

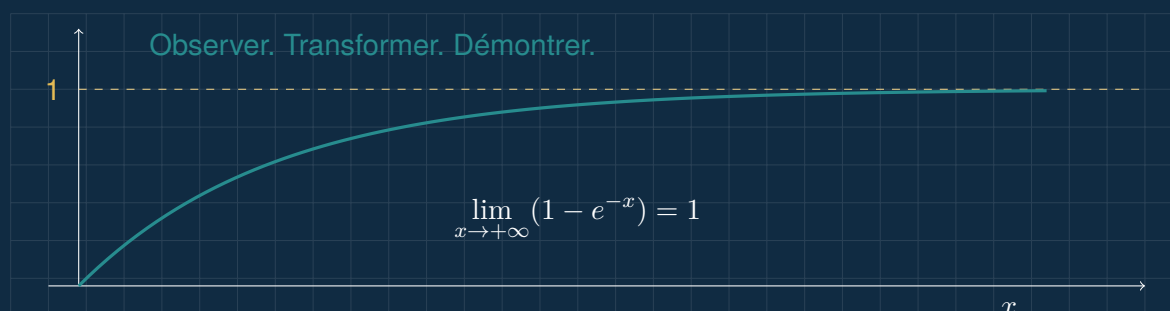
CAHIER D'ENTRAÎNEMENT

LIMITES

De l'idée
au raisonnement.

Des fondations aux problèmes de synthèse

Inspiration JEE Main & JEE Advanced

**56**

exercices corrigés

14

séries progressives

30

pages pour s'entraîner

QCM • Réponses exactes • Démonstrations

Indices ciblés • Méthodes • Pièges à éviter

MODE D'EMPLOI

Votre parcours en 30 pages

Ce livret reprend les **limites de fonctions et de suites** du cours précédent. Les niveaux sont indicatifs : séries 1 à 5 pour consolider les bases, 6 à 9 pour combiner les méthodes, 10 à 14 pour approfondir. Les exercices sont originaux, inspirés de l'esprit des concours ; ils ne sont pas présentés comme des annales officielles.

Formats. QCU : une seule réponse. QCM multiple : toutes les réponses vraies. Réponse exacte : conserver fractions et logarithmes, sans arrondi. Rédaction : justifier domaine, transformations et conclusion. Les durées sont des repères personnels, sans barème officiel.

Série	Thème	Ex.	Énoncés	Corrigés
1	Factoriser avant de calculer	1–4	3	17
2	Racines et conjugués	5–8	4	18
3	Trigonométrie et composition	9–12	5	19
4	Exponentielles et logarithmes	13–16	6	20
5	L'infini et les signes	17–20	7	21
6	Continuité et dérivée cachée	21–24	8	22
7	Sommes : le nombre de termes compte	25–28	9	23
8	Partie entière et limites latérales	29–32	10	24
9	Puissances indéterminées	33–36	11	25
10	Paramètres et termes qui s'annulent	37–40	12	26
11	Oscillations et existence d'une limite	41–44	13	27
12	Compositions et moyennes	45–48	14	28
13	QCM à plusieurs réponses	49–52	15	29
14	Défis de synthèse	53–56	16	30

Bien travailler avec ce livret

Essayer seul avant de consulter les indices. Rédiger les calculs dans un cahier, comparer avec le corrigé, puis refaire l'exercice un autre jour. Noter l'idée décisive et l'erreur évitée, pas seulement la réponse.

Conventions. Angles en radians ; $\ln$ logarithme népérien ; $[t]$ partie entière ; n entier positif. Une limite bilatérale se prend sur le domaine de l'expression. $o(x^m)/x^m \rightarrow 0$; $O(x^m)/x^m$ reste borné près de 0. Les développements limités sont des outils d'approfondissement issus de Taylor.

Repères officiels consultés. [Programme JEE Main 2026](#) ; [programme JEE Advanced 2026](#) ; [sujet Advanced 2026, Paper 2](#). Sources utilisées pour les thèmes et formats, non pour reproduire des questions. Consultation : 8 octobre 2026.

SÉRIE 01 | FONDATIONS / MAIN

Factoriser avant de calculer

Objectif : Reconnaître un facteur qui s'annule et simplifier uniquement pour les valeurs où le quotient est défini.

Temps conseillé : 15 min

Corrigés : page 17

01. Une différence de cubes

QCU

Calculer $L = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$.

A. 2

B. 3

C. 4

D. 6

02. Deux sommes géométriques

Réponse exacte

Calculer $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{x^3 - 1}$ en utilisant une factorisation. Donner une fraction irréductible.

03. Une annulation volontaire

QCU

Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^4 - 1 - 4x}{x^2}$.

A. 0

B. 4

C. 6

D. 12

04. Un zéro double

Rédaction

Calculer $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{(x-1)^2}$. Justifier pourquoi une seule simplification par $x-1$ ne suffit pas.

Indices à consulter après une vraie tentative

1. Utiliser $a^3 - b^3$. 2. Écrire $x^m - 1$. 3. Développer jusqu'au terme en x^2 . 4. Tester le facteur $(x-1)^2$.

SÉRIE 02 | FONDATIONS / MAIN

Racines et conjugués

Objectif : Faire apparaître le petit accroissement caché sous une racine et contrôler les facteurs qui restent.

Temps conseillé : 18 min

Corrigés : page 18

05. Une racine carrée

Réponse exacte

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+2x} - 3}{x}$. Résoudre sans dérivation.

06. Deux racines différentes

QCU

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x} - \sqrt{1-x}}{x}$.

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

07. Une racine cubique

Réponse exacte

Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+x} - 2}{x}$. Utiliser une identité sur les cubes.

08. Quotient de deux écarts

Rédaction

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt{1+4x} - 1}$. Préciser pourquoi le dénominateur est non nul pour $x \neq 0$ suffisamment proche de 0.

Indices à consulter après une vraie tentative

5–6. Multiplier par la somme des racines. 7. $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$. 8. Rationaliser chaque différence.

SÉRIE 03 | FONDATIONS / MAIN

Trigonométrie et composition

Objectif : Ramener chaque expression à un petit argument et aux limites usuelles, toujours en radians.

Temps conseillé : 20 min

Corrigés : page 19

09. Deux vitesses angulaires

QCU

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{\tan(2x)}$.

A. $\frac{2}{5}$ B. $\frac{5}{2}$

C. 10

D. 1

10. Un cosinus au second ordre

Réponse exacte

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(3x)}{x \sin(2x)}$.

11. Le petit argument est caché

Rédaction

Calculer $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x^2 - 4)}{x - 2}$. Identifier explicitement l'expression qui tend vers 0.

12. Une différence de fonctions proches

Réponse exacte

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$, sans appliquer trois fois la règle de l'Hôpital.

Indices à consulter après une vraie tentative

9. Faire apparaître $5x$ et $2x$. 10. Utiliser l'angle moitié. 11. Factoriser $x^2 - 4$. 12. Écrire $\tan x = \sin x / \cos x$.

SÉRIE 04 | MAIN

Exponentielles et logarithmes

Objectif : Utiliser les accroissements usuels et reconnaître une annulation qui impose de conserver un terme supplémentaire.

Temps conseillé : 20 min

Corrigés : page 20

13. Différence d'exponentielles

QCU

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{-2x}}{x}$.

A. 1

B. 5

C. -5

D. 0

14. Quotient de logarithmes

Réponse exacte

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+4x)}{\ln(1-3x)}$, en vérifiant le domaine près de 0.

15. Deux bases positives

Réponse exacte

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 2^x}{x}$. Donner une écriture comportant un seul logarithme.

16. Le terme linéaire disparaît

QCU

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$.

A. -1

B. $-\frac{1}{2}$

C. 0

D. $\frac{1}{2}$ **Indices à consulter après une vraie tentative**

13. Ajouter et retrancher 1. 14. Réécrire avec $4x$ et $-3x$. 15. Utiliser $a^x = e^{x \ln a}$. 16. Le seul équivalent $\ln(1+x) \sim x$ ne suffit pas.

SÉRIE 05 | MAIN

L'infini et les signes

Objectif : Comparer les termes dominants sans oublier que la racine de x^2 est $|x|$.

Temps conseillé : 20 min

Corrigés : page 21

17. Même degré

QCU

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^4 - x + 1}{2x^4 + 7x^2}$.

A. 0

B. $\frac{1}{3}$

C. 3

D. $+\infty$ **18. Une racine à gauche**

Réponse exacte

Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 + 3x + 2x})$.

19. Une différence très petite

Réponse exacte

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 4} - x)$.

20. Le signe de l'infini

QCU

Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3 + 2}{x^2 + 1}$.

A. 0

B. 3

C. $+\infty$ D. $-\infty$ **Indices à consulter après une vraie tentative**

17. Diviser par x^4 . 18. Rationaliser puis utiliser $|x| = -x$. 19. Multiplier par le conjugué. 20. Isoler un facteur x .

SÉRIE 06 | MAIN / TRANSITION

Continuité et dérivée cachée

Objectif : Relier le calcul de limites au raccordement de fonctions et au taux d'accroissement.

Temps conseillé : 25 min

Corrigés : page 22

21. Combler un trou

Réponse exacte

On définit $f(x) = \sin(4x)/x$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = c$. Déterminer c pour que f soit continue en 0.

22. Raccordement à deux paramètres

Rédaction

Au voisinage de 0, $f(x) = \ln(1 + 2x)/x$ si $x < 0$, et $f(x) = ax + b$ si $x \geq 0$. Déterminer a, b pour que f soit dérivable en 0.

23. Une fonction inconnue

Réponse exacte

La fonction f est dérivable en 9 et vérifie $f(9) = 16$, $f'(9) = 6$. Calculer

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{f(x)} - 4}{\sqrt{x} - 3}.$$

24. Une famille de puissances

Rédaction

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pour $x > 0$, calculer $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^a - 1}{x^b - 1}$, y compris si $a = 0$.

Indices à consulter après une vraie tentative

21. Continuité : limite = valeur. 22. Trouver b avant a . 23. Faire apparaître $(f(x) - f(9))/(x - 9)$.
24. Reconnaître deux dérivées en 1.

SÉRIE 07 | MAIN / TRANSITION

Sommes : le nombre de termes compte

Objectif : Calculer une somme exacte ou contrôler tous ses termes à la fois lorsque leur nombre tend vers l'infini.

Temps conseillé : 30 min

Corrigés : page 23

25. La somme des carrés

Réponse exacte

Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2$. On rappelle $\sum_{k=1}^n k^2 = n(n+1)(2n+1)/6$.

26. Les nombres impairs

QCU

Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n (2k-1)$.

A. 0

B. $\frac{1}{2}$

C. 1

D. 2

27. Une somme télescopique

Réponse exacte

Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k)(n+k+1)}$.

28. De petits sinus, mais beaucoup

Rédaction

Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$. Justifier l'usage de $\sin u \sim u$ pour tous les indices k simultanément.

Indices à consulter après une vraie tentative

25. Employer la formule donnée. 26. Sommer une suite arithmétique. 27. Décomposer en différence de fractions. 28. Tous les arguments sont dans $]0, 1/n]$.

SÉRIE 08 | MAIN / TRANSITION

Partie entière et limites latérales

Objectif : Situer une expression de part et d'autre d'un entier avant d'appliquer la partie entière.

Temps conseillé : 25 min

Corrigés : page 24

29. Juste en dessous de 1

QCU

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \left\lfloor \frac{\sin x}{x} \right\rfloor$.

A. 0

B. 1

C. -1

D. n'existe pas

30. Juste au-dessus de 1

QCU

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \left\lfloor \frac{\tan x}{x} \right\rfloor$.

A. 0

B. 1

C. 2

D. n'existe pas

31. Une erreur inférieure à 1

Rédaction

Démontrer que $\lim_{x \rightarrow 0} x \left\lfloor \frac{3}{x} \right\rfloor = 3$. La limite est demandée des deux côtés de 0.

32. Deux côtés incompatibles

QCU

Pour $F(x) = \lfloor x \rfloor / x$, déterminer la limite à gauche, puis la limite à droite en 0. La limite bilatérale est :

A. 0

B. 1

C. $+\infty$

D. inexistante

Indices à consulter après une vraie tentative

29–30. Utiliser les inégalités trigonométriques puis la parité. 31. Majorer une erreur en valeur absolue. 32. Écrire explicitement $\lfloor x \rfloor$ sur $] -1, 0[$ et $] 0, 1[$.

SÉRIE 09 | MAIN / TRANSITION

Puissances indéterminées

Objectif : Transformer une puissance en exponentielle et calculer la limite de son logarithme.

Temps conseillé : 25 min

Corrigés : page 25

33. Une base proche de 1

QCU

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{2/x}$.

A. 1

B. e^3 C. e^6 D. $e^{2/3}$ **34. Un quotient élevé à une grande puissance**

Réponse exacte

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + 2x^2}{1 + 5x^2} \right)^{1/x^2}$.

35. Le cosinus devient une base

Réponse exacte

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2}$. Justifier la positivité de la base près de 0.

36. Une forme 0^0

Rédaction

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$. Justifier la limite intermédiaire $x \ln x \rightarrow 0$.

Indices à consulter après une vraie tentative

33–35. Prendre le logarithme de l'expression entière. 36. Poser $t = 1/x$ pour comparer logarithme et puissance.

SÉRIE 10 | ADVANCED

Paramètres et termes qui s'annulent

Objectif : Déterminer les coefficients imposés par l'existence d'une limite finie, puis calculer le premier terme qui subsiste.

Temps conseillé : 35 min

Corrigés : page 26

37. Une famille trigonométrique

Rédaction

Pour $a \in \mathbb{R}$, calculer

$$L(a) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax) - a \sin x}{x^3}.$$

Déterminer tous les a pour lesquels $L(a) = 0$.

38. Neutraliser deux termes

Rédaction

Trouver tous les couples réels (a, b) pour lesquels

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - ax - bx^2}{x^3}$$

est finie, puis donner sa valeur.

39. Logarithme contre trigonométrie

Rédaction

Trouver $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ pour que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - a \sin x - b(1 - \cos x)}{x^3}$$

soit finie. Calculer cette limite.

40. Une tangente sous la racine

Rédaction

Déterminer le réel a pour lequel $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - ax}{x^2}$ est finie. Calculer la limite en privilégiant une identité exacte.

Indices à consulter après une vraie tentative

37–39. Conserver les termes jusqu'à x^3 . 40. Trouver le coefficient linéaire, puis rationaliser deux fois. Les paramètres sont fixes pendant le passage à la limite.

SÉRIE 11 | ADVANCED

Oscillations et existence d'une limite

Objectif : Distinguer une oscillation amortie d'une oscillation persistante et utiliser des suites pour prouver la non-existence.

Temps conseillé : 30 min

Corrigés : page 27

41. Une oscillation amortie

Rédaction

Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$ par encadrement. Expliquer pourquoi la limite usuelle $\sin x/x \rightarrow 1$ ne s'applique pas ici.

42. Deux trajets vers l'infini

Rédaction

La fonction $F(x) = (2 + \sin x)/(3 + \cos x)$ admet-elle une limite lorsque $x \rightarrow +\infty$? Justifier avec deux suites explicites.

43. Quel amortissement suffit ?

Rédaction

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, étudier l'existence d'une limite finie de

$$|x|^\alpha \sin(1/x) \quad \text{lorsque } x \rightarrow 0.$$

Donner la limite lorsqu'elle existe.

44. Dérivable, mais dérivée sans limite

Rédaction

On pose $h(0) = 0$ et $h(x) = x^2 \sin(1/x)$ si $x \neq 0$. Montrer que h est continue et dérivable en 0. La fonction h' a-t-elle une limite en 0 ?

Indices à consulter après une vraie tentative

41. Majorer la valeur absolue. 42. Fixer le cosinus à 1 puis à -1 . 43. Fixer le sinus à 1 puis à -1 . 44. Calculer la dérivée au point avec sa définition.

SÉRIE 12 | ADVANCED

Compositions et moyennes

Objectif : Décomposer une composition en rapports usuels et découvrir une moyenne géométrique derrière une puissance.

Temps conseillé : 35 min

Corrigés : page 28

45. Trois fonctions en cascade

Réponse exacte

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin(3x)} - 1}{\ln(1 + 2x)}$.

46. Un centre différent de zéro

Rédaction

Calculer $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(e^{x-2} - 1)}{\ln(x - 1)}$. Préciser le domaine utile près de 2.

47. Une moyenne inattendue

QCU

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2^x + 8^x}{2} \right)^{1/x}$.

A. 4

B. 5

C. $\sqrt{10}$

D. 16

48. Mesurer l'écart entre deux moyennes

Rédaction

Pour $a, b > 0$, $a \neq b$, calculer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{a^x + b^x}{2} - (ab)^{x/2}}{x^2}.$$

Expliquer pourquoi le résultat est strictement positif.

Indices à consulter après une vraie tentative

45–46. Insérer des rapports égaux à 1 à la limite. 47. Prendre le logarithme puis reconnaître une dérivée. 48. Poser $p = \ln a$, $q = \ln b$.

SÉRIE 13 | ADVANCED

QCM à plusieurs réponses

Objectif : Pour chaque exercice, sélectionner toutes les propositions vraies. Il peut y avoir plusieurs réponses ; justifier aussi le rejet des autres.

Temps conseillé : 30 min

Corrigés : page 29

49. Équivalents : lesquels sont exacts ?

QCM multiple

Lorsque $x \rightarrow 0$, quelles propositions sont vraies ?

- A. $\sin x \sim x$.
- B. $1 - \cos x \sim x^2$.
- C. $\ln(1+x) \sim x$.
- D. $e^x \sim x$.

50. Vrai pour toutes les fonctions ?

QCM multiple

On suppose $u(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$, et v bornée près de 0. Quelles affirmations sont toujours vraies ?

- A. $u(x)v(x) \rightarrow 0$.
- B. $\sin(v(x))$ possède une limite.
- C. $u(x)^2 \cos(v(x)) \rightarrow 0$.
- D. Si $u(x) \neq 0$ près de 0, $(1+u(x))^{1/u(x)} \rightarrow e$.

51. Une partie entière sensible au signe

QCM multiple

Pour $x \neq 0$, soit $f(x) = (e^x - 1 - x)/x^2$ et $g(x) = (1 - \cos x)/x^2$. Lorsque $x \rightarrow 0$:

- A. $f(x) \rightarrow 1/2$ et $g(x) \rightarrow 1/2$.
- B. $f(x)/g(x) \rightarrow 1$.
- C. $\lfloor g(x) \rfloor \rightarrow 0$.
- D. $\lfloor 2f(x) \rfloor \rightarrow 1$.

52. Deux échelles de petitesse

QCM multiple

Pour $n \geq 1$, poser $U_n = n(\sqrt{n^2 + 2n + 3} - n - 1)$ et $V_n = n[\ln(1 + 1/n) - 1/n]$. Quelles propositions sont vraies ?

- A. $U_n \rightarrow 1$.
- B. $nV_n \rightarrow -1/2$.
- C. $U_n V_n \rightarrow -1/2$.
- D. $U_n + nV_n \rightarrow 1/2$.

Indices à consulter après une vraie tentative

49. Calculer les rapports. 50. Un contre-exemple suffit pour réfuter « toujours ». 51. Déterminer le côté d'approche de $2f(x)$. 52. Distinguer V_n et nV_n .

SÉRIE 14 | ADVANCED / DÉFI

Défis de synthèse

Objectif : Combiner plusieurs idées et justifier les erreurs d'approximation. Ces quatre exercices se résolvent sur une feuille séparée.

Temps conseillé : 50 min

Corrigés : page 30

53. Deux compensations à l'infini

Rédaction

Déterminer les réels p, q pour lesquels

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\sqrt{x^2 + 2x + 5} - x - p - \frac{q}{x} \right)$$

est finie. Calculer cette limite en utilisant le conjugué.

54. Une puissance, puis sa précision

Rédaction

Pour $a > 0$, poser $P_a(x) = ((1 + ax)/(1 + x))^{1/\sin x}$ près de 0, $x \neq 0$. **a)** Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} P_a(x)$, puis trouver a pour que cette limite vaille e^2 . **b)** Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln P_a(x) - (a - 1)}{x}$.

55. Un nombre de termes défini par une partie entière

Rédaction

Pour $0 < x < 1$, poser $N(x) = \lfloor 1/x \rfloor$. **a)** Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \sum_{k=1}^{N(x)} k$. **b)** L'expression $(xN(x) - 1)/x$ a-t-elle une limite lorsque $x \rightarrow 0^+$?

56. Un produit de petits facteurs

Rédaction

Pour $n \geq 1$, poser $P_n = \prod_{k=1}^n (1 + k/n^2)$. **a)** Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n$. **b)** Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\ln P_n - 1/2)$.
On pourra établir, pour $t \geq 0$, $0 \leq \ln(1 + t) - t + t^2/2 \leq t^3/3$.

Indices à consulter après une vraie tentative

53. Retrancher d'abord la constante, puis le terme en $1/x$. 54. Travailler sur $\ln P_a$. 55. Écrire $xN \rightarrow 1$. 56. Prendre le logarithme et sommer les erreurs.

CORRIGÉS | SÉRIE 01

Factoriser avant de calculer

Énoncés : page 3

Exercices 1 à 4

01. Une différence de cubes

Pour $x \neq 2$ et proche de 2,

$$\frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} = \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{(x - 2)(x + 2)} = \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 2}.$$

Le dernier quotient est continu en 2 et son dénominateur vaut 4. Donc $L = 12/4 = \boxed{3}$, soit **B**. On n'attribue aucune valeur à 0/0 : on calcule une limite après simplification.

02. Deux sommes géométriques

L'identité $x^m - 1 = (x - 1)(1 + x + \dots + x^{m-1})$ donne

$$\frac{x^5 - 1}{x^3 - 1} = \frac{1 + x + x^2 + x^3 + x^4}{1 + x + x^2} \longrightarrow \boxed{\frac{5}{3}}.$$

Le numérateur simplifié contient cinq termes tendant vers 1, le dénominateur trois. La simplification est légitime sur un voisinage épointé de 1.

03. Une annulation volontaire

Le binôme donne $(1 + x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$. Ainsi, pour $x \neq 0$,

$$\frac{(1 + x)^4 - 1 - 4x}{x^2} = 6 + 4x + x^2 \longrightarrow \boxed{6}.$$

Réponse **C**. Les termes constant et linéaire ont disparu ; le premier terme utile est quadratique.

04. Un zéro double

On vérifie l'identité $x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(x + 2)$. Le facteur $x - 1$ apparaît donc deux fois : 1 est une racine double du numérateur. Pour $x \neq 1$, le quotient vaut exactement $x + 2$, d'où $\boxed{L = 3}$. Après une seule division, le quotient serait encore de forme 0/0.

L'idée à retenir

Dans une limite, une identité valable pour $x \neq a$ suffit. L'absence de valeur de la fonction en a n'empêche pas l'existence de sa limite.

CORRIGÉS | SÉRIE 02

Racines et conjugués

Énoncés : page 4

Exercices 5 à 8

05. Une racine carrée

Multiplier par le conjugué transforme une différence en différence de carrés :

$$\frac{\sqrt{9+2x}-3}{x} = \frac{2}{\sqrt{9+2x}+3} \rightarrow \boxed{\frac{1}{3}}.$$

Les racines sont définies sur un voisinage de 0 et le nouveau dénominateur tend vers 6. Le facteur 2 vient du terme $2x$, pas de la racine elle-même.

06. Deux racines différentes

Les deux radicandes sont positifs près de 0. Après rationalisation,

$$\frac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-x}}{x} = \frac{4}{\sqrt{1+3x}+\sqrt{1-x}} \rightarrow \boxed{2}.$$

Réponse **B**. Le numérateur obtenu vaut $(1+3x)-(1-x) = 4x$; le signe devant $-x$ doit être correctement distribué.

07. Une racine cubique

Posons $u = \sqrt[3]{8+x}$, donc $u \rightarrow 2$. L'identité

$$x = u^3 - 8 = (u-2)(u^2 + 2u + 4)$$

donne, pour $x \neq 0$, $(u-2)/x = 1/(u^2 + 2u + 4)$. La limite vaut donc $\boxed{1/12}$. Le rôle du conjugué est ici joué par le facteur quadratique.

08. Quotient de deux écarts

Pour $x \neq 0$, $\sqrt{1+4x} = 1$ serait équivalent à $4x = 0$, impossible. En rationalisant séparément les deux différences,

$$\frac{x/(\sqrt{1+x}+1)}{4x/(\sqrt{1+4x}+1)} = \frac{\sqrt{1+4x}+1}{4(\sqrt{1+x}+1)} \rightarrow \boxed{\frac{1}{4}}.$$

Le domaine contient un voisinage épointé de 0, par exemple $-1/8 < x < 1/8$, $x \neq 0$.

L'idée à retenir

Ne pas « supprimer » une racine. Le conjugué produit une égalité exacte ; c'est cette égalité qui rend ensuite le passage à la limite possible.

CORRIGÉS | SÉRIE 03

Trigonométrie et composition

Énoncés : page 5

Exercices 9 à 12

09. Deux vitesses angulaires

On isole les rapports usuels :

$$\frac{\sin(5x)}{\tan(2x)} = \frac{\sin(5x)}{5x} \frac{2x}{\tan(2x)} \frac{5}{2}.$$

Les deux premiers facteurs tendent vers 1. La réponse est $\boxed{5/2}$, soit **B**. La formule porte sur l'argument du sinus ou de la tangente, et non sur la seule lettre x .

10. Un cosinus au second ordre

La limite $(1 - \cos u)/u^2 \rightarrow 1/2$ s'obtient avec $1 - \cos u = 2 \sin^2(u/2)$. Ainsi,

$$\frac{1 - \cos(3x)}{x \sin(2x)} = \frac{1 - \cos(3x)}{9x^2} \frac{2x}{\sin(2x)} \frac{9}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{9}{2} = \boxed{\frac{9}{4}}.$$

11. Le petit argument est caché

Le petit argument est $u = x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$, qui tend vers 0 lorsque $x \rightarrow 2$. Près de 2, pour $x \neq 2$,

$$\frac{\sin(x^2 - 4)}{x - 2} = \frac{\sin(x^2 - 4)}{x^2 - 4} (x + 2) \rightarrow 1 \times 4 = \boxed{4}.$$

Il n'est pas nécessaire que x lui-même tende vers 0.

12. Une différence de fonctions proches

L'identité $\tan x - \sin x = \sin x(1 - \cos x)/\cos x$ donne

$$\frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \frac{\sin x}{x} \frac{1 - \cos x}{x^2} \frac{1}{\cos x} \rightarrow 1 \times \frac{1}{2} \times 1 = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

Près de 0, $\cos x \neq 0$. La factorisation révèle trois limites simples et évite une longue dérivation.

L'idée à retenir

Les équivalents $\sin u \sim u$ et $\tan u \sim u$ sont utiles dans des produits et quotients. Leur soustraction directe détruirait le terme décisif de l'exercice 12.

CORRIGÉS | SÉRIE 04

Exponentielles et logarithmes

Énoncés : page 6

Exercices 13 à 16

13. Différence d'exponentielles

Insérer puis retrancher 1 permet de séparer deux accroissements :

$$\frac{e^{3x} - e^{-2x}}{x} = 3 \frac{e^{3x} - 1}{3x} + 2 \frac{e^{-2x} - 1}{-2x} \rightarrow 3 + 2 = \boxed{5}.$$

Réponse **B**. Le signe positif du second terme vient des deux signes négatifs qui se compensent.

14. Quotient de logarithmes

Pour $-1/8 < x < 1/8$, les deux arguments des logarithmes sont positifs. Le dénominateur ne s'annule qu'en 0. On écrit

$$\frac{\ln(1+4x)}{\ln(1-3x)} = \frac{\ln(1+4x)}{4x} \frac{-3x}{\ln(1-3x)} \left(-\frac{4}{3}\right) \rightarrow \boxed{-\frac{4}{3}}.$$

15. Deux bases positives

Pour $a > 0$, $a^x = e^{x \ln a}$, donc $(a^x - 1)/x \rightarrow \ln a$. Par différence de deux limites finies,

$$\frac{5^x - 2^x}{x} = \frac{5^x - 1}{x} - \frac{2^x - 1}{x} \rightarrow \ln 5 - \ln 2 = \boxed{\ln(5/2)}.$$

La propriété $\ln u - \ln v = \ln(u/v)$ s'applique car les bases sont positives.

16. Le terme linéaire disparaît

La forme est 0/0. Sur un voisinage épointé de 0, numérateur et dénominateur sont dérivables et $(x^2)' = 2x \neq 0$. Le quotient des dérivées vaut

$$\frac{1/(1+x) - 1}{2x} = -\frac{1}{2(1+x)} \rightarrow -\frac{1}{2}.$$

La règle de l'Hôpital, appliquée de chaque côté, donne $\boxed{-1/2}$, réponse **B**. Autre lecture : $\ln(1+x) = x - x^2/2 + o(x^2)$.

L'idée à retenir

Avant de prendre un logarithme, vérifier la positivité de son argument. Avant l'Hôpital, vérifier la forme indéterminée et les hypothèses de dérivation.

CORRIGÉS | SÉRIE 05

L'infini et les signes

Énoncés : page 7

Exercices 17 à 20

17. Même degréDiviser numérateur et dénominateur par x^4 donne

$$\frac{6 - x^{-3} + x^{-4}}{2 + 7x^{-2}} \rightarrow \frac{6}{2} = \boxed{3}.$$

Réponse **C**. La règle du rapport des coefficients dominants s'applique ici parce que les degrés sont égaux et que le coefficient dominant du dénominateur est non nul.

18. Une racine à gauchePour x négatif de grande valeur absolue, le conjugué conduit à

$$\sqrt{4x^2 + 3x} + 2x = \frac{3x}{\sqrt{4x^2 + 3x} - 2x} = \frac{3}{-\sqrt{4 + 3/x} - 2} \rightarrow \boxed{-\frac{3}{4}}.$$

Dans la dernière étape, $\sqrt{4x^2 + 3x} = -x\sqrt{4 + 3/x}$, car $|x| = -x$.**19. Une différence très petite**

La rationalisation annule les termes quadratiques :

$$x(\sqrt{x^2 + 4} - x) = \frac{4x}{\sqrt{x^2 + 4} + x} = \frac{4}{\sqrt{1 + 4/x^2} + 1} \rightarrow \boxed{2}.$$

Le facteur x compense exactement la petitesse de la différence de racines.**20. Le signe de l'infini**

On factorise de manière à conserver le signe :

$$\frac{3x^3 + 2}{x^2 + 1} = x \frac{3 + 2/x^3}{1 + 1/x^2}.$$

Le second facteur tend vers 3, nombre positif, alors que $x \rightarrow -\infty$. La limite vaut donc $\boxed{-\infty}$, réponse **D**. « Degré plus grand au numérateur » n'impose pas $+\infty$.

L'idée à retenir

À $-\infty$, suivre séparément la grandeur et le signe. Pour une racine carrée, une valeur absolue oubliée inverse parfois toute la réponse.

CORRIGÉS | SÉRIE 06

Continuité et dérivée cachée

Énoncés : page 8

Exercices 21 à 24

21. Comblant un trou

Pour $x \neq 0$, $\sin(4x)/x = 4 \sin(4x)/(4x) \rightarrow 4$. La continuité impose que cette limite égale la valeur choisie en 0. Il faut et il suffit donc de prendre $\boxed{c = 4}$. La valeur d'une fonction au point et sa limite sont deux objets distincts qu'on fait ici coïncider.

22. Raccordement à deux paramètres

La limite à gauche vaut 2. La continuité impose d'abord $b = 2$. Pour la dérivée à gauche,

$$\frac{f(x) - 2}{x} = \frac{\ln(1 + 2x) - 2x}{x^2} \rightarrow -2,$$

en utilisant l'exercice 16 avec $u = 2x$. La dérivée à droite vaut a . Les deux dérivées coïncident exactement pour $\boxed{a = -2, b = 2}$.

23. Une fonction inconnue

La dérivabilité en 9 implique la continuité ; donc $f(x) > 0$ près de 9. En rationalisant les deux différences,

$$\frac{\sqrt{f(x)} - 4}{\sqrt{x} - 3} = \frac{f(x) - 16}{x - 9} \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{f(x)} + 4} \rightarrow 6 \times \frac{6}{8} = \boxed{\frac{9}{2}}.$$

Cette preuve n'exige pas de connaître f' près de 9 : la seule dérivabilité au point suffit.

24. Une famille de puissances

Pour $a \neq 0$, écrire le quotient comme le rapport des taux d'accroissement en 1 :

$$\frac{(x^a - 1)/(x - 1)}{(x^b - 1)/(x - 1)} \rightarrow \frac{a}{b},$$

car la dérivée de x^r en 1 vaut r . Le dénominateur limite est non nul. Si $a = 0$, le numérateur est identiquement nul et la limite vaut aussi $\boxed{a/b = 0}$.

L'idée à retenir

Pour un raccordement dérivable : commencer par la continuité, puis calculer les deux taux d'accroissement. Égaliser directement les expressions ne suffit pas.

CORRIGÉS | SÉRIE 07

Sommes : le nombre de termes compte

Énoncés : page 9

Exercices 25 à 28

25. La somme des carrés

La formule donnée réduit la somme à un quotient de polynômes :

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow \boxed{\frac{1}{3}}.$$

Prendre la limite de chaque terme à indice fixé ne suffit pas : le nombre de termes n'est pas fixe.

26. Les nombres impairs

La somme vaut

$$2 \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 1 = n(n+1) - n = n^2.$$

Le quotient est donc exactement égal à 1 pour tout entier $n \geq 1$. Sa limite est $\boxed{1}$, réponse **C**. Ici le calcul exact est plus rapide qu'une estimation asymptotique.

27. Une somme télescopique

L'identité $1/(j(j+1)) = 1/j - 1/(j+1)$ fait disparaître les termes intérieurs :

$$n \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{n+k} - \frac{1}{n+k+1} \right) = n \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n+1} \right) \rightarrow \boxed{\frac{1}{2}}.$$

La dernière borne est bien $2n+1$, et non $2n$.

28. De petits sinus, mais beaucoup

Pour $1 \leq k \leq n$, $0 < k/n^2 \leq 1/n$. Étant donné $\varepsilon > 0$, la limite $\sin u/u \rightarrow 1$ assure, pour n assez grand et tous ces k ,

$$(1 - \varepsilon) \frac{k}{n^2} \leq \sin \frac{k}{n^2} \leq (1 + \varepsilon) \frac{k}{n^2}.$$

En sommant et en utilisant $\sum k/n^2 = (n+1)/(2n) \rightarrow 1/2$, puis en laissant $\varepsilon \rightarrow 0$, on obtient $\boxed{1/2}$.

L'idée à retenir

Avec un nombre croissant de termes, une approximation doit être contrôlée uniformément ou son erreur totale doit tendre vers 0. Un terme petit n'implique pas une somme petite.

CORRIGÉS | SÉRIE 08

Partie entière et limites latérales

Énoncés : page 10

Exercices 29 à 32

29. Juste en dessous de 1

Pour $0 < |x| < \pi/2$, on a $0 < \sin x/x < 1$. Pour $x > 0$, cela résulte de $0 < \sin x < x$; pour $x < 0$, on utilise la parité du rapport. La partie entière est donc exactement 0 sur ce voisinage épointé : $\boxed{L=0}$, réponse **A**. Prendre la partie entière de la limite 1 donnerait une réponse fausse.

30. Juste au-dessus de 1

Pour $0 < x < \pi/2$, $\tan x > x$, donc $\tan x/x > 1$. Ce rapport est pair et tend vers 1; il est donc aussi inférieur à 2 lorsque $|x|$ est suffisamment petit. Ainsi $1 < \tan x/x < 2$, des deux côtés de 0, et sa partie entière vaut 1. Réponse $\boxed{1}$, soit **B**.

31. Une erreur inférieure à 1

Pour tout réel t , $||t| - t| < 1$. En posant $t = 3/x$,

$$\left| x \left\lfloor \frac{3}{x} \right\rfloor - 3 \right| = |x| \left| \left\lfloor \frac{3}{x} \right\rfloor - \frac{3}{x} \right| < |x| \rightarrow 0.$$

On obtient $\boxed{3}$. La valeur absolue évite d'inverser une inégalité à la main lorsque $x < 0$.

32. Deux côtés incompatibles

Pour $-1 < x < 0$, $\lfloor x \rfloor = -1$, donc $F(x) = -1/x \rightarrow +\infty$. Pour $0 < x < 1$, $\lfloor x \rfloor = 0$, donc $F(x) = 0$. Les deux limites latérales sont distinctes. La limite bilatérale **n'existe pas**, réponse **D**. Même une limite infinie bilatérale nécessiterait le même comportement des deux côtés.

L'idée à retenir

La partie entière est discontinue aux entiers. Si son argument tend vers un entier, il faut étudier le côté d'approche; une simple substitution ne suffit pas.

CORRIGÉS | SÉRIE 09

Puissances indéterminées

Énoncés : page 11

Exercices 33 à 36

33. Une base proche de 1

La base est positive pour $x > -1/3$. Si $y = (1 + 3x)^{2/x}$, alors

$$\ln y = \frac{2 \ln(1 + 3x)}{x} = 6 \frac{\ln(1 + 3x)}{3x} \rightarrow 6.$$

Par continuité de l'exponentielle, $y \rightarrow \boxed{e^6}$, réponse **C**. La démarche reste valable pour $x \rightarrow 0^-$.

34. Un quotient élevé à une grande puissance

La base est strictement positive. Le logarithme de l'expression vaut

$$\frac{\ln(1 + 2x^2) - \ln(1 + 5x^2)}{x^2} \rightarrow 2 - 5 = -3.$$

En revenant à l'exponentielle, la limite cherchée est $\boxed{e^{-3}}$. Il ne faut pas confondre cette réponse avec -3 , qui n'est que la limite du logarithme.

35. Le cosinus devient une base

Pour $|x| < \pi/2$, $\cos x > 0$. Posons $u = \cos x - 1 \rightarrow 0$. Alors

$$\frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \frac{\ln(1 + u)}{u} \frac{\cos x - 1}{x^2} \rightarrow 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right).$$

Donc $\boxed{(\cos x)^{1/x^2} \rightarrow e^{-1/2}}$. Le petit écart de la base à 1 est d'ordre x^2 .

36. Une forme 0^0

Pour $x > 0$, $x^x = \exp(x \ln x)$. Avec $t = 1/x \rightarrow +\infty$, on a $x \ln x = -\ln t/t$. Le quotient est de forme ∞/∞ et, par l'Hôpital, $(1/t)/1 \rightarrow 0$. Ainsi $x \ln x \rightarrow 0$, puis $\boxed{x^x \rightarrow 1}$. La forme symbolique 0^0 ne détermine à elle seule aucune valeur.

L'idée à retenir

Pour $u(x) > 0$, écrire $u(x)^{v(x)} = \exp(v(x) \ln u(x))$. On traite d'abord le produit dans l'exposant, puis on revient à l'exponentielle.

CORRIGÉS | SÉRIE 10

Paramètres et termes qui s'annulent

Énoncés : page 12

Exercices 37 à 40

37. Une famille trigonométrique

Pour a fixé, $\sin(ax) = ax - a^3x^3/6 + o(x^3)$ et $a \sin x = ax - ax^3/6 + o(x^3)$. Donc

$$L(a) = \frac{a - a^3}{6}.$$

Les termes linéaires s'annulent. La limite est nulle si et seulement si $a(1 - a^2) = 0$, c'est-à-dire $a \in \{-1, 0, 1\}$. Pour ces trois valeurs, le numérateur est même identiquement nul.

38. Neutraliser deux termes

On dispose de $e^x = 1 + x + x^2/2 + x^3/6 + o(x^3)$. Le quotient vaut

$$\frac{1-a}{x^2} + \frac{1/2-b}{x} + \frac{1}{6} + o(1).$$

Une limite finie impose d'abord $a = 1$, puis $b = 1/2$. Ces conditions sont aussi suffisantes, et donnent $(a, b) = (1, 1/2)$, $L = 1/6$. Des termes de puissances différentes ne peuvent pas se compenser près de 0.

39. Logarithme contre trigonométrie

Les développements au troisième ordre donnent

$$\ln(1+x) - a \sin x - b(1 - \cos x) = (1-a)x - \frac{1+b}{2}x^2 + \left(\frac{1}{3} + \frac{a}{6}\right)x^3 + o(x^3).$$

Il faut annuler successivement les coefficients de x et x^2 : $a = 1$, $b = -1$. Le coefficient cubique devient $1/3 + 1/6 = 1/2$. Ainsi $a = 1$, $b = -1$, $L = 1/2$.

40. Une tangente sous la racine

Comme $(\sqrt{1+x} - 1)/x \rightarrow 1/2$, la finitude impose $a = 1/2$. Pour cette valeur,

$$\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2} = -\frac{x^2}{2(\sqrt{1+x} + 1)^2}.$$

En divisant par x^2 , on obtient $L = -1/8$. Pour vérifier l'identité, remplacer d'abord $\sqrt{1+x} - 1$ par $x/(\sqrt{1+x} + 1)$, puis rationaliser encore.

L'idée à retenir

Un développement limité $P(x) + o(x^m)$ conserve assez d'information pour diviser par x^m . Ici $o(x^m)/x^m \rightarrow 0$. Les formules utilisées découlent de Taylor.

CORRIGÉS | SÉRIE 11

Oscillations et existence d'une limite

Énoncés : page 13

Exercices 41 à 44

41. Une oscillation amortie

Pour $x > 0$, $|\sin x/x| \leq 1/x \rightarrow 0$. Le théorème d'encadrement donne donc $\boxed{0}$. La limite usuelle égale à 1 exige que l'argument du sinus tende vers 0. Ici cet argument tend vers l'infini, le sinus oscille, mais le dénominateur amortit cette oscillation.

42. Deux trajets vers l'infini

Choisissons $u_n = 2\pi n$ et $v_n = (2n+1)\pi$. Les deux suites tendent vers $+\infty$, mais

$$F(u_n) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad F(v_n) = \frac{2}{2} = 1.$$

Deux limites différentes le long de deux suites interdisent une limite globale. Ainsi $\boxed{F \text{ n'a pas de limite à } +\infty}$. Le dénominateur reste pourtant compris entre 2 et 4 : l'expression est bien définie.

43. Quel amortissement suffit ?

Si $\alpha > 0$, la valeur absolue de l'expression est majorée par $|x|^\alpha \rightarrow 0$, donc la limite vaut 0. Sinon, posons

$$u_n = \frac{1}{\pi/2 + 2\pi n}, \quad v_n = \frac{1}{3\pi/2 + 2\pi n}.$$

Les sinus valent respectivement 1 et -1 . Pour $\alpha = 0$, les valeurs sont 1 et -1 ; pour $\alpha < 0$, elles tendent vers $+\infty$ et $-\infty$. Donc $\boxed{\text{limite finie exactement si } \alpha > 0, \text{ valeur } 0}$.

44. Dérivable, mais dérivée sans limite

On a $|h(x)| \leq x^2 \rightarrow 0 = h(0)$, donc continuité. De plus,

$$\frac{h(x) - h(0)}{x} = x \sin(1/x) \rightarrow 0, \quad \text{donc } \boxed{h'(0) = 0}.$$

Pour $x \neq 0$, $h'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$. Le premier terme tend vers 0, mais le second prend alternativement les valeurs -1 et 1 le long de suites tendant vers 0. Ainsi h' n'a pas de limite en 0.

L'idée à retenir

Une fonction peut être dérivable en un point sans que sa dérivée soit continue en ce point. La limite de h' près de 0 et la valeur $h'(0)$ ne sont pas interchangeables.

CORRIGÉS | SÉRIE 12

Compositions et moyennes

Énoncés : page 14

Exercices 45 à 48

45. Trois fonctions en cascade

Les petits arguments sont $\sin(3x)$ et $2x$. On écrit

$$\frac{e^{\sin(3x)} - 1}{\ln(1 + 2x)} = \frac{e^{\sin(3x)} - 1}{\sin(3x)} \frac{\sin(3x)}{3x} \frac{2x}{\ln(1 + 2x)} \frac{3}{2}.$$

Chaque rapport variable tend vers 1. La limite est donc $\boxed{3/2}$. Tous ces facteurs sont définis sur un voisinage épointé assez petit.

46. Un centre différent de zéro

Posons $t = x - 2 \rightarrow 0$. Près de 2, $x - 1 = 1 + t > 0$, et le quotient devient

$$\frac{\sin(e^t - 1)}{e^t - 1} \frac{e^t - 1}{t} \frac{t}{\ln(1 + t)} \rightarrow 1.$$

Donc $\boxed{L = 1}$. Le changement de variable recentre simultanément les trois fonctions ; il ne modifie pas le sens bilatéral de l'approche.

47. Une moyenne inattendue

Posons $A(x) = (2^x + 8^x)/2 > 0$. On a $A(0) = 1$ et $A'(0) = (\ln 2 + \ln 8)/2 = \ln 4$. Le logarithme de l'expression vaut $\ln A(x)/x$, qui tend vers $(\ln A)'(0) = A'(0)/A(0) = \ln 4$. La limite est $\boxed{4}$, réponse **A**. Elle est géométrique, et non arithmétique.

48. Mesurer l'écart entre deux moyennes

Posons $p = \ln a$ et $q = \ln b$. Les termes constant et linéaire des deux expressions coïncident. Les coefficients quadratiques donnent

$$\frac{p^2 + q^2}{4} - \frac{(p + q)^2}{8} = \frac{(p - q)^2}{8}.$$

En effet, $e^{cx} = 1 + cx + c^2x^2/2 + o(x^2)$. La limite vaut donc $\boxed{\frac{1}{8} \left(\ln \frac{a}{b} \right)^2}$, strictement positive car $a \neq b$. C'est une mesure de la différence entre les deux logarithmes.

L'idée à retenir

Une somme dans la base d'une puissance se traite souvent en deux étapes : développer la base près de 1, puis appliquer le logarithme. Ne pas distribuer l'exposant sur une somme.

CORRIGÉS | SÉRIE 13

QCM à plusieurs réponses

Énoncés : page 15

Exercices 49 à 52

49. Équivalents : lesquels sont exacts ?

Réponses A et C. Les limites $\sin x/x \rightarrow 1$ et $\ln(1+x)/x \rightarrow 1$ sont usuelles. B est fausse car $(1 - \cos x)/x^2 \rightarrow 1/2$, et non 1. D est fausse : $e^x \rightarrow 1$ alors que $x \rightarrow 0$. L'équivalent correct est $e^x - 1 \sim x$. Un équivalent décrit un rapport tendant vers 1, pas seulement deux expressions « proches ».

50. Vrai pour toutes les fonctions ?

Réponses A, C et D. Si $|v| \leq M$, alors $|uv| \leq M|u| \rightarrow 0$. De même, $|u^2 \cos v| \leq u^2 \rightarrow 0$. Pour D, $1+u > 0$ près de 0 et $\ln((1+u)^{1/u}) = \ln(1+u)/u \rightarrow 1$. B est fausse : prendre $v(x) = \sin(1/x)$. Le long de suites adaptées, $\sin(v(x))$ prend les deux valeurs distinctes $\sin 1$ et $-\sin 1$.

51. Une partie entière sensible au signe

Réponses A, B et C. Les développements donnent $f(x) = 1/2 + x/6 + o(x)$, tandis que $g(x) \rightarrow 1/2$. Cela prouve A et B ; près de 0, $0 < g(x) < 1$, donc $\lfloor g(x) \rfloor = 0$. En revanche,

$$2f(x) = 1 + \frac{x}{3} + o(x).$$

Pour $x > 0$ assez petit, sa partie entière vaut 1 ; pour $x < 0$, elle vaut 0. La limite bilatérale de D n'existe pas.

52. Deux échelles de petitesse

Réponses A, B et D. Par rationalisation,

$$U_n = \frac{2n}{\sqrt{n^2 + 2n + 3} + n + 1} \rightarrow 1.$$

Avec $t = 1/n$, $nV_n = [\ln(1+t) - t]/t^2 \rightarrow -1/2$, donc $V_n \rightarrow 0$. Ainsi $U_n V_n \rightarrow 0$, ce qui réfute C, et $U_n + nV_n \rightarrow 1 - 1/2 = 1/2$, ce qui prouve D.

L'idée à retenir

Dans un QCM multiple, chaque proposition doit être examinée indépendamment. Une première réponse correcte ne suffit pas à arrêter la recherche.

CORRIGÉS | SÉRIE 14

Défis de synthèse

Énoncés : page 16

Exercices 53 à 56

53. Deux compensations à l'infini

Posons $R = \sqrt{x^2 + 2x + 5}$. Le conjugué donne $R - x \rightarrow 1$, puis $R - x - 1 = 4/(R + x + 1)$. La finitude impose donc $p = 1$, puis $q = 2$, car $x(R - x - 1) \rightarrow 2$. Pour ces valeurs,

$$x^2 \left(\frac{4}{R + x + 1} - \frac{2}{x} \right) = -\frac{2x(R - x + 1)}{R + x + 1} \longrightarrow \boxed{-2}.$$

Les conditions sont nécessaires et suffisantes : $\boxed{p = 1, q = 2}$.

54. Une puissance, puis sa précision

Les bases sont positives près de 0. Puisque $\sin x = x + O(x^3)$,

$$\ln P_a(x) = \frac{\ln(1 + ax) - \ln(1 + x)}{\sin x} = (a - 1) + \frac{1 - a^2}{2}x + o(x).$$

Donc $\boxed{P_a(x) \rightarrow e^{a-1}}$, et la valeur e^2 impose $\boxed{a = 3}$. La limite de la question b) est $\boxed{(1 - a^2)/2}$.

55. Un nombre de termes défini par une partie entière

L'encadrement $1/x - 1 < N \leq 1/x$ donne $xN \rightarrow 1$. Ainsi

$$x^2 \sum_{k=1}^N k = \frac{1}{2}(xN)x(N+1) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{2}}.$$

En revanche, $(xN - 1)/x = N - 1/x$. Cette expression vaut 0 pour $x = 1/n$, et $-1/2$ pour $x = 1/(n+1/2)$. Ces suites tendent vers 0^+ : **pas de limite** en b).

56. Un produit de petits facteurs

Pour $r(t) = \ln(1 + t) - t + t^2/2$, $r(0) = 0$ et $0 \leq r'(t) = t^2/(1 + t) \leq t^2$. L'intégration prouve la borne donnée. Donc

$$\ln P_n = \frac{n+1}{2n} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^4} + R_n, \quad 0 \leq R_n \leq \frac{n^2(n+1)^2}{12n^6}.$$

On a $R_n = O(n^{-2})$, d'où $\boxed{P_n \rightarrow e^{1/2}}$ et

$$n(\ln P_n - 1/2) \longrightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \boxed{\frac{1}{3}}.$$

L'idée à retenir

Dans une somme ou un produit à taille variable, contrôler le reste total est décisif. Ici l'erreur après sommation est d'ordre $1/n^2$, donc négligeable même après multiplication par n .