3$.

FICHE DE RÉVISION

L'essentiel sur une page

Limites usuelles en 0 · angles en radians

$$\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1, \quad \frac{\tan x}{x} \rightarrow 1, \quad \frac{\arcsin x}{x} \rightarrow 1, \quad \frac{\arctan x}{x} \rightarrow 1.$$

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} \rightarrow \frac{1}{2}, \quad \frac{x - \sin x}{x^3} \rightarrow \frac{1}{6}, \quad \frac{\tan x - x}{x^3} \rightarrow \frac{1}{3}.$$

$$\frac{\ln(1+x)}{x} \rightarrow 1, \quad \frac{e^x - 1}{x} \rightarrow 1, \quad \frac{a^x - 1}{x} \rightarrow \ln a \quad (a > 0).$$

Les transformations qui reviennent souvent

Factorisation	$x^n - a^n = (x - a) \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} a^k.$
Conjugué	$(\sqrt{U} - \sqrt{V})(\sqrt{U} + \sqrt{V}) = U - V.$
Valeur absolue	$\sqrt{x^2} = x $, toujours.
Trigonométrie	$1 - \cos x = 2 \sin^2(x/2).$
Logarithmes	$\ln A - \ln B = \ln(A/B)$ pour $A, B > 0.$
Exponentielles	$e^u - e^v = e^v(e^{u-v} - 1).$
Puissances	$u^v = \exp(v \ln u)$ pour $u > 0.$
Partie entière	$[t] = t - \{t\}$ et $0 \leq \{t\} < 1.$

Trois règles de décision

1. **Une soustraction annule les premiers termes ?** Passer à un ordre supérieur, ou transformer exactement l'expression.
2. **Un changement de signe est possible ?** Étudier les deux côtés et conserver les valeurs absolues.
3. **La base et l'exposant varient ?** Calculer le logarithme, puis revenir à l'exponentielle.

La dernière minute avant de rendre

Ai-je respecté le domaine et le sens d'approche ? Ai-je utilisé les radians ? Le dénominateur simplifié est-il non nul près du point ? Les conditions du théorème sont-elles vérifiées ? Ai-je bien conclu sur l'expression initiale ?

Maths Olympiad

Une bonne méthode commence par un bon diagnostic.

Limites

Méthodes rapides et raisonnement rigoureux

Un cours détaillé pour comprendre les raccourcis,
reconnaître les pièges et justifier ses réponses.

DU CALCUL À UNE IDÉE GÉNÉRALE

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a_1^x + \cdots + a_n^x}{n} \right)^{1/x} = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$$

Pour n fixé et $a_1, \dots, a_n > 0$: une puissance indéterminée révèle une moyenne géométrique.
La démonstration est expliquée dans ce cours.

Au programme

- Termes dominants, racines et asymptotes avec paramètres.
- Sommes dont le nombre de termes augmente.
- Trigonométrie, radians et limites avec partie entière.
- Dérivées, règle de l'Hôpital et limites composées.
- Exponentielles, puissances indéterminées et encadrements.

Cours, entraînement et révision

24 exercices progressifs et leurs corrigés détaillés, des exemples guidés, des encadrés « Méthode / Astuce / Piège » et une fiche de synthèse.

Maths Olympiad

Fin de lycée et approfondissement.

Une adaptation pédagogique originale en français de la nouvelle transcription fournie.

MODE D'EMPLOI

Lire, comprendre, puis s'entraîner

Ce second volume est autonome, tout en complétant le premier cours sur les limites. Il insiste sur les techniques de calcul mises en avant dans la nouvelle transcription : comparaison des croissances, partie entière, sommes et puissances.

Ce qui a été clarifié

Les répétitions ont été retirées. Les égalités, les domaines et les sens d'approche sont précisés. Les exemples dont l'écriture orale est incomplète sont remplacés par des énoncés explicites ; une ambiguïté sur un dénominateur trigonométrique est étudiée sous ses deux variantes.

Sommaire

Notion ou méthode	Page
Comprendre les formes indéterminées	39
Polynômes et termes dominants sous les racines	40
Sommes dont le nombre de termes augmente	42
Rationaliser à l'infini et déterminer une asymptote	43
Dérivées et règle de l'Hôpital	45
Trigonométrie, radians et partie entière	46
Oscillations et simplifications trigonométriques	48
Exponentielles, logarithmes et puissances	50
Moyennes géométriques et factorielle	52
Encadrement avec partie entière	53
Méthode de résolution et pièges à éviter	54
Les 24 exercices	55
Corrigés détaillés	58
Fiche de révision	64

Notations

$\ln$ désigne le logarithme népérien ; $\lfloor t \rfloor$ est le plus grand entier inférieur ou égal à t ; $\{t\} = t - \lfloor t \rfloor \in [0, 1[$. Tous les angles sont **en radians**, sauf indication explicite en degrés.

La notation $f \sim g$ signifie $f/g \rightarrow 1$, sur un voisinage où le quotient est défini. On écrit $r(x) = o(x)$ si $r(x)/x \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow 0$.

Un rythme de travail utile

Lire une méthode, refaire son exemple sans regarder, puis résoudre l'exercice associé. Avant le corrigé, écrire au moins le domaine, la forme rencontrée et la transformation choisie.

COURS ET MÉTHODES

1. Ce que signifie une forme indéterminée

Une limite décrit le comportement d'une fonction lorsque sa variable s'approche d'un point ou devient arbitrairement grande. Une forme indéterminée apparaît lorsque les comportements des éléments ne suffisent pas à déterminer celui de l'expression entière.

Les sept formes classiques

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty - \infty, \quad 0 \times \infty, \quad 1^\infty, \quad 0^0, \quad \infty^0.$$

Ces symboles sont des **descriptions de comportements**, pas des opérations à effectuer sur des nombres.

Pourquoi ne peut-on pas « simplifier les infinis » ?

Lorsque $x \rightarrow +\infty$, les numérateurs et les dénominateurs ci-dessous tendent tous vers $+\infty$, mais

$$\frac{x}{x} = 1, \quad \frac{2x}{x} = 2, \quad \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} \rightarrow 0, \quad \frac{x^2}{x} = x \rightarrow +\infty.$$

Le quotient $x(2 + \sin x)/x = 2 + \sin x$ n'a même pas de limite. La forme ∞/∞ peut donc conduire à des comportements différents.

Une correction essentielle

Il est faux de dire que « deux infinis ne sont jamais égaux » ou que 10^{100} est une valeur de l'infini. 10^{100} reste un nombre fini. Le vrai problème est que deux fonctions peuvent diverger à des vitesses différentes ; il faut comparer les fonctions, pas traiter ∞ comme un nombre ordinaire.

Le même phénomène au voisinage de zéro

Lorsque $x \rightarrow 0^+$, les expressions x/x , x^2/x et x/x^2 sont toutes de forme $0/0$, mais tendent respectivement vers 1, 0 et $+\infty$.

Dans 1^∞ , la base *tend vers* 1 ; elle n'est pas forcément exactement égale à 1. De même, dans $0 \times \infty$, le premier facteur tend vers zéro sans être nécessairement nul.

Le diagnostic précède la technique

Vérifier le domaine, étudier séparément les composants, identifier la forme, puis choisir une transformation. Si la substitution directe est déjà autorisée par la continuité, aucune méthode spéciale n'est nécessaire.

COURS ET MÉTHODES

2. Quotients de polynômes : comparer les degrés

Soient $P(x) = a_n x^n + \dots$ et $Q(x) = b_d x^d + \dots$, avec $a_n \neq 0$ et $b_d \neq 0$. En factorisant les plus hautes puissances,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n}{b_d} x^{n-d} \frac{1 + \text{termes tendant vers } 0}{1 + \text{termes tendant vers } 0}.$$

Ainsi, à $+\infty$ comme à $-\infty$,

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)} \sim \frac{a_n}{b_d} x^{n-d}.$$

Degrés	Conclusion
$n < d$	La limite vaut 0.
$n = d$	La limite vaut a_n/b_d , qui est finie et non nulle.
$n > d$	Le module tend vers l'infini. Le signe se déduit de $(a_n/b_d)x^{n-d}$.

Exemple 1 · Même degré : le rapport des coefficients dominants

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 3x^2 + 7}{2x^4 + x - 5} = \frac{1}{2}.$$

Une justification courte consiste à diviser par x^4 :

$$\frac{1 - 3/x^2 + 7/x^4}{2 + 1/x^3 - 5/x^4} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

Exemple 2 · Un degré supérieur ne donne pas toujours $+\infty$

$$\frac{-3x^5 + 2x}{2x^3 - 7} \sim -\frac{3}{2}x^2.$$

La limite vaut $-\infty$ aux deux extrémités. En revanche, $x^4/(-2x^3) = -x/2$ tend vers $-\infty$ à droite et $+\infty$ à gauche.

Le calcul oral doit rester justifiable

Repérer le degré suffit souvent à prévoir le résultat. Pour rédiger, montrer la division par la puissance dominante ou écrire un équivalent correct. Toujours contrôler les signes des coefficients.

Piège à éviter

Comparer les degrés d'une somme avant d'avoir réduit les termes semblables peut tromper : $x^3 - x^3 + x$ est de degré 1, et non 3.

COURS ET MÉTHODES

3. Des termes dominants sous les racines

Pour une expression non polynomiale, on parle de **terme dominant** ou d'**ordre de croissance**, plutôt que de degré polynomial.

Règle pratique à $+\infty$

Si $F(x) \sim cx^p$ avec $c > 0$ et $F(x) > 0$ pour x assez grand, alors, pour un entier $q \geq 1$,

$$\sqrt[q]{F(x)} \sim c^{1/q} x^{p/q}.$$

Il faut prendre la racine du coefficient *et* diviser la puissance par l'indice de la racine.

Exemple 3 · Additionner les termes du même ordre

Considérons l'exemple explicite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x+2}}{\sqrt{4x+\sqrt{x}} + \sqrt{9x+5}}.$$

En divisant par $\sqrt{x}$ au numérateur et au dénominateur, il vient

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4+2/x}}{\sqrt{4+1/\sqrt{x}} + \sqrt{9+5/x}} = \boxed{\frac{2}{5}}.$$

Le coefficient dominant de $\sqrt{4x+2}$ est 2, et non 4.

Exemple 4 · Racines d'indices différents

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2+1} + \sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[4]{16x^4+1} + \sqrt[5]{x^4+1}}.$$

Les ordres sont x , $x^{2/3}$ au numérateur, puis x , $x^{4/5}$ au dénominateur. Après division par $x > 0$, les termes d'ordre inférieur disparaissent. Les deux termes dominants valent asymptotiquement $2x$, d'où $\boxed{L=1}$.

Deux précautions incontournables

À $-\infty$, $\sqrt{x^2} = |x| = -x$.

Dans une **différence**, les termes dominants peuvent s'annuler. Par exemple $\sqrt{x^2+x} \sim x$ à $+\infty$, mais cela ne permet pas de remplacer $\sqrt{x^2+x} - x$ par zéro. Il faut conjuguer.

Les expressions de cette page sont des exemples entièrement explicités à partir des types de calculs décrits dans la transcription.

COURS ET MÉTHODES

4. Attention au nombre de termes qui augmente

Exemple 5 · Une somme de carrés

Étudions

$$S_n = \frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \cdots + \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2.$$

Pour chaque k fixé, $k^2/n^3 \rightarrow 0$. Pourtant, S_n ne tend pas vers zéro : le nombre de termes augmente avec n .

Regrouper avant de prendre la limite

Utiliser une formule de somme ou un encadrement de la somme entière. Ici,

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

donc

$$S_n = \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow \boxed{\frac{1}{3}}.$$

D'où vient la formule des carrés ?

L'identité $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$, sommée de $k = 1$ à n , donne

$$(n+1)^3 - 1 = 3 \sum_{k=1}^n k^2 + 3 \frac{n(n+1)}{2} + n.$$

En isolant la somme des carrés et en simplifiant, on retrouve la formule précédente.

Le plus petit contre-exemple

$$\underbrace{\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{n \text{ termes}} = 1.$$

Chaque terme tend vers 0, mais la somme vaut toujours 1. On ne peut donc pas échanger automatiquement une limite et une somme dont le nombre de termes varie.

Deux situations à distinguer

Une somme finie de **longueur fixe** permet d'additionner les limites existantes. Une somme de n termes avec $n \rightarrow \infty$ demande une justification spécifique. Il ne s'agit pas d'une fonction définie par morceaux : l'expression est ici une suite de sommes.

Astuce

Pour $\sum_{k=1}^n k^p$, l'ordre de grandeur est généralement n^{p+1} lorsque $p \geq 0$. Ce repérage aide à choisir la bonne normalisation, mais ne remplace pas le calcul de la constante.

COURS ET MÉTHODES

5. Rationaliser en conservant le signe

Le conjugué

Lorsque les deux racines sont définies et leur somme non nulle,

$$\sqrt{U} - \sqrt{V} = \frac{U - V}{\sqrt{U} + \sqrt{V}}.$$

Cette identité transforme une différence de deux grands termes en quotient.

Exemple 6 · Une limite à $-\infty$

$$L = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 4x} - \sqrt{x^2 - 4x}).$$

Pour x suffisamment négatif, les radicandes sont positifs. Posons $t = -x$; alors $t \rightarrow +\infty$ et

$$\sqrt{x^2 + 4x} - \sqrt{x^2 - 4x} = \sqrt{t^2 - 4t} - \sqrt{t^2 + 4t} = \frac{-8t}{\sqrt{t^2 - 4t} + \sqrt{t^2 + 4t}}.$$

Puisque $t > 0$, on peut diviser par t :

$$L = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-8}{\sqrt{1 - 4/t} + \sqrt{1 + 4/t}} = \boxed{-4}.$$

La même méthode sans changement de variable

Directement, le quotient après conjugaison vaut

$$\frac{8x}{|x|(\sqrt{1 + 4/x} + \sqrt{1 - 4/x})}.$$

À $-\infty$, $x/|x| = -1$, ce qui redonne -4 . À $+\infty$, le même calcul donne $+4$.

Une formule générale utile

Pour $a, b \in \mathbb{R}$ fixés,

$$\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx} = \frac{(a - b)x}{\sqrt{x^2 + ax} + \sqrt{x^2 + bx}}.$$

La limite vaut $(a - b)/2$ à $+\infty$, et $-(a - b)/2$ à $-\infty$.

Astuce

Le remplacement $t = -x$ est une aide, pas une obligation. Ce qui est obligatoire, c'est de respecter $\sqrt{x^2} = |x|$ et de conserver le sens d'approche.

COURS ET MÉTHODES

6. Trouver une asymptote avec des paramètres

On cherche souvent des réels a, b tels que $f(x) - (ax + b) \rightarrow 0$. La droite $y = ax + b$ est alors une asymptote oblique si $a \neq 0$.

Exemple 7 · Une décomposition exacte rend le problème immédiat

Déterminer a, b pour que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x + 1} - ax - b \right) = 0.$$

La division polynomiale donne

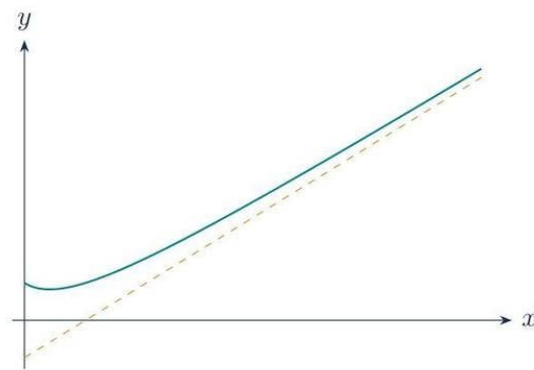
$$x^2 + 1 = (x + 1)(x - 1) + 2, \quad \frac{x^2 + 1}{x + 1} = x - 1 + \frac{2}{x + 1}.$$

Donc l'expression étudiée vaut

$$(1 - a)x - (1 + b) + \frac{2}{x + 1}.$$

Pour qu'elle ait une limite finie, il faut $a = 1$. La limite vaut alors $-1 - b$; elle est nulle si $b = -1$. Ainsi,

$$\boxed{a = 1, \quad b = -1.}$$



$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$$

$$\text{écart : } \frac{2}{x + 1} \rightarrow 0$$

$$y = x - 1$$

Et si la limite demandée est un réel ℓ ?

Le même raisonnement impose $a = 1$, puis $-1 - b = \ell$, donc

$$\boxed{a = 1, \quad b = -1 - \ell.}$$

Pour $\ell = 2$, on trouve $b = -3$. Il ne s'agit alors plus d'une asymptote au sens de l'écart nul : l'écart tend vers 2.

Piège à éviter

Si l'on réunit les fractions, le numérateur devient $(1 - a)x^2 - (a + b)x + 1 - b$. Les signes devant $a + b$ doivent être conservés. La division polynomiale limite ici les risques d'erreur.

COURS ET MÉTHODES

7. Dérivées : utiliser exactement les hypothèses

Règle de l'Hôpital : conditions pratiques

Sur un intervalle d'approche, f et g doivent être dérivables, avec $g \neq 0$ et $g' \neq 0$. Si f/g est de forme $0/0$ ou ∞/∞ , et si f'/g' possède une limite finie ou infinie, alors f/g possède la même limite.

On dérive le numérateur et le dénominateur **séparément**. On n'applique pas la formule de dérivation d'un quotient. Avant une nouvelle dérivation, les conditions doivent être vérifiées à nouveau.

La forme $0/0$ n'est pas à elle seule une autorisation

Le théorème comporte aussi des hypothèses de dérivabilité et de comportement de f'/g' . Connaître seulement $f'(a)$ ne signifie pas que $f'(x) \rightarrow f'(a)$ lorsque $x \rightarrow a$.

Exemple 8 · Une racine d'une fonction inconnue

Supposons f dérivable en 9, avec $f(9) = 9$ et $f'(9) = 4$. Calculons

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{f(x)} - 3}{\sqrt{x} - 3}.$$

La dérivabilité implique la continuité en 9, donc $f(x) > 0$ près de 9. Pour $x \neq 9$ assez proche de 9, les conjugaisons donnent l'égalité

$$\frac{\sqrt{f(x)} - 3}{\sqrt{x} - 3} = \frac{f(x) - f(9)}{x - 9} \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{f(x)} + 3}.$$

Le premier facteur tend vers $f'(9) = 4$ par définition de la dérivée ; le second tend vers 1. Ainsi $\boxed{L = 4}$, sans supposer f' continue.

Pourquoi une application directe peut être trop rapide

L'Hôpital conduirait au quotient $f'(x)\sqrt{x}/\sqrt{f(x)}$. Substituer aussitôt $x = 9$ dans $f'(x)$ réclame une justification non fournie par les seules données. La factorisation en taux d'accroissement évite cette difficulté.

Reconnaître un nombre dérivé

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a).$$

Cette formule est souvent plus directe et exige moins d'hypothèses que l'Hôpital.

COURS ET MÉTHODES

8. Trigonométrie : surveiller l'argument et l'unité

Les limites de base en radians

Lorsque $u \rightarrow 0$,

$$\frac{\sin u}{u} \rightarrow 1, \quad \frac{\tan u}{u} \rightarrow 1, \quad \frac{\arcsin u}{u} \rightarrow 1, \quad \frac{\arctan u}{u} \rightarrow 1,$$

$$\frac{1 - \cos u}{u^2} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

C'est l'argument qui doit tendre vers zéro

Si $u(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow a$, alors $\sin(u(x))/u(x) \rightarrow 1$ sur le domaine où le quotient est défini. Il n'est pas nécessaire que $a = 0$.

Exemple 9 · Un point d'approche différent de zéro

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x-3)}{x-3} = 1.$$

Ici $u = x - 3 \rightarrow 0$. De même, à $+\infty$, $u = 1/x \rightarrow 0$, donc $\sin(1/x)/(1/x) \rightarrow 1$.

Exemple 10 · Un angle mesuré en degrés

L'écriture $\sin(x^\circ)$ signifie $\sin(\pi x/180)$ en radians. Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^\circ)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi x/180)}{\pi x/180} \frac{\pi}{180} = \boxed{\frac{\pi}{180}}.$$

Le résultat est un nombre réel ; on n'ajoute pas le symbole « degré » à $\pi/180$ dans cette égalité numérique.

Une justification sans cercle logique

Pour $0 < u < \pi/2$, l'encadrement géométrique $\sin u < u < \tan u$ donne $\cos u < \sin u/u < 1$. D'où la première limite. Les quotients étant pairs, on obtient aussi la limite à gauche.

Puis $\tan u/u = (\sin u/u)/\cos u \rightarrow 1$ et

$$\frac{1 - \cos u}{u^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(u/2)}{u/2} \right)^2 \rightarrow \frac{1}{2}.$$

Piège à éviter

Retrouver ces résultats avec l'Hôpital est possible si les dérivées trigonométriques sont déjà établies indépendamment. On ne les utilise pas comme preuve fondatrice si ces dérivées reposent elles-mêmes sur $\sin u/u \rightarrow 1$.

COURS ET MÉTHODES

9. Partie entière : de quel côté arrive-t-on ?

La fonction partie entière est continue en tout réel non entier et discontinue en chaque entier. Si $g(x) \rightarrow \ell \notin \mathbb{Z}$, alors $\lfloor g(x) \rfloor = \lfloor \ell \rfloor$ près du point. Si $\ell \in \mathbb{Z}$, il faut étudier de quel côté $g(x)$ arrive.

Près d'un entier m

Si $m - 1 < g(x) < m$, alors $\lfloor g(x) \rfloor = m - 1$.

Si $m \leq g(x) < m + 1$, alors $\lfloor g(x) \rfloor = m$.

Connaître seulement $g(x) \rightarrow m$ ne permet pas de choisir entre ces cas.

Exemple 11 · Quatre limites classiques

Pour $0 < |x| < \pi/2$, on a $0 < \sin x/x < 1$ et $\tan x/x > 1$. Ces quotients sont **pairs** : le comportement à gauche est donc identique à celui à droite.

Comme les quatre quotients ci-dessous tendent vers 1, on obtient, pour $x \neq 0$ assez petit :

Expression intérieure	Position près de 0	Limite de la partie entière
$\sin x/x$	$0 < \sin x/x < 1$	0
$x/\sin x$	$1 < x/\sin x < 2$	1
$\tan x/x$	$1 < \tan x/x < 2$	1
$x/\tan x$	$0 < x/\tan x < 1$	0

Les bornes supérieures 2 proviennent de la convergence vers 1 ; elles ne sont pas affirmées sur tout l'intervalle $]0, \pi/2[$.

Exemple 12 · Quand gauche et droite diffèrent

Pour $g(x) = 1 + \sin x$, on a, près de 0, $g(x) < 1$ à gauche et $g(x) > 1$ à droite. Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \lfloor 1 + \sin x \rfloor = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \lfloor 1 + \sin x \rfloor = 1.$$

La limite bilatérale n'existe pas.

Piège à éviter

On ne fait pas passer une limite à travers la partie entière sans vérifier la continuité ou le comportement local. Étudier seulement le côté droit n'est pas une règle générale ; dans les quatre exemples du tableau, la parité justifie le passage aux deux côtés.

COURS ET MÉTHODES

10. Encadrer les oscillations

Théorème des gendarmes

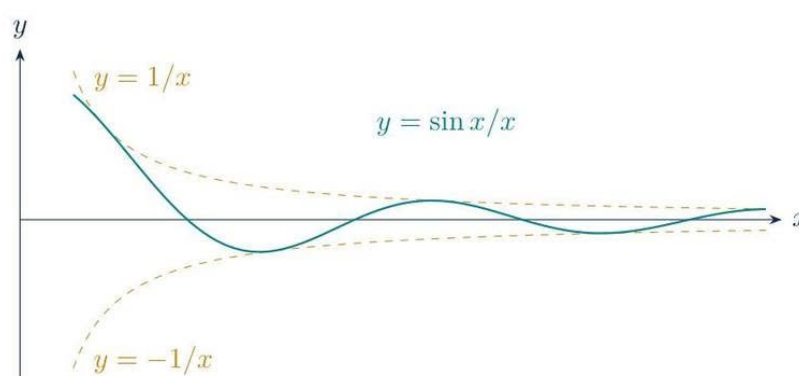
Si $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ au voisinage considéré et si $u(x) \rightarrow L$ et $v(x) \rightarrow L$, alors $f(x) \rightarrow L$.

Exemple 13 · Le sinus à l'infini reste borné

Pour $x > 0$, $-1 \leq \sin x \leq 1$ entraîne

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}.$$

Les deux bornes tendent vers 0 lorsque $x \rightarrow +\infty$; ainsi $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x/x = 0$. Le même raisonnement vaut pour $\cos x/x$.



Une règle plus générale

Si $B(x)$ est bornée au voisinage étudié et si $a(x) \rightarrow 0$, alors $a(x)B(x) \rightarrow 0$. En effet, $|a(x)B(x)| \leq M|a(x)|$ pour une constante M .

Exemple 14 · La même expression peut changer de limite

Expression	Approche	Justification et résultat
$\sin x/x$	$x \rightarrow 0$	Limite usuelle : 1
$\sin x/x$	$x \rightarrow +\infty$	Encadrement : 0
$x \sin(1/x)$	$x \rightarrow +\infty$	$\sin(1/x)/(1/x) \rightarrow 1$
$x \sin(1/x)$	$x \rightarrow 0$	$ x \sin(1/x) \leq x \rightarrow 0$

Piège à éviter

L'expression « $\sin \infty$ » n'est pas une valeur. On dit que $\sin x$ oscille lorsque $x \rightarrow +\infty$ et on utilise ses bornes. Une fonction bornée n'a pas nécessairement une limite.

COURS ET MÉTHODES

11. Simplifier avant de dériver

La transcription évoque le quotient $\tan x - \sin x$ avec, selon les passages, x^3 ou $\sin^3 x$ au dénominateur. Les deux limites valent $1/2$, mais les expressions ne sont pas égales. Voici les deux calculs.

Exemple 15 · Avec un dénominateur $\sin^3 x$

Pour $x \neq 0$ suffisamment proche de 0,

$$\frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} = \frac{\sin x(1 - \cos x)}{\cos x \sin^3 x} = \frac{1 - \cos x}{\cos x \sin^2 x}.$$

Grâce à $\sin^2 x = (1 - \cos x)(1 + \cos x)$, on obtient l'égalité

$$\frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} = \frac{1}{\cos x(1 + \cos x)} \rightarrow \boxed{\frac{1}{2}}.$$

Une identité trigonométrique a suffi ; aucune dérivation n'était nécessaire.

Exemple 16 · Avec un dénominateur x^3

En utilisant le calcul précédent,

$$\frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^3 \rightarrow \frac{1}{2} \times 1 = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

Une autre rédaction consiste à écrire

$$\frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \frac{\sin x}{x} \frac{1 - \cos x}{x^2} \frac{1}{\cos x}.$$

Les trois facteurs tendent respectivement vers 1, $1/2$ et 1.

Trois identités à essayer

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \sin^2 x = (1 - \cos x)(1 + \cos x), \quad 1 - \cos x = 2 \sin^2(x/2).$$

Elles transforment souvent une différence compliquée en produit de limites usuelles.

Piège à éviter

On peut utiliser $\cos x \rightarrow 1$ dans un produit ou quotient dont les autres limites sont justifiées. On ne « supprime » pas arbitrairement un facteur à l'intérieur d'une égalité exacte.

COURS ET MÉTHODES

12. Exponentielles, logarithmes et compositions

Formules de base lorsque $u \rightarrow 0$

$$\frac{a^u - 1}{u} \rightarrow \ln a \quad (a > 0), \quad \frac{e^u - 1}{u} \rightarrow 1,$$

$$\frac{\ln(1+u)}{u} \rightarrow 1, \quad \frac{\ln(1-u)}{u} \rightarrow -1.$$

Les arguments des logarithmes doivent être positifs. Si l'on utilise un logarithme de base $b \neq 1$, il faut diviser les résultats par $\ln b$.

Exemple 17 · Deux exponentielles dont les exposants se rapprochent

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}.$$

On factorise par $e^{\sin x}$ et on pose $u = x - \sin x \rightarrow 0$:

$$\frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x} = e^{\sin x} \frac{e^{x - \sin x} - 1}{x - \sin x} \rightarrow 1 \times 1 = \boxed{1}.$$

Le dénominateur est non nul pour $x \neq 0$ assez petit. Factoriser permet d'éviter plusieurs dérivations successives.

Exemple 18 · Une composition en trois étages

Étudions l'expression explicitée

$$L = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(e^{x-3} - 1)}{\ln(x-2)}.$$

Près de 3, $x - 2 > 0$. Posons $h = x - 3$, donc $h \rightarrow 0$ et $x - 2 = 1 + h$. Pour $h \neq 0$,

$$\frac{\sin(e^h - 1)}{\ln(1+h)} = \frac{\sin(e^h - 1)}{e^h - 1} \frac{e^h - 1}{h} \frac{h}{\ln(1+h)}.$$

Chaque facteur tend vers 1, donc $\boxed{L = 1}$.

Insérer le bon intermédiaire

Pour $\sin(U)$, chercher un facteur $\sin(U)/U$.

Pour $e^V - 1$, chercher $(e^V - 1)/V$.

Pour $\ln(1+W)$, chercher $\ln(1+W)/W$.

Vérifier à chaque étape que U , V ou W tend bien vers zéro.

Piège à éviter

$\ln(1-x)/x \rightarrow -1$: le signe négatif vient de l'argument $-x$. Le remplacer par $+1$ revient à oublier la composition.

COURS ET MÉTHODES

13. Puissances : calculer le logarithme d'abord

La méthode générale

Pour une base $u(x) > 0$, on écrit exactement

$$u(x)^{v(x)} = \exp(v(x) \ln u(x)).$$

On étudie $H(x) = v(x) \ln u(x)$, puis on revient à l'exponentielle. Si $H \rightarrow \ell$, alors l'expression tend vers e^ℓ ; si $H \rightarrow -\infty$, elle tend vers 0.

Le raccourci de la forme 1^∞

Si $u(x) = 1 + w(x)$ avec $w(x) \rightarrow 0$, alors $\ln(1 + w) \sim w$. Par conséquent, si $v(x)w(x) \rightarrow \ell$, on obtient

$$(1 + w(x))^{v(x)} \rightarrow e^\ell.$$

Les cas où $w = 0$ se traitent par le prolongement continu de $\ln(1 + w)/w$ en 0, dont la valeur est 1.

Exemple 19 · Une base rationnelle

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + 3x^2}{1 + 5x^2} \right)^{1/x^2}.$$

La base est positive et vaut $1 + w(x)$ avec $w(x) = -2x^2/(1 + 5x^2)$. Comme $w(x)/x^2 \rightarrow -2$, on obtient

$$L = e^{-2}.$$

Exemple 20 · Une exponentielle qui tend vers zéro

Pour $0 < x < 1$, considérons

$$Y(x) = \exp\left(\frac{1}{x \ln x}\right).$$

Posons $t = 1/x \rightarrow +\infty$. Alors $x \ln x = -(\ln t)/t \rightarrow 0^-$, car $\ln t/t \rightarrow 0$ par la règle de l'Hôpital. Ainsi $1/(x \ln x) \rightarrow -\infty$, d'où $Y(x) \rightarrow 0$.

On peut aussi appliquer l'Hôpital à $(1/x)/\ln x$ sur $]0, 1[$: le quotient des dérivées est $-1/x \rightarrow -\infty$. Les signes et le côté 0^+ sont essentiels.

Deux erreurs à éviter

$(1 + w)^v$ n'est pas exactement égal à e^{vw} : le raccourci concerne une *limite*.

Si la limite finale vaut 0, ne pas écrire « $\ln L = -\infty$ » comme une égalité réelle. On calcule la limite de $\ln Y(x)$, puis celle de $Y(x)$.

COURS ET MÉTHODES

14. Une puissance révèle une moyenne géométrique

Résultat général

Pour un entier $n \geq 1$ fixé et des réels $a_1, \dots, a_n > 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a_1^x + \dots + a_n^x}{n} \right)^{1/x} = (a_1 \cdots a_n)^{1/n}.$$

La moyenne des puissances, élevée à $1/x$, tend vers la moyenne géométrique.

Démonstration en trois étapes

1. **Étudier l'écart de la base à 1.** Posons $A(x) = (a_1^x + \dots + a_n^x)/n$. Alors $A(x) > 0$, $A(x) \rightarrow 1$ et

$$\frac{A(x) - 1}{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{a_k^x - 1}{x} \rightarrow \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln a_k.$$

La somme est de longueur fixe, donc on peut additionner les limites.

2. **Passer au logarithme.** Puisque $\ln(1+w)/w \rightarrow 1$ lorsque $w \rightarrow 0$, avec prolongement en $w = 0$,

$$\frac{\ln A(x)}{x} \rightarrow \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln a_k = \ln((a_1 \cdots a_n)^{1/n}).$$

3. **Revenir à l'exponentielle.** On retrouve le résultat annoncé, y compris si tous les a_k valent 1.

Exemple 21 · L'apparition de la factorielle

En choisissant $a_k = k$, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1^x + 2^x + \dots + n^x}{n} \right)^{1/x} = (n!)^{1/n}.$$

Par exemple, pour $n = 3$, la limite vaut $\sqrt[3]{6}$.

Complément : des poids différents

Si $p_k \geq 0$ et $\sum_{k=1}^n p_k = 1$, le même raisonnement donne

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\sum_{k=1}^n p_k a_k^x \right)^{1/x} = \prod_{k=1}^n a_k^{p_k}.$$

Piège à éviter

Le paramètre n est fixé pendant que $x \rightarrow 0$. Si n dépend aussi de x et devient infini, une nouvelle étude est nécessaire ; le raisonnement par somme finie ne s'applique plus automatiquement.

COURS ET MÉTHODES

15. Le théorème des gendarmes et la partie entière

Un encadrement valable pour tout réel t

$$t - 1 < \lfloor t \rfloor \leq t.$$

De façon équivalente, $\lfloor t \rfloor = t - r(t)$ avec $0 \leq r(t) < 1$. La partie entière diffère donc de son argument d'une erreur bornée.

Exemple 22 · Un facteur petit devant une partie entière grande

Pour $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ fixés, calculons

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{b} \lfloor \frac{a}{x} \rfloor.$$

Pour $x \neq 0$,

$$\frac{x}{b} \lfloor \frac{a}{x} \rfloor = \frac{a}{b} - \frac{x}{b} \left\{ \frac{a}{x} \right\}.$$

On en déduit l'estimation

$$\left| \frac{x}{b} \lfloor \frac{a}{x} \rfloor - \frac{a}{b} \right| \leq \frac{|x|}{|b|} \rightarrow 0.$$

Ainsi $L = a/b$. La limite est bilatérale et le résultat reste valable pour $a < 0$ ou $b < 0$.

Pourquoi la valeur absolue est-elle pratique ?

Multiplier $a/x - 1 < \lfloor a/x \rfloor \leq a/x$ par x/b oblige à inverser les inégalités si $x/b < 0$. La majoration de l'erreur en valeur absolue traite tous les signes à la fois.

Exemple 23 · Une combinaison de plusieurs parties entières

Soient des constantes c_k, a_k et un entier m fixé. Alors

$$x \sum_{k=1}^m c_k \lfloor \frac{a_k}{x} \rfloor = \sum_{k=1}^m c_k a_k - x \sum_{k=1}^m c_k \left\{ \frac{a_k}{x} \right\}.$$

L'erreur a un module inférieur ou égal à $|x| \sum_{k=1}^m |c_k|$. Par conséquent,

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sum_{k=1}^m c_k \lfloor \frac{a_k}{x} \rfloor = \sum_{k=1}^m c_k a_k.$$

Astuce

Une expression très discontinue peut avoir une limite simple après multiplication par un facteur qui tend vers zéro. Chercher une borne uniforme sur l'erreur permet d'éviter le découpage en une infinité d'intervalles.

COURS ET MÉTHODES

16. Choisir une méthode et éviter les faux raccourcis

La bonne première question

Situation	Méthode prioritaire
Quotient polynomial à l'infini	Degrés, coefficients dominants, signe.
Somme ou quotient de racines à l'infini	Factoriser la puissance dominante.
Différence de racines	Multiplier par le conjugué.
Paramètres a, b devant $ax + b$	Division polynomiale ou séparation de la pente et de la constante.
Somme de n termes, $n \rightarrow \infty$	Calcul global de la somme ou encadrement.
Partie entière d'une quantité proche d'un entier	Déterminer le côté d'approche de la quantité intérieure.
Produit avec une oscillation bornée	Majorer la valeur absolue.
Différence d'exponentielles	Factoriser par une exponentielle.
Puissance indéterminée	Étudier le logarithme de l'expression.

Cinq affirmations à remplacer par une règle correcte

1. « **Degré supérieur : toujours $+\infty$.** »
Le module diverge ; le signe dépend des coefficients et du sens d'approche.
2. « **Chaque terme tend vers 0, donc leur somme aussi.** »
Seulement pour une somme de longueur fixe ; sinon, justifier l'échange.
3. « **$\sin x < x < \tan x$ pour tout $x > 0$.** »
L'encadrement utilisé ici est valable pour $0 < x < \pi/2$.
4. « **Le côté droit suffit pour une partie entière.** »
Il faut les deux côtés, sauf justification spécifique comme la parité.
5. « **La forme $0/0$ suffit pour appliquer l'Hôpital.** »
Il faut aussi les hypothèses sur les dérivées et leur quotient.

Rédiger sans allonger inutilement

Écrire le domaine local, annoncer la transformation, montrer le calcul décisif et conclure avec la bonne notation de limite. Une solution courte peut être rigoureuse si chaque étape est justifiée.

EXERCICES · NIVEAUX 1 ET 2

Croissances, sommes et paramètres

Consigne

Justifier chaque réponse et préciser les signes à l'infini. Les solutions commencent page 58.

1. Le signe compte

Termes dominants

Calculer, à $+\infty$ puis à $-\infty$, la limite de

$$\frac{-3x^5 + 2x}{2x^3 - 7}.$$

2. Degrés égaux

Quotient polynomial

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4 - 3x + 1}{5x^4 + x^2 + 2}.$

3. Trois racines et une petite puissance

Croissance

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{9x+1} + x^{1/4}}{\sqrt{4x+3} + \sqrt{x+7}}.$

4. Les termes dominants se soustraient

Conjugué

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x).$

5. Les carrés des entiers impairs

Somme variable

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n (2k-1)^2.$

6. Les cubes

Somme variable

En utilisant $\sum_{k=1}^n k^3 = [n(n+1)/2]^2$, calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^n k^3.$$

7. Deux racines à $-\infty$

Signe et conjugaison

Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 6x} - \sqrt{x^2 - 2x}).$

8. Une limite prescrite

Paramètres

Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ pour que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 + 3}{x + 2} - ax - b \right) = 3.$$

EXERCICES · NIVEAUX 2 ET 3

Compositions et partie entière

9. Une fonction connue par sa dérivée

Taux d'accroissement

Une fonction f est dérivable en 4, avec $f(4) = 4$ et $f'(4) = -3$. Calculer, sans supposer f' continue,

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{f(x)} - 2}{\sqrt{x} - 2}.$$

10. Un coefficient dans le logarithme

Limite usuelle

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 4x)}{x}$.

11. Trois fois un angle en degrés

Conversion

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin((3x)^\circ)}{x}$.

12. Une composition

Limites usuelles

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(e^x - 1)}{\ln(1 + 2x)}$.

13. Approcher 1 par en dessous ou par au-dessus

Partie entière

Calculer les quatre limites en 0 :

$$\left\lfloor \frac{\sin x}{x} \right\rfloor, \quad \left\lfloor \frac{x}{\sin x} \right\rfloor, \quad \left\lfloor \frac{\tan x}{x} \right\rfloor, \quad \left\lfloor \frac{x}{\tan x} \right\rfloor.$$

14. Un saut à l'origine

Limites latérales

Étudier $\lim_{x \rightarrow 0} \lfloor 1 + \sin x \rfloor$ en calculant d'abord les limites à gauche et à droite.

15. Un autre quotient qui tend vers 1

Défi

Étudier les limites latérales de $\left\lfloor \frac{\ln(1+x)}{x} \right\rfloor$ lorsque $x \rightarrow 0$, puis conclure.

16. Une oscillation contrôlée

Encadrement

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x + 2 \cos(3x)}{\sqrt{x}}$.

EXERCICES · NIVEAUX 3 ET 4

Puissances et synthèse

17. Un argument qui devient petit

Changement d'échelle

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \tan(3/x)$.

18. Une différence trigonométrique

Simplification

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$ sans appliquer plusieurs fois l'Hôpital.

19. Deux exponentielles

Factorisation

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{\sin x}}{2x - \sin x}$.

20. Une puissance de grand exposant

Logarithme

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + 2x^2}{1 + 7x^2} \right)^{3/x^2}$.

21. Moyennes géométriques

Deux variantes

Calculer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2^x + 8^x}{2} \right)^{1/x} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2^x + 3 \cdot 8^x}{4} \right)^{1/x}.$$

22. Deux exposants très différents

Signe et logarithme

Calculer, lorsque $x \rightarrow 0^+$,

$$\exp\left(\frac{1}{x \ln x}\right) \quad \text{et} \quad \exp(x \ln x).$$

23. Une combinaison de parties entières

Erreur bornée

Calculer la limite bilatérale

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \left(\left\lfloor \frac{2}{x} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{5}{x} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{3}{x} \right\rfloor \right).$$

24. Le piège de la somme terme à terme

Synthèse

On pose $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n} \right)$. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$. Expliquer pourquoi la limite n'est pas nulle, alors que, pour chaque k fixé, $\frac{1}{n}(1 + k/n) \rightarrow 0$.

CORRIGÉS DÉTAILLÉS · 1 À 4

Identifier la croissance dominante

1. Une divergence négative aux deux extrémités

On factorise x^5 au numérateur et x^3 au dénominateur :

$$\frac{-3x^5 + 2x}{2x^3 - 7} = x^2 \frac{-3 + 2/x^4}{2 - 7/x^3} \sim -\frac{3}{2}x^2.$$

À $+\infty$ et à $-\infty$, $x^2 \rightarrow +\infty$. Le coefficient étant négatif, on obtient dans les deux cas $-\infty$.

2. Même degré, mêmes puissances à extraire

Pour $x \neq 0$,

$$\frac{2x^4 - 3x + 1}{5x^4 + x^2 + 2} = \frac{2 - 3/x^3 + 1/x^4}{5 + 1/x^2 + 2/x^4}.$$

Tous les termes contenant une puissance négative de x tendent vers zéro. Le dénominateur tend vers 5 $\neq 0$, donc $L = 2/5$.

3. La puissance $x^{1/4}$ est plus petite que $\sqrt{x}$

Pour $x > 0$, divisons par $\sqrt{x}$:

$$\frac{\sqrt{9x+1} + x^{1/4}}{\sqrt{4x+3} + \sqrt{x+7}} = \frac{\sqrt{9+1/x} + x^{-1/4}}{\sqrt{4+3/x} + \sqrt{1+7/x}}.$$

Le numérateur tend vers $3 + 0$, et le dénominateur vers $2 + 1$. Ainsi $L = 1$. Le coefficient 9 sous la racine donne 3 après extraction.

4. Ne pas soustraire deux équivalents sans contrôle

La forme initiale est $\infty - \infty$. Pour $x > 0$,

$$\sqrt{x^2 + x} - x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \frac{1}{\sqrt{1 + 1/x} + 1} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

Même si les deux termes sont équivalents à x , leur différence tend vers $1/2$. Un équivalent multiplicatif ne donne pas automatiquement l'erreur additive.

Contrôle rapide

Le résultat doit être positif, car $x^2 + x > x^2$ pour $x > 0$, donc $\sqrt{x^2 + x} > x$. Ce contrôle ne donne pas la valeur, mais il permet d'écarter une réponse négative.

CORRIGÉS DÉTAILLÉS · 5 À 8

Calculer globalement et garder les signes

5. Développer l'entier impair avant de sommer

Comme $(2k - 1)^2 = 4k^2 - 4k + 1$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n (2k - 1)^2 &= 4 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4 \frac{n(n+1)}{2} + n \\ &= \frac{n(4n^2 - 1)}{3}.\end{aligned}$$

En divisant par n^3 , on obtient $4/3 - 1/(3n^2)$, d'où $\boxed{L = 4/3}$.

6. Une normalisation d'ordre quatre

La formule fournie donne

$$\frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4n^4} = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \rightarrow \boxed{\frac{1}{4}}.$$

On calcule la somme entière avant de passer à la limite ; le nombre de termes varie avec n .

7. Le signe de $x/|x|$ à gauche

Les radicandes sont positifs pour x assez négatif. Le conjugué conduit à

$$\sqrt{x^2 + 6x} - \sqrt{x^2 - 2x} = \frac{8x}{\sqrt{x^2 + 6x} + \sqrt{x^2 - 2x}} = \frac{8x/|x|}{\sqrt{1 + 6/x} + \sqrt{1 - 2/x}}.$$

À $-\infty$, $x/|x| = -1$ et le dénominateur tend vers 2. Donc $\boxed{L = -4}$.

8. Une limite égale à 3, et non à zéro

La division donne

$$\frac{2x^2 + 3}{x + 2} = 2x - 4 + \frac{11}{x + 2}.$$

Après soustraction de $ax + b$, il reste

$$(2 - a)x - (4 + b) + \frac{11}{x + 2}.$$

Une limite finie impose $a = 2$. On veut ensuite $-4 - b = 3$, d'où $b = -7$. La substitution de ces valeurs laisse $3 + 11/(x + 2) \rightarrow 3$:

$$\boxed{a = 2, \quad b = -7.}$$

CORRIGÉS DÉTAILLÉS · 9 À 12

Composer sans perdre les coefficients

9. La dérivabilité au point suffit

Puisque f est dérivable en 4, elle y est continue. Avec $f(4) = 4 > 0$, les racines sont donc définies au voisinage de 4. Pour $x \neq 4$ proche de 4,

$$\frac{\sqrt{f(x)} - 2}{\sqrt{x} - 2} = \frac{f(x) - 4}{x - 4} \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{f(x)} + 2}.$$

Le premier facteur tend vers $f'(4) = -3$, et le second vers $(2+2)/(2+2) = 1$. Ainsi $\boxed{L = -3}$.

On n'a pas remplacé $f'(x)$ par $f'(4)$: on a utilisé directement le taux d'accroissement, exactement adapté aux hypothèses.

10. Faire apparaître $4x$ au dénominateur

Pour $x > -1/4$ et $x \neq 0$,

$$\frac{\ln(1+4x)}{x} = 4 \frac{\ln(1+4x)}{4x} \longrightarrow 4 \times 1 = \boxed{4}.$$

L'argument $4x$ tend vers zéro. Le facteur 4 doit être conservé.

11. Passer des degrés aux radians

L'angle $(3x)^\circ$ correspond à $\pi(3x)/180 = \pi x/60$ radians. Donc

$$\frac{\sin((3x)^\circ)}{x} = \frac{\sin(\pi x/60)}{\pi x/60} \frac{\pi}{60} \longrightarrow \boxed{\frac{\pi}{60}}.$$

La limite usuelle s'applique au quotient dont le numérateur et le dénominateur contiennent le même argument en radians.

12. Décomposer en trois limites usuelles

Pour $x \neq 0$ assez proche de 0, avec $1+2x > 0$,

$$\frac{\sin(e^x - 1)}{\ln(1+2x)} = \frac{\sin(e^x - 1)}{e^x - 1} \frac{e^x - 1}{x} \frac{x}{\ln(1+2x)}.$$

Les deux premiers facteurs tendent vers 1. Le dernier vaut

$$\frac{1}{2} \frac{2x}{\ln(1+2x)} \longrightarrow \frac{1}{2}.$$

Par conséquent $\boxed{L = 1/2}$. La différence de coefficient entre x et $2x$ explique que le résultat ne soit pas 1.

CORRIGÉS DÉTAILLÉS · 13 À 16

Justifier les limites latérales

13. Quatre quotients pairs

Pour $0 < x < \pi/2$, $0 < \sin x < x < \tan x$. Les quotients considérés étant pairs, leurs inégalités se prolongent à $x < 0$ par remplacement de x par $|x|$.

Comme ils tendent tous vers 1, pour $0 < |x|$ assez petit on a

$$0 < \frac{\sin x}{x} < 1, \quad 1 < \frac{x}{\sin x} < 2, \quad 1 < \frac{\tan x}{x} < 2, \quad 0 < \frac{x}{\tan x} < 1.$$

Les parties entières sont donc respectivement $\boxed{0, 1, 1, 0}$ au voisinage privé de zéro, et leurs limites ont ces mêmes valeurs.

14. Un passage de part et d'autre de l'entier 1

Si $x < 0$ est assez proche de 0, alors $-1 < \sin x < 0$, donc $0 < 1 + \sin x < 1$ et la partie entière vaut 0.

Si $x > 0$ est assez proche de 0, alors $0 < \sin x < 1$, donc $1 < 1 + \sin x < 2$ et la partie entière vaut 1. Ainsi

$$\boxed{L_- = 0, \quad L_+ = 1.}$$

La limite bilatérale n'existe pas.

15. Un quotient non pair : la gauche change la réponse

Pour $x > -1$, $x \neq 0$, on a $\ln(1+x) < x$. Pour le vérifier, étudier $r(x) = x - \ln(1+x)$: $r(0) = 0$ et $r'(x) = x/(1+x)$, négative à gauche de 0 et positive à droite. Ainsi $r(x) > 0$ pour $x \neq 0$.

Pour $x > 0$, la division conserve le sens : $0 < \ln(1+x)/x < 1$, donc la partie entière vaut 0.

Pour $x < 0$, la division inverse le sens : $\ln(1+x)/x > 1$. Puisque ce quotient tend vers 1, il est aussi inférieur à 2 près de 0 ; sa partie entière vaut 1.

$$\boxed{L_- = 1, \quad L_+ = 0 : \text{pas de limite bilatérale.}}$$

16. Une borne suffit pour toute la somme

Par l'inégalité triangulaire, $|\sin x + 2 \cos(3x)| \leq 1 + 2 = 3$. Pour $x > 0$,

$$\left| \frac{\sin x + 2 \cos(3x)}{\sqrt{x}} \right| \leq \frac{3}{\sqrt{x}} \rightarrow 0.$$

Le théorème des gendarmes donne $\boxed{L = 0}$.

CORRIGÉS DÉTAILLÉS · 17 À 20

Transformer l'expression au bon endroit

17. Une tangente dont l'argument tend vers zéro

Lorsque $x \rightarrow +\infty$, $u = 3/x \rightarrow 0^+$. On écrit

$$x \tan(3/x) = 3 \frac{\tan(3/x)}{3/x} \longrightarrow 3 \times 1 = \boxed{3}.$$

La fonction $\tan x$ n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$; ici, c'est la petitesse de l'argument $3/x$ qui permet d'utiliser une limite usuelle.

18. Un produit de trois quotients simples

Avec $\tan x = \sin x / \cos x$, on obtient

$$\frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \frac{\sin x(1 - \cos x)}{x^3 \cos x} = \frac{\sin x}{x} \frac{1 - \cos x}{x^2} \frac{1}{\cos x}.$$

Les facteurs tendent respectivement vers 1, $1/2$ et 1, donc $\boxed{L = 1/2}$.

19. Factoriser par $e^{\sin x}$

Posons $u(x) = 2x - \sin x$. Alors $u \rightarrow 0$, et $u(x)/x = 2 - \sin x/x \rightarrow 1$; par conséquent $u(x) \neq 0$ pour $x \neq 0$ suffisamment petit.

$$\frac{e^{2x} - e^{\sin x}}{2x - \sin x} = e^{\sin x} \frac{e^{2x - \sin x} - 1}{2x - \sin x} \longrightarrow 1 \times 1 = \boxed{1}.$$

Le numérateur comporte deux exponentielles, mais la factorisation ramène tout à une seule limite usuelle.

20. Conserver le coefficient de l'exposant

La base est positive. Écrivons

$$\frac{1 + 2x^2}{1 + 7x^2} = 1 + w(x), \quad w(x) = \frac{-5x^2}{1 + 7x^2}.$$

Alors $w \rightarrow 0$ et

$$\frac{3}{x^2} w(x) = \frac{-15}{1 + 7x^2} \longrightarrow -15.$$

Comme $\ln(1 + w)/w \rightarrow 1$, le logarithme de l'expression tend vers -15 . Après passage à l'exponentielle,

$$\boxed{L = e^{-15}}.$$

Oublier le facteur 3 dans l'exposant conduirait au résultat erroné e^{-5} .

CORRIGÉS DÉTAILLÉS · 21 À 24

Relier les méthodes

21. Une moyenne simple, puis une moyenne pondérée

Dans le premier cas, les poids sont $1/2$ et $1/2$. La formule du cours donne

$$L_1 = 2^{1/2} 8^{1/2} = \sqrt{16} = 4.$$

Dans le second cas, la base vaut $(1/4)2^x + (3/4)8^x$, donc les poids sont $1/4$ et $3/4$:

$$L_2 = 2^{1/4} 8^{3/4} = 2^{1/4+9/4} = 2^{5/2} = 4\sqrt{2}.$$

Pour retrouver ce résultat sans mémoriser la formule, calculer la limite de $\ln A(x)/x$: elle vaut la moyenne pondérée de $\ln 2$ et $\ln 8$.

22. Un exposant tend vers $-\infty$, l'autre vers 0

Lorsque $x \rightarrow 0^+$, $x \ln x \rightarrow 0^-$: en posant $t = 1/x$, on obtient $x \ln x = -\ln t/t$. À $+\infty$, l'Hôpital donne $\ln t/t \rightarrow 0$, car le quotient des dérivées est $1/t \rightarrow 0$.

Ainsi $1/(x \ln x) \rightarrow -\infty$, tandis que $x \ln x \rightarrow 0$. Par les propriétés de l'exponentielle,

$$\exp\left(\frac{1}{x \ln x}\right) \rightarrow 0, \quad \exp(x \ln x) \rightarrow 1.$$

Le sens 0^+ est imposé par le domaine du logarithme réel.

23. Une erreur de module au plus $3|x|$

Pour $x \neq 0$, posons $r_j(x) = \{j/x\} \in [0, 1[$. Alors

$$x \left(\left\lfloor \frac{2}{x} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{5}{x} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{3}{x} \right\rfloor \right) = 2 + 5 - 3 - x(r_2 + r_5 - r_3).$$

Comme $|x(r_2 + r_5 - r_3)| \leq 3|x| \rightarrow 0$, la limite bilatérale vaut $\boxed{4}$.

24. Le nombre de petites contributions augmente

On calcule la somme exacte :

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 1 + \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k = 1 + \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2n}.$$

Donc $\boxed{S_n \rightarrow 3/2}$. La convergence de chaque terme fixé vers zéro ne permet pas d'échanger limite et somme : le nombre de termes est n , et non une constante indépendante de n .

FICHE DE RÉVISION

Les résultats et les réflexes essentiels

Limites usuelles · $u \rightarrow 0$ · angles en radians

$$\frac{\sin u}{u} \rightarrow 1, \quad \frac{\tan u}{u} \rightarrow 1, \quad \frac{1 - \cos u}{u^2} \rightarrow \frac{1}{2},$$

$$\frac{e^u - 1}{u} \rightarrow 1, \quad \frac{a^u - 1}{u} \rightarrow \ln a \quad (a > 0), \quad \frac{\ln(1+u)}{u} \rightarrow 1.$$

À l'infini

$$\frac{a_n x^n + \dots}{b_d x^d + \dots} \sim \frac{a_n}{b_d} x^{n-d}, \quad \sqrt{x^2} = |x|.$$

$$\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx} \rightarrow \begin{cases} (a-b)/2 & \text{si } x \rightarrow +\infty, \\ -(a-b)/2 & \text{si } x \rightarrow -\infty. \end{cases}$$

Sommes utiles

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

Puissances et partie entière

Puissance réelle	$u^v = \exp(v \ln u)$, pour $u > 0$.
Forme 1^∞	Si $w \rightarrow 0$ et $vw \rightarrow \ell$, alors $(1+w)^v \rightarrow e^\ell$.
Moyenne géométrique	Pour n fixé et $a_k > 0$, $(\frac{1}{n} \sum a_k^x)^{1/x} \rightarrow (\prod a_k)^{1/n}$ lorsque $x \rightarrow 0$.
Erreur de partie entière	$t-1 < \lfloor t \rfloor \leq t$ et $0 \leq \{t\} < 1$.
Produit avec partie entière	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{b} \lfloor \frac{a}{x} \rfloor = \frac{a}{b}$, pour $b \neq 0$.

Avant de conclure

Vérifier : **domaine, signe, sens d'approche, radians, hypothèses du théorème et nombre de termes dans la somme**. Pour une partie entière proche d'un entier, préciser le côté d'approche de son argument.

Maths Olympiad

Un raccourci devient une méthode quand on sait pourquoi il fonctionne.