



BKalan

Recueil de sujets de concours



École Africaine de la Météorologie et de l'Aviation Civile (EAMAC)

Matière : Mathématiques

Niveau : Technicien / TS

N°	Année	Sujet	Page
1	2023	Mathématiques – Technicien / TS	2
2	2021	Mathématiques – Technicien / TS	4
3	2019	Mathématiques – Technicien / TS	6
4	2016	Mathématiques – Technicien / TS	8
5	2015	Mathématiques – Technicien / TS, mai	10
6	2014	Mathématiques – Technicien / TS	12
7	2013	Mathématiques – Technicien / TS	14
8	2013	Mathématiques – Technicien / TS (version anglaise)	15
9	2012	Mathématiques – Technicien / TS	17
10	2011	Mathématiques – Technicien / TS	19
11	2011	Mathématiques – Technicien / TS, sujet et proposition de corrigé	20
12	2010	Mathématiques – Technicien / TS	35
13	2009	Mathématiques – Technicien / TS	36
14	2008	Mathématiques – Technicien / TS	37
15	2003	Mathématiques – Technicien / TS, juillet	39
16	1998	Mathématiques – Technicien / TS, août I	42
17	1998	Mathématiques – Technicien / TS, mars I	44
18	1998	Mathématiques – Technicien / TS, mars II	46
19	1998	Mathématiques – Technicien / TS, mars III	47
20	1998	Mathématiques – Technicien / TS, mars V	50
21	1997	Mathématiques – Technicien / TS, mars	52
22	1996	Mathématiques – Technicien / TS, septembre	54
23	1996	Mathématiques – Technicien / TS, avril	57

Les corrigés présentés sont des propositions de correction, non officielles.

Nombre de sujets : 23 | Version : V1 | Générée le 21 octobre 2026

Retrouvez d'autres documents sur :

<https://bkalan.ml/api/files/WhatsApp/CONCOURS/INTERNATIONAUX/docs.html>

Vous avez des sujets ou des corrigés ? Envoyez-les-nous :

[Partager mes documents](#) 📄



**Concours EAMAC
2023**

Cycle : TECHNICIEN

Epreuve de : Mathématiques

Durée : 03 heures

Exercice 1 (5 points)

On considère une suite (u_n) vérifiant la relation de récurrence :

(E) : Pour tout n de $\mathbb{N}$ $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$

1. Montrer que, toute suite géométrique (v_n) de raison q vérifie (E) si et seulement si $q^2 = q + 1$.

(1pt)

2. Pour tout n , on définit la suite (t_n) par : $t_n = A\alpha^n + B(1 - \alpha)^n$, où $A ; B$ sont des réels et $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

a) Vérifier que $1 - \alpha = -\frac{1}{\alpha}$. **(0.5pt)**

b) Montrer que la suite (t_n) vérifie (E), **(1.pt)**

c) Déterminer A et B tels que $t_0 = 1$ et $t_1 = 3$. **(1pt)**

3. a) Justifier que $t_n = \frac{1}{2^{n+1}} \left[(1 + \sqrt{5})^{n+1} + (1 - \sqrt{5})^{n+1} \right]$ **(1pt)**

b) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{t_{n+1}}{t_n} = \alpha$. **(0.5pt)**

Exercice 2 (5 points)

On considère deux urnes U_1 et U_2 .

U_1 contient 3 boules blanches et 2 boules noires. U_2 contient 5 boules blanches et une boule noire.

L'expérience (E) consiste à tirer une boule dans chaque urne. Le tirage étant équiprobable, calculer la probabilité de tirer exactement :

1. a) deux boules blanches. **(0.75pt)**

b) deux boules noires. **(0.75pt)**

c) une boule blanche et une boule noire. **(0.5pt)**

2. On appelle A l'événement « les deux boules tirées sont de la même couleur ».

a) Démontrer que la probabilité de A est $\frac{17}{30}$. **(0.5pt)**

b) On répète l'expérience (E) 5 fois de suite en ayant soin de remettre les boules tirées après chaque tirage dans leur urne d'origine.

Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 3 fois l'événement A ? **(1pt)**

- c) On répète l'expérience (E) n fois de suite dans les mêmes conditions. Quelle est la probabilité p_n d'obtenir au moins une fois l'événement A ? **(1pt)**
- d) Trouver le plus petit entier n tel que $p_n \geq 0,999$. **(0.5pt)**

Exercice 3 (5 points)

Pour tout $n \geq 1$, on pose $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$.

1. a) Etudier le sens de variation de (I_n) **(1pt)**
 b) Justifier que (I_n) est convergente. **(0.5pt)**
2. a) Calculer I_1 . **(0.5pt)**
 b) Montrer que $\forall x \in [0 ; 1]$, on a $x^n \leq x^n e^{1-x} \leq x^n e$. **(1pt)**
 c) En déduire que $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$. **(0.5pt)**
 d) Calculer la limite de (I_n) . **(0.5pt)**
3. Utiliser une intégration par parties pour montrer que $\forall n \geq 1$, on a :
 $I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$. **(1pt)**

Exercice 4 (5 points)

On considère la fonction g définie par $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - x^2 \ln x & \text{si } x > 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$

et (C) sa courbe dans un repère orthonormal d'unité 2 cm.

1. Etudier la dérivabilité de g sur $[0 ; +\infty[$. **(0.5pt)**
2. Etudier les variations de g . **(1.5pt)**
3. a) Montrer que la restriction h de la fonction g à l'intervalle $[1 ; +\infty[$ admet une fonction réciproque h^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition. **(1pt)**
 b) Sur quel ensemble h^{-1} est-elle dérivable ? **(0.5pt)**
 c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $h^{-1}(x) = e$. **(0.5pt)**
 d) Construire la courbe de g et celle de h^{-1} (on représentera les points d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses et la demi-tangente au point d'abscisse 0. **(1pt)**

Concours EAMAC 2021	Cycle : TECHNICIEN	EPREUVE DE : MATHEMATIQUES
--------------------------------	---------------------------	---------------------------------------

Durée : 03 heures

Exercice 1 (5 pts)

On appelle f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 1 + (x - 2)\ln x$.

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

- f' désigne la fonction dérivée première de f .
 - Etudier le sens de variation de f' .
 - Déterminer les limites de f' en 0 et en $+\infty$.
- Montrer que sur IR_+^* l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique α appartenant à l'intervalle $[1,4; 1,5]$.
 - En déduire le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x .
- Etudier le sens de variation de f puis donner son tableau de variation.
- Trouver les réels x_0 pour lesquels les tangentes à C au point d'abscisse x_0 passe par le point de coordonnées (2; 0).
 - Tracer C ainsi que les tangentes à C en x_0 .

Exercice 2 (5 points)

On lance simultanément deux dés bien équilibrés, un blanc et un vert, dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On considère les évènements suivants :

B : « le numéro sorti sur le dé blanc est pair »

V : « le numéro sorti sur le dé vert est pair »

S : « la somme des numéros sortis sur les deux dés est paire ».

- Calculer la probabilité des évènements B, V et S.
- Les évènements S et V sont-ils indépendants ?
- Les évènements S et B sont-ils indépendants ?
- Les évènements S et $V \cap B$ sont-ils indépendants ?

Exercice 3 (5 pts)

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$4z^2 - 4z + 5 = 0.$$

2. On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 5 cm, les points A, B, C et D d'affixes respectives a, b, c et d définies par

$$a = \frac{1}{2}; b = \frac{1}{2} - i; c = \frac{1}{2} + i \text{ et } d = \frac{1}{2}(1 + i).$$

- a) Donner le module et un argument de d .
- b) Mettre sous forme algébrique $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ et $\frac{1}{d}$.
- c) Placer dans le plan complexe les points A, B, C, D et les points B', C' et D' d'affixes respectives $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ et $\frac{1}{d}$.
3. a) Quel est l'ensemble E des points M d'affixe $z = \frac{1}{2} + iy$ lorsque y décrit $\mathbb{R}$.
- b) Calculer le module des nombres complexes $\frac{1}{b} - 1$; $\frac{1}{c} - 1$ et $\frac{1}{d} - 1$.
- c) Calculer en fonction de y , la partie réelle X et la partie imaginaire Y du nombre complexe $Z = \frac{1}{z}$ avec z défini au point 3. a).
- d) En déduire l'ensemble F des points N d'affixe Z lorsque y décrit $\mathbb{R}$.

Construire E et F sur le graphique précédent.

Exercice 4 (5points)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie par :

$$u_0 = 15 \text{ et } u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$$

- 1) Montrer que cette suite est minorée par 4.
- 2) Préciser le sens de variation de (u_n)
- 3) Montrer que cette suite converge, puis déterminer sa limite.

S-MT-1

Concours EAMAC 2019	Cycle TECHNICIEN/ TECHNICIEN SUPERIEUR	EPREUVE DE : MATHEMATIQUES
----------------------------	---	---------------------------------------

Durée : 03h**S-MT1.1 : (5points)**

A_0 et A_1 sont les points d'abscisses respectives $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$ d'un axe. A_2 est le milieu du segment $[A_0A_1]$ et x_2 est son abscisse ; A_3 est le milieu du segment $[A_2A_1]$ et x_3 est son abscisse ;...et le processus se poursuit indéfiniment.

1°/ Quelle est l'abscisse x_n de A_n en fonction des abscisses de A_{n-1} et A_{n-2} ? **(0,5pt)**

2°/ On se propose de savoir, lorsque n est de plus en plus grand, si les points A_n s'accumulent autour d'un point unique et d'un seul. Pour cela posons pour

$$n \geq 1, y_n = x_n - x_{n-1}$$

a) Montrer que (y_n) est une suite géométrique. **(0,5pt)**

b) Montrer que $S_n = y_1 + y_2 + \dots + y_n = x_n$ **(0,5pt)**

c) Déterminer d'autre part S_n en utilisant le fait que (y_n) soit une suite géométrique. **(1,5pt)**

d) Dédurre x_n explicitement en fonction de n . **(1pt)**

e) Quelle est la limite de la suite (x_n) ? Quelle conclusion faites-vous ? **(1pt)**

S-MT1.2 : (5points)

1. Etude d'une équation de second degré.

a) Discuter suivant les valeurs du réel m , le nombre de solutions de l'équation : (E)

$$x^2 + 2x - 2m = 0. \text{ (0,5pt)}$$

b) Montrer que si $-\frac{1}{2} < m \leq 0$ alors $-2 < x' < x'' < 0$ où x' et x'' sont les solutions de (E) telles que $x' < x''$ **(0,5pt)**

c) Montrer que si $m > 0$ alors $x' < -2 < 0 < x''$ **(0,5pt)**

d) Etudier le signe de $x^2 + 2x - 2m$ suivant les valeurs du réel m **(0,5pt)**

2. Etude de la fonction $f_m : x \mapsto x + m \ln \left| \frac{x+2}{x} \right|$

a) Déterminer D le domaine de définition de f_m **(0,5pt)**

b) Calculer les limites de $f_m(x)$ aux bornes de D suivant les valeurs de m . **(0,5pt)**

c) Justifier que $f'_m(x) = \frac{x^2 + 2x - 2m}{x(x+2)}$ étudier le sens de variation de f_m dans les cas suivants : (i) $m < -\frac{1}{2}$ (ii) $m = -\frac{1}{2}$ (iii) $-\frac{1}{2} < m \leq 0$ (iv) $m > 0$. **(1pt)**

d) Tracer les courbes représentatives des fonctions $f_{-\frac{1}{4}}$ et f_2 . **(1pt)**

S-MT1.3 : (5points)

Pour tout entier naturel n on pose : $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx$ et $I_0 = \int_1^e x dx$

1. Calculer I_0 et I_1 **(0,5ptt)**

2. a) Montrer que pour tout entier n , $I_{n+1} = \frac{e^2 - (n+1)I_n}{2}$ (1) **(1ptt)**

b) En déduire I_2 **(0,5ptt)**

3. a) Justifier que pour tout n , $I_{n+1} \leq I_n$ **(1ptt)**

b) En déduire en utilisant la relation (1) l'encadrement : $\frac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+1}$ **(1ptt)**

c) Calculer les limites de I_n et nI_n lorsque n tend vers $+\infty$. **(1ptt)**

S-MT1.4 : (5points)

Un fermier possède dans sa ferme des chevaux, des vaches, des moutons et des chèvres. On désigne par x, y, z, t respectivement le nombre de chevaux, vaches, moutons et chèvres.

On suppose que les nombres x, y, z, t sont dans cet ordre, les termes consécutifs d'une suite arithmétique.

1°/ Sachant qu'il y a 5 chevaux et que le nombre total des animaux de la ferme est 56, déterminer les nombres x, y, z, t . **(1,5pt)**

2°/ Un voleur s'infiltré dans la ferme et emporte 3 des animaux. Sachant que le prix de vente des animaux est 250 000F pour un cheval, 200 000F pour une vache, 75 000F pour un mouton et 37 500F pour une chèvre, déterminer :

a) La perte minimale du fermier et la probabilité de cette perte. **(1,5pt)**

b) La perte maximale du fermier et la probabilité de cette perte. **(1pt)**

c) La probabilité que le fermier perde 150 000F. **(1pt)**

S-MT1

Concours EAMAC 2016	Cycles TECHNICIEN SUPERIEUR et TECHNICIEN	Epreuve de MATHEMATIQUES
---------------------	--	-----------------------------

Exercice MT1-1 : (3 points)

- Vérifier que pour tout réel x , on a : $\frac{1}{(1+e^x)^2} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x} - \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$.
- Calculer $I = \int_0^1 \frac{1}{(1+e^x)^2} dx$.
- Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par : $f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^3}$.
 - Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale $J = \int_0^1 \frac{xe^x}{(1+e^x)^3} dx$.

Exercice MT5- 2 (5 points)

Une maladie est apparue dans le cheptel bovin d'un pays. Elle touche 0,5% de ce cheptel.

1°) On choisit au hasard un animal dans le cheptel. Quelle est la probabilité qu'il soit malade ?

2°)

a) On choisit successivement et au hasard 10 animaux. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre d'animaux malades parmi eux. Montrer que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres. Calculer son espérance mathématique.

b) On désigne par A l'événement : « aucun animal n'est malade parmi les 10 ». On désigne par B l'événement : « au moins un animal est malade parmi les 10. ». Calculer les probabilités de A et de B .

3°) On sait que la probabilité qu'un animal ait un test positif à cette maladie sachant qu'il est malade est 0,8. Lorsqu'un animal n'est pas malade, la probabilité d'avoir un test négatif est 0,9. On note T l'événement : « avoir un test positif à cette maladie » et M l'événement : « être atteint de cette maladie ».

a) Représenter par un arbre pondéré les données de l'énoncé.

b) Calculer la probabilité de l'événement T .

c) Quelle est la probabilité qu'un animal soit malade sachant que le test est positif ?

Exercice MT1-4 : (7 points)

I. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1 - x\sqrt{1+x^2}$.

1. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation. (1point)
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $0,78 \leq \alpha \leq 0,79$.
3. En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

II. Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^3}{3} - \sqrt{1+x^2}$

(C) désigne la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm en abscisses et 5 cm en ordonnées.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et déterminer les limites de f aux bornes de cet

ensemble (1,5 point)

2. a. Calculer $f'(x)$ et montrer que pour tout réel x , $f'(x) = \frac{-xg(x)}{\sqrt{1+x^2}}$.

b. Etudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f .

3. a. Montrer que $f(\alpha) = \frac{\alpha^4 - 3}{3\alpha}$.

b. Etudier les branches infinies de (C).

4. Construire (C) (On prendra $\alpha = 0,785$).

EXERCICE MT4-3 (5pts)

1°) Donner sous forme trigonométrique les solutions de l'équation (E) :

$$z \in \mathbb{C}, \quad z^3 = 4\sqrt{2}(-1 + i).$$

2°) Calculer $(\sqrt{2} + i\sqrt{2})^3$; en déduire que l'équation précédente est équivalente à

$$\left(\frac{z}{\sqrt{2} + i\sqrt{2}} \right)^3 = 1.$$

3°) En utilisant les racines cubiques de l'unité, donner sous forme algébrique les solutions de l'équation (E).

4°) Déduire de ce qui précède les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.

CONCOURS EAMAC - mai 2015 – cycle T & TS - Mathématiques

Exercice 1 : 7 points

Une urne contient 5 boules blanches et 4 boules rouges indiscernables au toucher. On effectue 3 tirages successifs d'une boule en respectant la règle suivante : Si la boule tirée est rouge, on la remet dans l'urne. Si elle est blanche, on ne la remet pas.

On considère les événements suivants :

A= « seule la première boule tirée est blanche »

B= « seule la deuxième boule tirée est blanche »

C= « seule la troisième boule tirée est blanche »

- 1) Calculer les probabilités des événements A, B et C.
- 2) En déduire la probabilité qu'on ait tiré une seule boule blanche à l'issue des trois tirages.
- 3) Sachant que l'on a tiré exactement une boule blanche, quelle est la probabilité que cette boule ait été tirée en dernier ?

Exercice 2 : 6points

A) Soit la fonction f définie sur $]0 ; + \infty[$ par $f(x) = \frac{x^2 + 1 - \ln x}{x}$

Soit g la fonction définie sur $]0 ; + \infty[$ par $g(x) = x^2 + \ln x - 2$

- 1) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation
- 2) a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α et que $1,30 < \alpha < 1,35$.
b) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

B) Soit (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (unité graphique : 2cm)

- 1) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f .
- 2) Tracer la courbe (C) .

Exercice 3 : 4 points

Linéariser $f(x) = 4 \sin^2(x) \cos^2(x)$ et donner une primitive de f

Exercice 4 : 3 points

Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$z^2 + z - i \sin x - \frac{1}{4} = 0, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

[illegible]

Une boîte contient **12** cartons, indiscernables au toucher, portant les **12** nombres complexes du tableau précédent (Chaque carton porte un seul nombre complexe):

2. On tire au hasard un carton de la boîte (On suppose l'équiprobabilité des tirages).

a) Quelle est la probabilité de tirer un carton portant un nombre réel?

b) Quelle est la probabilité de tirer un carton portant un nombre complexe dont le module est égal à $\sqrt{2}$?

c) Quelle est la probabilité de tirer un carton portant un nombre complexe dont un argument θ est tel que: $0 \leq \theta \leq \pi/2$?

3. Un jeu consiste à tirer un carton de la boîte précédente. Si le nombre complexe inscrit sur le carton tiré est de module 3, le joueur gagne 10 000 points et le jeu s'arrête. Sinon, le carton tiré est remis dans la boîte et le joueur procède à un deuxième tirage; si ce carton porte un nombre complexe de module 3, le joueur gagne 8 000 points, s'il est de module 2, il gagne 5 000 points sinon il ne gagne rien et le jeu s'arrête.

Soit X la variable aléatoire égale au gain du joueur.

a) Donner la loi de probabilité de X (On pourra s'aider d'un arbre).

b) Calculer l'espérance mathématique de X .

Exercice 4 (points)

1) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = -x^3 - x^2 - 2x + 2$.

a) Dresser le tableau de variations de g .

b) Montrer que g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

c) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α telle que $0,6 \leq \alpha \leq 0,7$.

2) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{2xe^{-x}}{x^2 + 2}$.

a) Calculer $f'(x)$, puis vérifier que $f'(x) = \frac{2g(x)e^{-x}}{(x^2 + 2)^2}$

b) Dresser le tableau de variation de f .

c) Tracer la courbe représentative (C) de f dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ avec $\|\vec{i}\| = 1\text{cm}$, $\|\vec{j}\| = 5\text{cm}$.

3) On considère la suite numérique (U_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par :

$$U_n = \int_n^{n+1} f(t) dt.$$

On ne cherche pas à calculer l'intégrale U_n

a) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$: $0 \leq U_n \leq (1 - \frac{1}{e})e^{-n}$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

b) Déterminer un entier naturel n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $0 \leq U_n \leq 10^{-5}$.

**CONCOURS D'ENTREE AUX CYCLES DE TECHNICIEN SUPERIEUR ET
TECHNICIEN DE L'ECOLE AFRICAINE DE LA METEOROLOGIE ET DE
L'AVIATION CIVILE (EAMAC)**

SESSION 2013

EPREUVE DE : MATHEMATIQUES

DUREE : 3 HEURES

Exercice 1 (4pts)

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation suivante:

$$iz^2 - 2iz + i - 2 = 0.$$

2. Donner une écriture trigonométrique de la solution imaginaire pure.

Exercice 2 (6pts)

Le PDG d'une entreprise vous confie que pendant une période d'hivers, ses observations lui ont permis de dresser le tableau suivant, dans lequel x désigne en degrés la température moyenne extérieure au cours de 24 heures et y la consommation en fuel (exprimée en litres) de sa chaudière au cours de ces même 24 heures.

x_i	-5	-3	0	5	10
y_i	40	38	34	27	20

Le PDG vous demande:

1. De calculer le coefficient de corrélation linéaire entre x et y .
2. De déterminer par la méthode des moindres carrés, l'équation de la droite d'ajustement de y en x .
3. Quelle estimation de consommation peut-t-il faire pour la durée d'une vague de froid de température journalière de -10° pendant quatre jours?

Exercice 3 (4pts)

Déterminer les primitives des fonctions suivantes: $f(x) = \sin^3 x$ et $g(x) = \tan^4 x$.

Exercice 4 (6pts)

On considère la fonction $f(x) = x - \ln|x|$

1. Etudier les variations de cette fonction et tracer son graphique (C) . (unité graphique 1cm)
2. On coupe (C) par la droite d'équation $y = x + m$. Montrer qu'il y a toujours deux points d'intersection, M_1 et M_2 , et trouver l'ensemble des positions du milieu, I , de $[M_1M_2]$.
3. Calculer l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe (C) , la droite d'équation $y = x$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

**ENTRANCE EXAMINATION TO THE CYCLES OF TECHNICIAN
SUPERIOR AND TECHNICIAN OF THE AFRICAN SCHOOL OF
THE METEOROLOGY AND THE CIVIL AVIATION (EAMAC)**

SESSION 2013

TEST OF : MATHEMATICS

DURATION : 3 HOURS

Exercise 1 (5pts)

One considers in $\mathbb{C}$ the sequence of general term z_n defined by:

$$\begin{cases} z_0 = 1 \\ 2z_{n+1} = z_n + i \end{cases}$$

1. Show that, for each integer n , no vanishing, the module r_n of z_n is lower than 1.
2. We set $z_n = x_n + iy_n$, x_n and y_n being real numbers and $u_n = z_n - i$
 - a. Find a recurrence relation between u_{n+1} and u_n .
 - b. Deduce that the sequence (x_n) is a geometric sequence which converges towards 0 and the sequences of general terms y_n and r_n converge towards 1.
3. Calculate the minor term n_0 such that, for each n equal or higher than n_0 , one has :
 $|z_n - i| < 10^{-5}$.

Exercise 2 (4pts)

1. Solve the differential equation : $9y'' + 4y = 4\sqrt{3}$.
2. a. Determine among the solutions of this equation the solution h such that : $h'(\frac{\pi}{2}) = \frac{4}{3}$
and $h''(\frac{\pi}{4}) = \frac{4}{9}$.
b. Write $h(x)$ in the form $A + B \cos(\omega x + \varphi)$ where A, B, ω and φ are four reals that one will specify.
3. Solve in $\mathbb{R}$ the equation $h(x) = 0$.

Exercise 3 (5pts)

f is the numerical function defined on $\mathbb{R}_+^*$ by : $f(x) = \ln \left[\frac{e}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right) \right]$

One calls (C) the representative curve of f in an orthonormal reference $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. a. Study f , then show that f has a minimum; that one must specify

2. b. Show that the curve (Γ) of equation $y = \ln\left(\frac{e}{2}x\right)$ is an asymptote of the curve (C) .
 c. Draw the curves (C) and (Γ) in the same orthonormal reference $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
3. a. Establish that, for any x in $\mathbb{R}_+^*$, $f'(x) < 1$
 b. Deduce the sign of $(f(x) - x)$ and the position of the curve (C) according to the line (D) of equation $y = x$
4. a. Deduce from previous results that the sequence (u_n) which verifies :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}_+^* \\ u_{n+1} = f(u_n) = \ln\left[\frac{e}{2}\left(u_n + \frac{1}{u_n}\right)\right] \end{cases}$$

is decreasing and undervalued by 1 for starting by row $n = 1$ (for starting by row $n = 0$ if $u_0 \geq 1$).

- b. Show that the sequence (u_n) converges towards 1.

Exercise 4 (6pts)

1. A ballot box contains two white balls and n black balls, indistinguishable by touch.
 A player extracts simultaneously two balls from the ballot box and one notes A_2 the event:
 A_2 : « the player extracted two white balls ».
 Determine n so that the probability of $p(A_2)$ is equal to $1/15$.
In the following part of the exercise, we will take $n = 4$.
2. A player extracts simultaneously two balls from the ballot box and one notes :
 A_0 : « The player extracts extracts two black balls » ;
 A_1 : « The player extracts one black ball and one white ball » ;
 A_2 : « The player extracts extracts two white balls ».
 a. Calculate $p(A_0)$ and $p(A_1)$.
 b. With this pulling, the player gets three points for each white ball extracted and two points for each black ball extracted. Let X be the random variable associated to the numbers of points obtained.
 Determine the law of probability of the random variable X and calculate its mean $E(X)$.
3. After this first pulling, the player drawn back the black balls and leaves the white ones, then extracts simultaneously two balls from the ballot box.
 a. Give $p(B_0/A_2)$ and deduce $p(B_0 \cap A_2)$; Calculate $p(B_0/A_1)$ and $p(B_0 \cap A_1)$.
 Deduce that $p(B_0) = \frac{41}{75}$.
 b. Show that $p(B_2) = \frac{2}{75}$. Deduce $p(B_1)$.

CONCOURS D'ENTREE AUX CYCLES DE TECHNICIEN SUPERIEUR ET
TECHNICIEN DE L'ECOLE AFRICAINE DE LA METEOROLOGIE ET DE

L'AVIATION CIVILE (EAMAC)

SESSION 2012

EPREUVE DE : MATHEMATIQUES

DUREE : 3 HEURES

Exercice 1 (3pts)

A l'aide d'une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes:

1. $I = \int_0^1 \ln(x+1) dx$

2. $J = \int_{\frac{1}{e}}^e -\frac{\ln x}{x^2} dx$

Exercice 2 (5pts)

Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par:

$$f(z) = z^3 + (2 + 3i)z^2 + (4 + 6i)z + 8.$$

1. a. Calculer $f(i)$

b. Déterminer deux nombres complexes a et b vérifiant:

$$f(z) = (z - i)(z^2 + az + b) \text{ pour tout nombre complexe } z.$$

c. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : f(z) = 0$.

2. On désigne par z_1 la solution de (E) ayant une partie imaginaire positive, par z_2 la solution réelle et par z_3 l'autre solution.

Montrer qu'il existe un nombre complexe q tel que $z_2 = qz_1$ et $z_3 = qz_2$.

Soient A_1, A_2 , et A_3 les points du plan complexe d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3 .

Quelle est la nature du triangle $A_1A_2A_3$? (Justifier).

Exercice 3 (5pts)

Soit la suite numérique de terme général u_n , n appartenant à $\mathbb{N}^*$, définie par:

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{n+1}{2n} u_n \end{cases}$$

1. Calculer u_2, u_3 et u_4 .

2. Montrer que, pour tout entier naturel non nul, on a : $0 \leq u_{n+1} \leq u_n$

En déduire que la suite (u_n) converge.

3. a. Montrer que la suite de terme général v_n définie par $v_n = \frac{u_n}{n}$ ($n > 0$) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme v_1 .

b. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

c. En déduire également l'expression de u_n en fonction de n et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 4 (7pts)

Partie I :

Soit l'équation différentielle (1) : $y'' - 4y' + 4y = 0$.

1. Déterminer une solution de (1) de la forme $f_1(x) = e^{rx}$ où r est un nombre réel.

2. Montrer que la fonction f_2 telle que $f_2(x) = xe^{rx}$ est aussi une solution de (1) (r étant la valeur trouvée précédemment)

3. a. Vérifier que pour tout couple de réels (λ_1, λ_2) la fonction $f_\lambda = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est solution de (1).

b. Calculer λ_1 et λ_2 pour que $f_\lambda(0) = \frac{1}{2}$ et $f'_\lambda(0) = \frac{1}{2}$.

Partie II :

f et g sont les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{2x}(-x+1) \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{2}e^{-2x}(x+1)$$

(C) et (Γ) leurs courbes représentatives.

On se propose de trouver les points d'intersection de (C) et (Γ) dont l'abscisse α est strictement positive.

1. Montrer que α est nécessairement strictement inférieur à 1.

2. Soit φ une fonction de $]0, 1[$ sur $\mathbb{R}$ définie par: $\varphi(x) = -4x + \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

a. Montrer que α est solution de l'équation $\varphi(x) = 0$.

b. Étudier les variations de φ .

c. En déduire que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution qui est comprise entre 0,95 et 0,96.

3. Conclure.

**CONCOURS D'ENTREE AUX CYCLES DE TECHNICIEN
SUPERIEUR ET TECHNICIEN DE L'ECOLE AFRICAINE
DE LA METEOROLOGIE ET DE L'AVIATION CIVILE
(EAMAC)**

SESSION 2011

EPREUVE DE : MATHEMATIQUES

DUREE : 3 HEURES

Exercice 1

Soient les intégrales suivantes:

$$I = \int_0^{\pi} e^t \cos^2 t \, dt \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\pi} e^t \sin^2 t \, dt.$$

1. Calculer $I + J$ et $I - J$.
2. En déduire les valeurs de I et J .

Exercice 2

Soit f_a la fonction définie par:

$$f_a(x) = \log(x^2 - 2ax + 1),$$

où $-1 \leq a \leq 1$ et $\log$ désigne la fonction logarithme népérien. On notera C_a la courbe représentative de f_a dans un repère orthonormé.

A) Dans cette partie du problème on suppose $a = -1$.

1. Etudier les variations de f_{-1} et tracer la courbe représentative C_{-1} .
2. a) Déterminer une primitive de la fonction g définie par: $g(x) = \log(x + 1)$.
b) Calculer l'aire de l'ensemble des points de coordonnées (x, y) satisfaisant aux conditions:

$$0 \leq x \leq e - 1 \text{ et } 0 \leq y \leq f_{-1}(x).$$

B) Dans cette partie, on suppose $0 < a < 1$.

1. Déterminer le domaine de définition de f_a .
2. Etudier les variations de la fonction f_a .
3. Montrer que la courbe C_a admet la droite d'équation $x = a$ pour axe de symétrie.
4. Soit h la fonction définie par: $h(x) = 2 \log x$, $x > 0$.
Donner, selon la valeur de x , le signe de l'expression: $f_a(x) - h(x)$.
Cette expression admet-elle une limite quand x tend vers $+\infty$?
5. Tracer la courbe représentative de h et utiliser ce qui précède pour tracer $C_{\frac{2}{3}}$ dans le même repère.

C) Montrer que les courbes C_a et C_{-a} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $x = 0$.

**CONCOURS D'ENTREE AUX CYCLES DE TECHNICIEN SUPERIEUR ET
TECHNICIEN DE L'ECOLE AFRICAINE DE LA METEOROLOGIE ET DE
L'AVIATION CIVILE (EAMAC)**

SESSION 2011

EPREUVE DE : MATHEMATIQUES

DUREE : 3 HEURES

Exercice 1

Soient les intégrales suivantes:

$$I = \int_0^{\pi} e^t \cos^2 t \, dt \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\pi} e^t \sin^2 t \, dt.$$

1. Calculer $I + J$ et $I - J$.
2. En déduire les valeurs de I et J .

Exercice 2

Soit f_a la fonction définie par:

$$f_a(x) = \log(x^2 - 2ax + 1),$$

où $-1 \leq a \leq 1$ et $\log$ désigne la fonction logarithme népérien. On notera C_a la courbe représentative de f_a dans un repère orthonormé.

A) Dans cette partie du problème on suppose $a = -1$.

1. Etudier les variations de f_{-1} et tracer la courbe représentative C_{-1} .
2. a) Déterminer une primitive de la fonction g définie par: $g(x) = \log(x + 1)$.
b) Calculer l'aire de l'ensemble des points de coordonnées (x, y) satisfaisant aux conditions:
 $0 \leq x \leq e - 1$ et $0 \leq y \leq f_{-1}(x)$.

B) Dans cette partie, on suppose $0 < a < 1$.

1. Déterminer le domaine de définition de f_a .
2. Etudier les variations de la fonction f_a .
3. Montrer que la courbe C_a admet la droite d'équation $x = a$ pour axe de symétrie.
4. Soit h la fonction définie par: $h(x) = 2 \log x$, $x > 0$.
Donner, selon la valeur de x , le signe de l'expression: $f_a(x) - h(x)$.
Cette expression admet-elle une limite quand x tend vers $+\infty$?
5. Tracer la courbe représentative de h et utiliser ce qui précède pour tracer $C_{\frac{2}{3}}$ dans le même repère.

C) Montrer que les courbes C_a et C_{-a} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $x = 0$.

Correction EAMAC-2011

Correction de
Malick

⊖-H

Exercice 1 :

Soient les intégrales:

$$I = \int_0^\pi e^t \cos^2 t \, dt \quad \text{et} \quad J = \int_0^\pi e^t \sin^2 t \, dt$$

1) Calculons $I + J$ et $I - J$

$$I + J = \int_0^\pi e^t \cos^2 t \, dt + \int_0^\pi e^t \sin^2 t \, dt \Rightarrow I + J = \int_0^\pi e^t (\cos^2 t + \sin^2 t) \, dt$$

or $\boxed{\cos^2 t + \sin^2 t = 1}$ Théorème Fondamentale de la Trigo

$$\text{Donc } I + J = \int_0^\pi e^t \, dt = e^t \Big|_0^\pi = e^\pi - e^0 = e^\pi - 1$$

$$\text{d'où } \boxed{I + J = e^\pi - 1}$$

Calculons $I - J$

$$I - J = \int_0^\pi e^t \cos^2 t \, dt - \int_0^\pi e^t \sin^2 t \, dt = \int_0^\pi e^t (\cos^2 t - \sin^2 t) \, dt$$

Mettons $\cos^2 t$ et $\sin^2 t$ sous la formule de demi angle

Bonus de démonstration

On sait que $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ posons $\theta = a + b$

$$e^{i(a+b)} = e^{ia} \times e^{ib} = \cos(a+b) + i \sin(a+b)$$

$$e^{ia} = \cos a + i \sin a$$

$$\times e^{ib} = \cos b + i \sin b$$

$$e^{ia} \times e^{ib} = \cos a \times \cos b + i(\cos a \sin b) + i(\cos b \sin a) - \sin a \sin b$$

$$e^{i(a+b)} = \cos a \times \cos b - \sin a \sin b + i(\cos a \sin b + \cos b \sin a)$$

or $e^{i(a+b)} = \cos(a+b) + i \sin(a+b)$

Par Identification

$$\cos(a+b) = \cos a \times \cos b - \sin a \sin b \Rightarrow \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z')$$

$$\sin(a+b) = \cos a \sin b + \cos b \sin a \rightarrow \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(z')$$

Posons $a = b$

$$\cos(a+a) = \cos a \times \cos a - \sin a \sin a$$

$$\boxed{\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a} \text{ donc } \boxed{\cos^2 t - \sin^2 t = \cos 2t} \text{ avec } a = t$$

$$I - J = \int_0^\pi e^t (\cos^2 t - \sin^2 t) dt = \int_0^\pi e^t \cos 2t dt$$

$$I - J = \int_0^\pi e^t \cos 2t dt$$

Intégration Par Partie

$$(u \times v)' = u'v + v'u \Rightarrow v'u = (u \times v)' - u'v$$

$$\int v'u = \int (u \times v)' - \int u'v \Rightarrow \int v'u = u \times v - \int u'v$$

Posons $u = e^t \Rightarrow u' = e^t$

$$v' = \cos 2t \Rightarrow v = \frac{1}{2} \sin 2t$$

Applications

$$I - J = \int_0^\pi e^t \cos 2t \, dt = e^t \times \frac{1}{2} \sin 2t \Big|_0^\pi - \int_0^\pi e^t \times \frac{1}{2} \sin 2t \, dt$$

$$I - J = \frac{e^t \sin 2t}{2} \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \frac{e^t \sin 2t}{2} dt$$

$$\text{Notons } K = I - J \text{ et } L = \int_0^\pi \frac{e^t \sin 2t}{2} dt$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } K &= \frac{e^t \sin 2t}{2} \Big|_0^\pi - L = \frac{e^\pi \sin 2\pi}{2} - \frac{e^0 \sin 2 \times 0}{2} - L \\ &= -L \end{aligned}$$

$$L = \int_0^\pi \frac{e^t \sin 2t}{2} dt \quad \text{Intégration par Partie}$$

$$L = -e^t \frac{\cos 2t}{4} \Big|_0^\pi + \int_0^\pi e^t \frac{\cos 2t}{4} dt$$

$$L = -e^\pi \frac{\cos 2\pi}{4} + e^0 \frac{\cos 0}{4} + \frac{1}{4} \int_0^\pi e^t \frac{\cos 2t}{4} dt$$

$$\text{or } \int_0^\pi e^t \cos 2t \, dt = I - J = K \text{ donc } L = -\frac{e^\pi}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}K$$

$$-L = -\left(-\left(\frac{e^\pi - 1}{4}\right)\right) - \frac{1}{4}K \text{ or } -L = K$$

$$K = \frac{-1}{4}(-e^\pi + 1 + K) \Rightarrow -4K = e^\pi + 1 + K \Rightarrow 4K + K = e^\pi - 1$$

$$\Rightarrow K = \frac{e^\pi - 1}{5} \text{ or } K = I - J \text{ donc}$$

$$\boxed{I - J = \frac{e^\pi - 1}{5}}$$

2) En déduisons les valeurs de I et J

$$+ \begin{cases} I + J = e^\pi - 1 \\ I - J = \frac{e^\pi - 1}{5} \end{cases} \Rightarrow$$

$$2I = e^\pi - 1 + \frac{e^\pi - 1}{5} = e^\pi - 1 \left(1 + \frac{1}{5}\right) = \frac{6}{5}e^\pi - 1$$

$$I = \frac{\frac{6}{5}}{2}e^\pi - 1 = \frac{3}{5}(e^\pi - 1)$$

$$J = e^\pi - 1 - I = e^\pi - 1 - \frac{3}{5}(e^\pi - 1)$$

$$J = (e^\pi - 1) \left(1 - \frac{3}{5}\right) = \frac{2}{5}(e^\pi - 1)$$

$$\text{d'où } \boxed{I = \frac{3}{5}(e^\pi - 1)} \text{ et } \boxed{J = \frac{2}{5}(e^\pi - 1)}$$

Exercice 2 :

Soit f_a la fonction définie par

$$f_a(x) = \log(x^2 - 2ax + 1) \text{ et } -1 \leq a \leq 1$$

Partie A : On considère $a = -1$

1) Etudions les Variations de $f_{-1}(x)$ et Traçons sa Courbe

$$f_{-1}(x) = \log(x^2 + 2x + 1)$$

- Determinons Df_{-1}

$$x^2 + 2x + 1 \neq 0 \Rightarrow (x + 1)^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$$

$$Df_{-1} = \mathbb{R} - \{-1\} =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$$

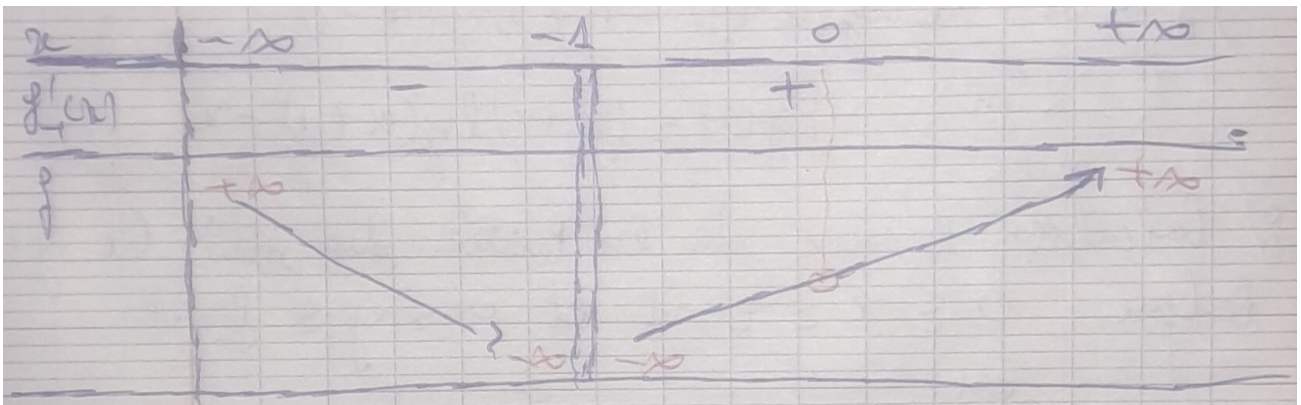
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_{-1}(x) = \log(+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f_{-1}(x) = \log(0) = -\infty$$

$$f'(x) = \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 1} = \frac{2(x + 1)}{(x + 1)^2} = \frac{2}{x + 1}$$

$$\text{Posons } \left\{ \begin{array}{l} x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1 \\ x + 1 < 0 \Rightarrow x < -1 \end{array} \right\} \quad f(0) = \log(1) = 0$$

Tableau de Variation

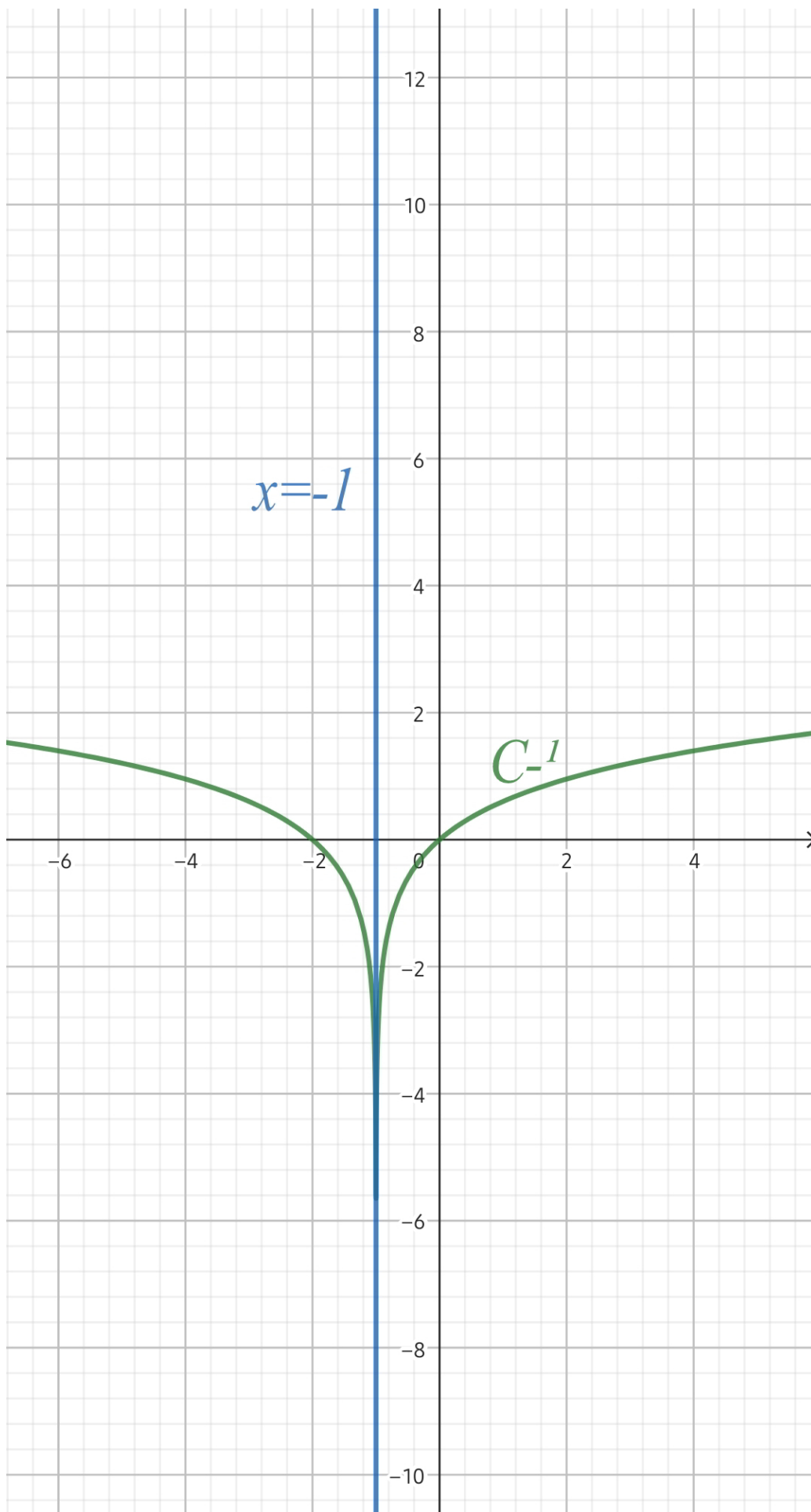


Sens de Variation

$\forall x \in]-\infty; -1[$ f est décroissante

f s'annule en 0 $f(0) = 0$

$\forall x \in]-1; +\infty[$ f est croissante



2) a) Determinons une primitive de g définie

$$g(x) = \log(x + 1)$$

$$\int g(x) dx = \int \log(x + 1) dx$$

Intégration Par Partie

Derivée	Primitive
1	~~$\log(x+1)$~~
$\frac{1}{x+1}$	$\log(x+1)$

$$x \Rightarrow \int g(x) = x \log(x+1) - \int \frac{x}{x+1} dx$$

$$\int \frac{x}{x+1} = \int \frac{x+1-1}{x+1} = \int 1 - \frac{1}{x+1} = x - \log(x+1)$$

$$\int g(x) dx = x \log(x+1) - x + \log(x+1)$$

d'où $\int g(x) = (x+1) \log(x+1) - x$

b) Calculons l'aire de la Partie des points (x, y)

telque $0 \leq x \leq e-1$ et $0 \leq y \leq f_{-1}(x)$

$$\text{Aire} = \int_0^{e-1} f_{-1}(x) dx \mu A = \int_0^{e-1} \log(x^2 + 2x + 1) dx \mu A$$

$$\text{or } \begin{cases} x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 \\ \log(x+1)^2 = 2 \log(x+1) = 2g(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Aire} = \int_0^{e-1} 2g(x) \, dx \, \mu A = 2 \int_0^{e-1} g(x) \, dx \, \mu A$$

$$= 2 [(x+1) \log(x+1) - x]_0^{e-1} \, \mu A$$

$$= 2 \{ [(e-1+1) \log(e-1+1) - (e-1)] - 0 \} \, \mu A$$

$$= 2e \log(e) - e + 1 \, \mu A \simeq 0,6427 \, \mu A$$

alors $\text{Aire} \simeq 0,6427 \, (\mu A)$

Partie B : On considère $0 < a < 1$

Déterminons $Df_a(x)$

$$f(x) = \log(x^2 - 2ax + 1) = \log(x^2 - 2ax + 1 + a^2 -$$

$$\log(x^2 - 2ax + a^2 + (1 - a^2)) = f(x)$$

$$f(x) = \log((x - a)^2 + (1 - a^2))$$

or $0 < a < 1$

$$0 < a^2 < 1$$

$$-1 < a^2 < 0$$

$$0 < 1 - a^2 < 1 \text{ or } \forall a \in]0; 1[, a^2 \neq 0$$

$$\Rightarrow 1 - a \simeq a \Rightarrow f(x) = \log(x - a^2) \text{ CQFD}$$

$$f_a(x) = \log(x^2 - 2ax + 1) = \log(x - a)^2 = 2\log(x - a)$$

Posons $x - a \neq 0 \Rightarrow x \neq a$; $Df = \mathbb{R} - \{a\}$

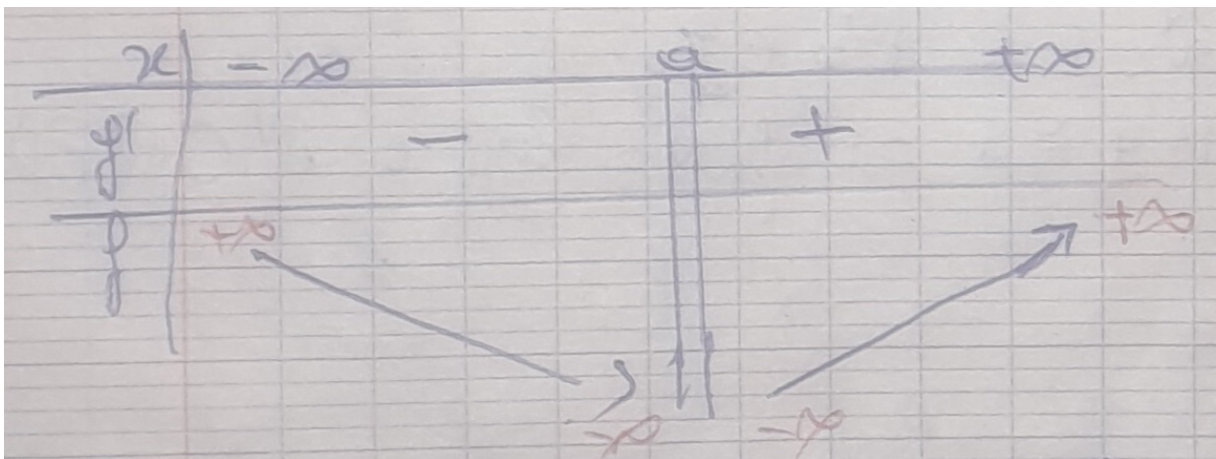
$$Df =]-\infty; a[\cup]a; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_a(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f_a(x) = \log(\mp\infty - a)^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f_a(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f_a(x) = \log(a - a)^2 = -\infty$$

2°) Sens de Variation

$$f'(x) = \frac{2x - 2a}{(x - a)^2} = \frac{2}{(x - a)^2} \quad \left| \begin{array}{l} x - a > 0 \Rightarrow x > a \\ x - a < 0 \Rightarrow x < a \end{array} \right.$$



$\forall x \in]-\infty; a[$ f est décroissante

$\forall x \in]a; +\infty[$ f est croissante

3°) Montrons que la droite $x = a$ est axe de symétrie à C_a

$$\begin{aligned}f_a(2a - x) &= \log \left((2a - x)^2 - 2a(2a - x) + 1 \right) \\&= \log \left(4a^2 - 4ax + x^2 - 4a^2 + 2ax + 1 \right) \\&= \log \left(x^2 - 2ax + 1 \right)\end{aligned}$$

$f(2a - x) = f_a(x)$ alors la droite $x = a$ est
axe de symétrie à C_a

4. Soit $h(x) = 2 \log x$; $x > 0$

Donnons selon les valeurs de x le signe de $f_a(x) - h(x)$

1^{er} cas : $f_a(x) - h(x) < 0$

$$\begin{aligned}f_a(x) - h(x) < 0 &\Leftrightarrow \log \left(x^2 - 2ax + 1 \right) - 2 \log x < 0 \\&\Leftrightarrow \log \left(x^2 - 2ax + 1 \right) < \log x^2 \\&\Leftrightarrow x^2 - 2ax + 1 < x^2 \\&\Leftrightarrow -2ax + 1 < 0 \Rightarrow 2ax - 1 \geq 0 \\&\Leftrightarrow 2ax \geq 1 \Rightarrow x > \frac{1}{2a} \text{ or } a \geq 0 \text{ car } 0 < a < 1\end{aligned}$$

$\text{alors } \forall x \in \left] \frac{1}{2a}; +\infty \right[\quad f_a(x) - h(x) < 0$

$$2^{\text{ème}} \text{ cas : } f_a(x) - h(x) \geq 0 \Rightarrow x < \frac{1}{2a}$$

$\text{alors } \forall x \in \left] -\infty; \frac{1}{2a} \right[\quad f_a(x) - h(x) \geq 0$

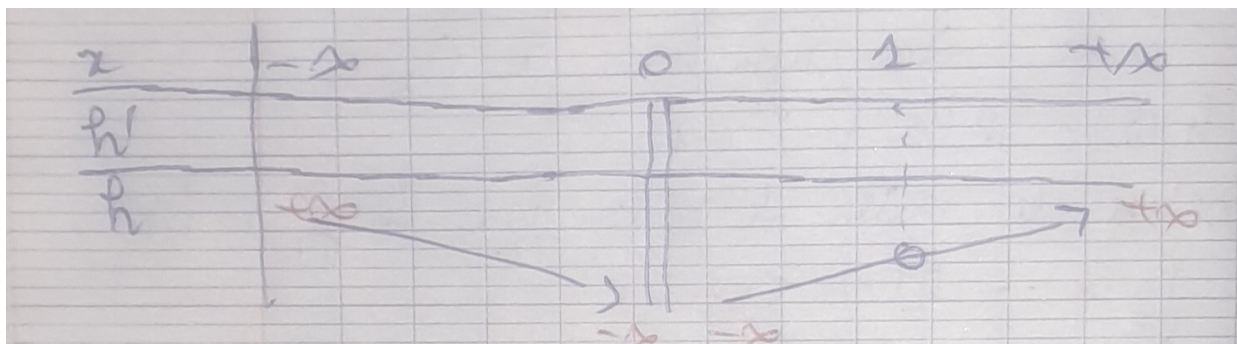
$$3^{\text{ème}} \text{ cas : } f_a(x) - h(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2a} \text{ alors } f_a(x) - h(x) = 0$$

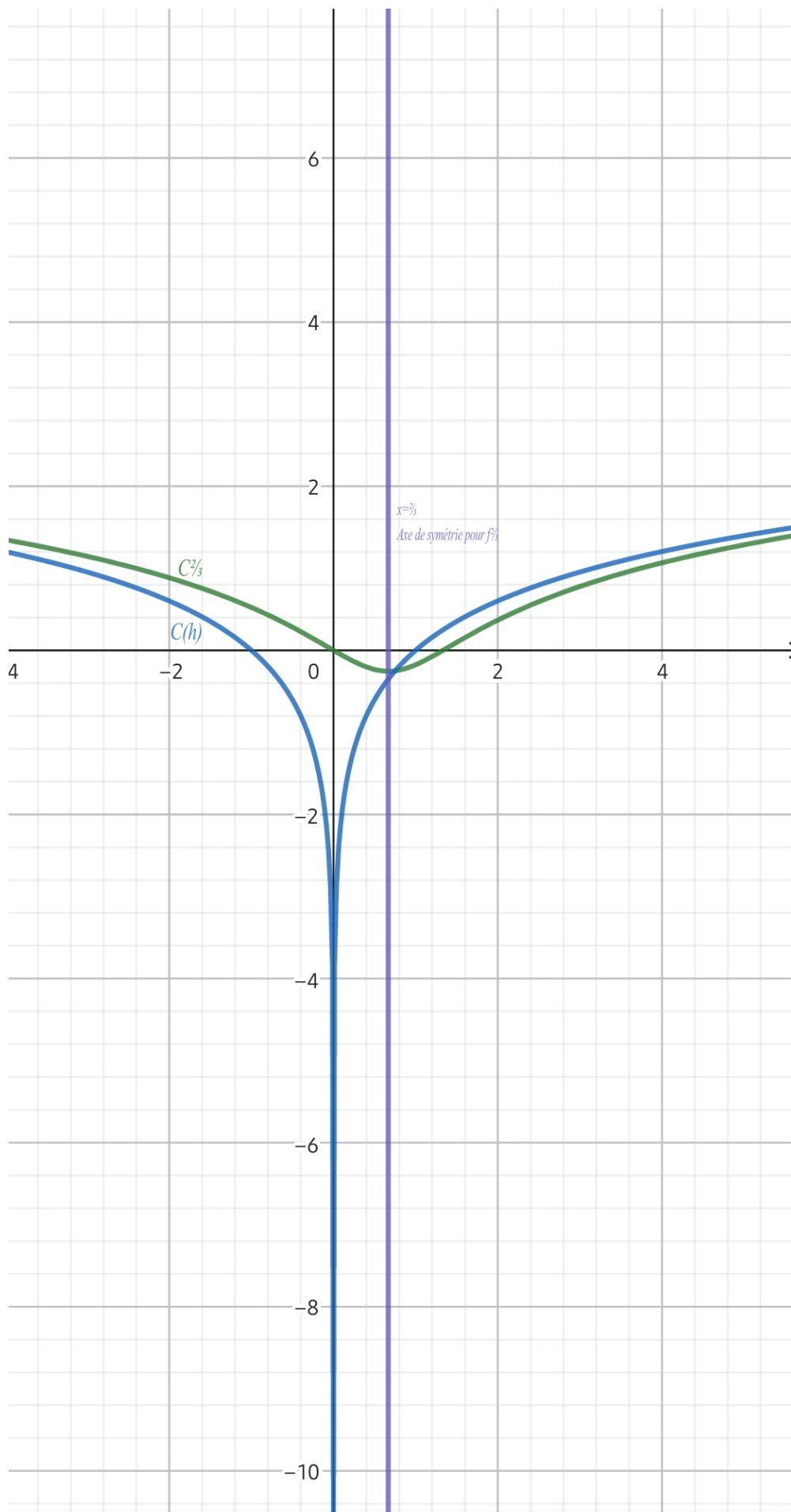
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_a(x) - h(x) = \infty$ Alors elle admet ∞
comme limite a $+\infty$

5°) Traçons la courbe de h

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} h(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = -\infty$

$$h'(x) = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$$





C) Montrons que C_a et C_{-a} sont symétrique par rapport à $x = 0$

$$\begin{array}{l|l} f_a(x) = \log(x^2 - 2ax + 1) & C_a \text{ et } C_{-a} \text{ sont} \\ f_{-a}(x) = \log(x^2 + 2ax + 1) & \text{symétrique si et seulement} \\ & \text{si} \end{array}$$

$$2a - x = 2(0) - x = -x \Rightarrow \begin{cases} f_a(-x) = f_{-a}(x) \\ f_{-a}(-x) = f_a(x) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f_a(-x) &= \log(x^2 + 2ax + 1) = f_{-a}(x) \\ f_{-a}(-x) &= \log(x^2 - 2ax + 1) = f_a(x) \end{aligned}$$

alors C_a et C_{-a} sont symétrique par rapport à
 $x = 0$

8) Soit D la droite d'équation $y = x + m$, m étant un paramètre réel non nul.

Déterminer les points d'intersections entre D et (Γ) .

CONCOURS D'ENTREE A L'EAMAC 2010			
CYCLE : Technicien supérieur	Epreuve : Mathématiques	Session : 2010	Durée : 3 heures

Exercice 1 :

Soit z_1, z_2, z_3 et z_4 quatre nombre complexe non nul dont les modules forment une suite géométrique et leur argument forme une suite arithmétique.

Déterminer z_1 et z_3 sachant que $z_1 = \sqrt{2}$ et $z_4 = 4i$

Exercice 2 :

On considère l'équation d'inconnu réel x définie par : (E) : $x^4 + (1 - 2a)x^2 + a^2 - 1 = 0$ où a est un réel. Pour quelle valeur du paramètre a l'équation (E) :

1. Ne possède pas de solution ?
2. possède une seule solution ?
3. possède deux solutions ?
4. possède trois solutions ?
5. possède quatre solutions ?

Exercice 3 :

Soit f_b la fonction définie par $f_b(x) = x + b(x + 1)e^{-x}$ où b est un paramètre réel. On note C_b la courbe représentative de f_b

1. montrer que toutes les courbes C_b passent par un point fixe dont on donnera les coordonnées. Et qu'elles possèdent une asymptote commune (Δ) puis préciser la position de la courbe C_b par rapport à cette asymptote.

2. Déterminer par son équation l'ensemble (Π) des points de C_b où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

3. On pose $b = e$, $\ln e = 1$.

a. Etudier les variations de f_e et construire C_e .

b. Soit $m \in \mathbb{R}_+^*$ et $D(m) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq m \text{ et } x \leq y \leq f_e(x)\}$. Calculer l'aire $S(m)$ de $D(m)$ puis déterminer de $S(m)$ lorsque m tend vers $+\infty$.

**CONCOURS D'ENTREE AU CYCLE DE TECHNICIEN SUPERIEUR
DE L'ECOLE AFRICAINE DE LA METEOROLOGIE ET DE L'AVIATION
CIVILE (EAMAC)**

SESSION 2009

EPREUVE DE : MATHEMATIQUES

DUREE : 3 HEURES

Exercice 1

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $|2 + 5iz - z^2| + z^2 + 3 = 0$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation: $\sqrt{1 + \log_{0,04} x} + \sqrt{3 + \log_{0,2} x} = 1$.

Exercice 2

Un jeu réunissant n personnes (n entier supérieur ou égal à 3) comporte des parties successives. Dans chaque partie, les n joueurs jettent simultanément une pièce de monnaie. (Dans chaque jet, on supposera égales les probabilités des résultats "pile" et "face".)

Si toutes les pièces sauf une donnent le même résultat (par exemple : "face" pour $n - 1$ pièces, et "pile" pour une pièce), le joueur ayant obtenu le résultat singulier est déclaré "perdant".

1. Quelle est la probabilité p pour que cette circonstance se produise dans une partie donnée?
2. Calculer en fonction de ce nombre p la probabilité p_k pour que l'on obtienne un perdant pour la première fois à la $k^{\text{ième}}$ partie. Soit K un entier naturel supérieur à 1. Calculer la somme $S_K = p_1 + p_2 + \dots + p_K$.

- Montrer que, lorsque K tend vers $+\infty$, S_K tend vers une limite.

Exercice 3

Soit f la fonction numérique définie par:

$$f(x) = x + \log \left| \frac{x-2}{x+2} \right|.$$

- 1) Déterminer son domaine de définition et sa parité.
- 2) Etudier les variations de f .
- 3) On désigne par (Γ) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $x'Ox$ et $y'Oy$. Etudier les asymptotes de (Γ) . On précisera l'équation de chaque asymptote.
- 4) Quelle est la tangente à (Γ) à l'origine du repère?
- 5) Tracer (Γ) .
- 6) Calculer l'aire $S(\lambda)$ du domaine du plan limité par la courbe (Γ) , la droite $x'Ox$ et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = 0$, où $-2 < \lambda < 0$.
- 7) Calculer $\lim_{\lambda \rightarrow -2} S(\lambda)$.
- 8) Soit D la droite d'équation $y = x + m$, m étant un paramètre réel non nul. Déterminer les points d'intersection entre D et (Γ) .

CONCOURS D'ENTÉE AU CYCLE DE TECHNICIENS SUPÉRIEUR
DE L'ÉCOLE AFRICAINE DE LA MÉTÉOROLOGIE
ET DE L'AVIATION CIVILE
SESSION 2008
ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
DURÉE : 3 HEURES

Exercice 1

Soit un plan affine rapporté à un repère orthonormé $O, \vec{u}, \vec{v}$: 4 cm. Au point M d'affixe $z = x + iy$ est associé s'il existe un point M' d'affixe

$$z' = \frac{z + \bar{z} - i}{z - iz}.$$

1. On définit ainsi les fonction f et T telles que : $z' = f(z)$, $M' = T(M)$. Préciser les ensemble de définition de f et T ;
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$:
$$f(z) = i ;$$
3. Calculer (x', y') , coordonnées de M' en fonction de (x, y) , coordonnées de M ;
4. Déterminer et représenter l'ensemble des points M tels que M' ait une affixe imaginaire pur ;
5. Démontrer que si $\|z\| = \sqrt{2}$, alors :

$$4y^2 - 8xy - 1 = 0.$$

Exercice 2

1. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \frac{1}{3}(n^2 + n).$$

- a) calculer u_1, u_2 et u_3 . Calculer u_n et u_{n+1} en fonction de n ,
- b) en déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique dont on précisera la raison ;
2. On considère la suite v_n définie par $v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P_n = v_0 \times v_1 \times \cdots \times v_n = \frac{1}{3^{n^2+n}} ;$$

- a) calculer v_1, v_2 et v_3 . Calculer v_n et v_{n-1} en fonction de n ,
- b) en déduire que est une suite v_n géométrique dont on précisera et la raison.

Exercice 3

On considère la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = \frac{x \ln x}{(x^2 + 1)^2}.$$

1. Quel est le domaine de définition E de f ?
2.
 - a) déterminer la fonction dérivée de f ,
 - b) montrer que la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x) = 0$ se ramène à la recherche des points d'intersection de la courbe Γ_1 d'équation $y = \ln x$ et de la courbe Γ_2 d'équation $y = \frac{1+x^2}{3x^2-1}$,
 - c) tracer Γ_1 et Γ_2 sur un même graphique, et deux réels x_1 et x_2 tels que

$$f'(x_1) = f'(x_2) = 0,$$

- d) montrer que :

$$0 < x_1 < \frac{1}{\sqrt{3}} < x_2 < 2 ;$$

3. Étudier le sens de variations de f ;
4. Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x};$$

5. Représenter graphiquement la courbe f . On précisera les points d'abscisses respectives 1, 2, 3 et 4 (On prendra pour unités : 2 cm en abscisse, 20 cm en ordonnée).

EAMAC				ASECNA
CONCOURS D'ENTREE A L'EAMAC 2003				
Niveau : Techniciens - Contrôleurs Techniciens supérieurs	Option : EI-NA-MTO	Epreuve : Mathématiques	Session : juillet 2003	Durée : 3 heures

Notation des réponses

- Réponse exacte : +1 points
- Réponse erroné : -1/2 point
- Absence de réponse : 0 point

Indication : Les réponses aux questions doivent être portées sur les feuilles d'examen

Exercice I :

Soit U_n la suite numérique définie par : $U_1 = 1$; $3nU_{n+1} = 2(n+1)U_n$, $n > 2$.

Question n°1 :

On pose $V_n = \frac{U_n}{n}$, pour $n \geq 1$; V_n étant une suite :

A) Arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $V_1 = 1$

B) Géométrie de raison $q = \frac{2}{3}$ et de premier terme $V_0 = 1$

C) Géométrie de raison $q = \frac{2}{3}$ et de premier terme $V_1 = 1$

Question n°2 :

L'Expression de V_n en fonction de n est :

A) $1+2n$ B) $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ C) $\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ D) Autres

Question n°3 :

L'Expression de U_n en fonction de n est :

A) $n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ B) $n\left(\frac{2}{3}\right)^n$ C) $n + 2n^2$ D) Autres

Question n°4 :

L'Expression de $\sum_{k=1}^n v_k$ est :

- A) $n(n-1) \left[\frac{1}{2} + \frac{2n+3}{3} \right]$ B) $2 \left(1 - \left(\frac{2}{3} \right)^{n+1} \right)$ C) $3 \left(1 - \left(\frac{2}{3} \right)^{n+1} \right)$ D) Autres

Question n°5 :

Soit la suite W_n définie par : $W_1 = 0$; $W_n = nU_n - \frac{2}{3(n-1)}U_{n-1}$, $n \geq 2$.

Quelle est l'expression de W_n en fonction de n ?

- A) $n(n+1) \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1}$, $n \geq 1$ B) $n(n+1) \left(\frac{2}{3} \right)^n$, $n \geq 1$
C) $(n-1)(n+1) \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1}$, $n \geq 1$ D) Autres

Question n°6 :

Soit la suite T_n définie par : $T_1 = 3$; $T_n = \frac{1}{2(n-1)} \frac{W_n}{V_n} + 2$, $n \geq 2$.

Quelle est l'expression de la somme $\sum_{k=2}^n T_k$?

- A) $\frac{n}{4}(n+11)+3$ B) $\frac{n}{4}(n+11)-3$
C) $\frac{n}{4}(n-11)+3$ D) Autres

Exercice II :

Soit P un polynome de $\mathbb{R}_4[X]$ définie par : $P(X) = X^4 + \frac{1}{3}X^3 - \frac{17}{3}X^2 + \frac{19}{3}X - 2$.

Question n°7 :

Déterminer la valeur de $P\left(\frac{2}{3}\right)$:

- A) $\frac{24}{81}$ B) $-\frac{12}{81}$ C) 0 D) Autres

Question n°8 :

Déterminer la valeur de $P(1)$:

- A) $\frac{4}{3}$ B) 0 C) $\frac{14}{3}$ D) Autres

Question n°9 :

Solution de l'équation $P(X) = 0$:

- A) $X = -3$ ou $X = \frac{2}{3}$ ou $X = 1$ B) $X=3$ ou $X = \frac{2}{3}$ ou $X=1$
C) $X=3$ ou $X = -\frac{2}{3}$ ou $X=1$ D) Autres

Question n°10 :

Solution de l'équation : $(\ln X)^4 + \frac{1}{3}(\ln X)^3 - \frac{17}{3}(\ln X)^2 + \frac{19}{3}(\ln X) - 2 = 0$.

- A) $X=e^{-3}$ ou $X = e^{\frac{2}{3}}$ ou $X=e$ B) $X = e^3$ ou $X=e^{\frac{2}{3}}$ ou $X=e$
C) $X = e^3$ ou $X = e^{-\frac{2}{3}}$ ou $X=e$ D) Autres

Question n°11 :

Solution de l'équation : $X^{16} + \frac{1}{3}X^{12} - \frac{17}{3}X^8 + \frac{19}{3}X^4 - 2 = 0$.

- A) $X = \sqrt{3}$ ou $X = 1$ B) $X = \sqrt{-3}$ ou $X = \sqrt[4]{\frac{2}{3}}$ ou $X = 1$
C) $X = \sqrt[4]{3}$ ou $X = \sqrt[4]{\frac{2}{3}}$ ou $X=1$ D) Autres

AOUT 1998 I

I - Etudier la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que :

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 3x + 2}$$

(Représentation graphique sur du papier millimétré unité : 1cm)

II - Soit a un nombre réel strictement positif. Soit ABC le triangle tel que

$$AB = 3a ; AC = 4a ; BC = 5a$$

1°) Déterminer le barycentre des points A, B, C affectés respectivement des coefficients :

$$A(-5) ; B(4) ; C(3)$$

2°) Déterminer l'ensemble des points M du plan (euclidien) du triangle ABC tels que, k désignant un nombre réel donné, l'on ait :

$$4MB^2 + 3MC^2 - 5MA^2 = ka^2$$

Discuter. Envisager le cas $k=12$.

III - Soit l'équation du second degré en t (nombre réel) :

$$t^2 - 2(x+1)t + y + x^2 = 0 \quad (1)$$

où t désigne l'inconnue et x, y les coordonnées d'un point M dans un repère cartésien donné $\{ O; \vec{i}; \vec{j} \}$ orthonormé.

1°) Etablir la relation qui doit lier x et y pour que l'équation (1) admette deux racines égales. Quelle est l'équation de l'ensemble (C_1) des points M pour lesquels l'équation (1) a ses racines égales. Construire (C_1) .

2°) Dans quelles régions du plan euclidien (P) doit être situé M pour que l'équation (1) ait deux racines distinctes ?

3°) Quelle est l'équation de l'ensemble (C_2) des points M pour lesquels l'équation (1) associée possède, au moins, une racine nulle ?

Construire (C_2) dans le repère $\{ O; \vec{i}; \vec{j} \}$. Démontrer que (C_1) et (C_2) sont tangentes.

4°) Quelle est l'équation de l'ensemble (C_3) des points M pour lesquels l'équation (1) associée admet deux racines opposées ?

Construire (C_3) dans le repère $\{ O; \vec{i}; \vec{j} \}$. Préciser l'intersection de (C_1) , (C_2) et (C_3) .

5°) Discuter, suivant la position du point M relativement aux courbes (C_1) , (C_2) et (C_3) , l'existence et le signe des racines de l'équation (1) associée.

MARS 1998 I

I - Etudier la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que :

$$f(x) = \frac{2x^2 - 7x + 5}{x^2 - 5x + 7}$$

(Représentation graphique sur du papier millimétré unité : 1cm)

II - Soit E l'espace euclidien. Soient A et B deux points distincts de E .
Soit C le milieu du segment $[AB]$.

Etudier suivant les valeurs des nombres réels m et k l'ensemble des points M de E tels que :

$$MA^2 + m MB^2 - 2MC^2 = k$$

Examiner le cas $m = 3$ et $AB^2 = 1$

III - 1°) Etudier la fonction numérique f telle que

$$f(x) = 4x^3 - 3x - 1$$

2°) Construire dans un repère orthonormé $\{O; \vec{i}; \vec{j}\}$, la courbe (C) d'équation :

$$f(x) = 4x^3 - 3x - 1$$

(unité de longueur : 2 cm)

3°) Ecrire l'équation de la droite (D) qui passe par le point $A(x=1 ; y=0)$ et qui a pour pente le réel m . Discuter, lorsque m varie, le nombre des points d'intersection de la droite (D) et de la courbe (C).

4°) Lorsqu'il existe trois points d'intersection, on les désigne par A , M' , M'' . Calculer en fonction de m , les coordonnées (x,y) du point N , conjugué harmonique de A par rapport à M' et M'' .

Montrer qu'il existe une relation, indépendante de m , de la forme $y=g(x)$ entre x et y .

Construire dans le repère $\{O; \vec{i}; \vec{j}\}$ la courbe (C_1) d'équation $y=g(x)$ et en déduire l'ensemble des points N lorsque m varie.

5°) Les courbes (C) et (C_1) sont elles tangentes au point A ?

EXERCICE 1

- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 4 \frac{e^x}{e^x + 1}$$
 - On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un plan rapporté à un repère orthonormal. $(O, \vec{i}, \vec{j})$
- 1) Déterminer les limites de $f(x)$ quand $x \rightarrow -\infty$ puis quand $x \rightarrow +\infty$. En déduire les asymptotes à (C).
 - 2) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation
 - 3) Démontrer que le point d'intersection A de (C) et de l'axe des ordonnées est centre de symétrie pour (C).
 - 4) Donner une équation de la tangente à (C) en A.
 - 5) Tracer sur un même graphique : la courbe (C), sa tangente au point A et ses droites asymptotes.

EXERCICE 2

- Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :
- $$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \ln x - \frac{1}{3}$$
- 1)
 - a) Etudier les variations de f .
 - b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
 - c) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ (On pourra mettre x^3 en facteur dans l'expression de $f(x)$).
 - 2) Construire dans un repère orthogonal (unités : 10 cm en abscisse, 5 cm en ordonnée) la courbe représentative (C) de f sur l'intervalle $]0; 1[$.
 - 3) Soit λ un réel strictement positif.
 - a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_{\lambda}^1 \ln t \cdot dt$
 - b) En déduire $I(\lambda) = \int_{\lambda}^1 f(t) \cdot dt$. Donner une interprétation graphique du résultat.
 - c) Déterminer $\lim_{\lambda \rightarrow 0} I(\lambda)$.

Soit u un nombre complexe différent de (-1) , de module 1 et d'argument 0.

- 1) Calculer le module et un argument du nombre complexe

$$\frac{1 - u}{1 + u}$$

- 6) En déduire le module et un argument du nombre complexe z tel que :

$$\frac{2 + iz}{2 - iz} = u$$

- 7) Résoudre dans le corps des nombres complexes l'équation

$$(2 + iz)^5 = (2 - iz)^5$$

Problème

- On note f_0 la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+$ par
 $\forall x \in \mathbb{R}_+, f_0(x) = e^{-x}$
- Pour tout réel α strictement positif, on note f_α la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\begin{cases} f_\alpha(0) = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, f_\alpha(x) = x^\alpha \cdot e^{-x} \end{cases}$$
- Pour tout réel α positif, on notera (C_α) la courbe représentative de f_α dans un plan rapporté à un repère orthonormal.

A -/

- 1)
 - a) Etudier les variations de f_0 et de f_1 .
 - b) Représenter les courbes (C_0) et (C_1) sur une même figure (unité = 5 cm).
 On précisera la position de (C_0) par rapport à (C_1) .
- 2) Soit α un réel strictement positif et différent de 1.
 - a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f_α en 0.
 - b) Etudier les variations de f_α .
- 3) Soit α un réel strictement positif.
 - d) Préciser les positions relatives sur $\mathbb{R}_+^*$ de (C_0) et (C_α) .
 - e) Soit 2 réels α et β tels que $0 < \alpha < \beta$
 - i. Préciser les positions relatives sur $\mathbb{R}_+^*$ de (C_α) et (C_β) .
 - ii. Démontrer que toutes les courbes (C_α) passent par un même point et déterminer une équation de la tangente à la courbe (C_α) en ce point.
- 8) Représenter les courbes $(C_{\frac{1}{2}})$ et (C_e) sur une même figure (unité=5 cm), distincte de celle demandée à la question 1).
- 9) α étant un réel strictement positif, soit g_α la restriction de f_α à l'intervalle $[\alpha; +\infty[$.
 - a) Démontrer que g_α admet une fonction réciproque h_α .
 - b) On précisera l'ensemble de définition de h_α , le sens de variation de h_α , ainsi que les propriétés de continuité et de dérivabilité de h_α .

- c) Représenter graphiquement la courbe représentative de $h_{\frac{1}{2}}$ sur la même figure qu'à la question 4).

B -/

Dans cette partie, on suppose que $\alpha = n$ est un entier naturel.

On considère la fonction F_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, F_n(x) = \int_0^x f_n(t).dt$$

- 1) Calculer $F_0(x)$ et $F_1(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+$ et déterminer les limites des fonctions F_0 et F_1 lorsque $x \rightarrow +\infty$.
- 2) Pour $n \geq 1$ montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+, F_n(x) = -x^n e^{-x} + n.F_{n-1}(x)$.
- 3) A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, la fonction F_n admet une limite finie lorsque $x \rightarrow +\infty$. On notera cette limite u_n .
Quelle relation existe-t'il entre u_n et u_{n-1} ?
En déduire la valeur de $u_n \forall n \in \mathbb{N}$.
- 4) Pour $\forall n \in \mathbb{N}^*$ étudier les variations de F_n . On donnera l'allure de la courbe représentative de F_3 .
- 5)
 - a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{F_n(1)}{n!} = -\frac{e^{-1}}{n!} + \frac{F_{n-1}(1)}{(n-1)!}$$
 - b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{F_n(1)}{n!} = 1 - e^{-1} \left(\sum_{p=0}^n \frac{1}{p!} \right)$$
 - c) En utilisant une majoration de $f_n(t)$ sur l'intervalle $[0,1]$ pour $n \geq 1$ montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq F_n(1) \leq \frac{1}{e}$
 - d) A l'aide de 5)b) et 5)c) en déduire la limite de $\sum_{p=0}^n \frac{1}{p!}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$

Exercice

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A , B et C d'affixes respectives a, b et c telles que :

$$a = i - 1 \quad b = 1 + i \quad c = -1 + i$$

On note Γ le cercle de diamètre $[AB]$

- 1)
 - a) Placer sur une figure les points A , B , C et le cercle Γ .
 - b) Mettre les nombres complexes a, b et c sous forme trigonométrique.
 - c) Soit R la rotation de centre O telle que $R(A) = B$.
Déterminer l'angle de R et le point $R(B)$, image de B par R .
 - d) Déterminer l'image Γ' du cercle Γ par R ; placer Γ' sur la figure.
- 10) On considère un nombre $\theta \in [0; 2\pi[$ distinct de π .
On note M le point d'affixe $z = 1 + i.e^{i\theta}$.
On désigne par M' l'image de M par R et on appelle z' l'affixe de M' .
 - a) Montrer que M est un point Γ distinct de A et B .
 - b) Exprimer z' en fonction de z .
Calculer en fonction de θ les affixes u et u' des vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BM'}$.
 - c) Etablir la relation $u = u' . \tan \frac{\theta}{2}$.
 - d) Prouver que les points B , M et M' sont alignés.
Placer sur la figure un point M et son transformé M' .

Problème

Soit $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f_n(x) = (x^2 - 2x)^n$$

- 1) Etudier le sens de variation de f_n .suivant les valeurs de n .
- 2) Soit (C_n) la courbe représentative de f_n .dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Montrer que (C_n) possède un axe de symétrie parallèle à $(O, \vec{j})$ et que (C_n) passe par quatre points dont les coordonnées (que l'on calculera) ne dépendent pas de n .

3) Tracer dans un même repère les courbes (C_2) et (C_7) .

4) On pose $I_k = \int_0^2 x^{7-k}(x-2)^{7+k}.dx$ où $k \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$.

f) Calculer I_7

g) En intégrant par parties, trouver une relation de récurrence entre I_k et I_{k+1} pour $k \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

En déduire I_0 .

h) Calculer l'aire de la partie D du plan définie par :

i)
$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ f_7(x) \leq y \leq 0 \end{cases}$$

Première Partie:

Exercice 1

(5 points)

1°) L'intégrale: $\int_0^{\infty} (\sqrt{1+x^2} - \sqrt[3]{1+x^3}) dx$ est elle convergente?

2°) Avec $\phi(x) = x.e^{-x}$, étudier la convergence des 3 séries numériques:

$$u_n = \phi(n), \quad v_n = \phi(-n), \quad w_n = \phi\left(\frac{1}{n}\right).$$

En cas de convergence, calculer la Somme.

3°) Discuter suivant les valeurs du réel α la convergence de la série numérique de terme général:

$$u_n = \left(1 - \alpha \cdot \frac{\log n}{n}\right)$$

Exercice 2:

(5 points)

1°) Intégrer l'équation différentielle (1): $(x^2 - y^2)y' = 2xy$.

2°) Le plan affine euclidien étant rapporté à un repère orthonormé, indiquer la nature géométrique des courbes intégrales de (1).

3°) On appelle ζ la courbe intégrale passant par le point de coordonnée $x=1$ et $y=1$.

Déterminer le réel $b \in [0,1]$ de façon à ce que la plus petite des aires limitées par ζ et la droite $y=b$ soit égale à 1.

On donnera de b , une valeur approchée à 10^{-2} près.

Deuxième partie:

Exercice 1:

On considère l'ensemble E des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, où a, b, c appartiennent à $\mathbb{R}$ avec $a^2 + bc > 0$.

On pose $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\delta = \sqrt{a^2 + bc}$

Pour $A \in E$, on note U_A , l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est A .

1°) Pour $A \in E$ et $n \in \mathbb{N}$ calculer A^n (On pourra l'exprimer à l'aide de A , I , n et δ).

2°) On forme les sommes: $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{A^{2k+1}}{(2k+1)!}$ et $C_n = \sum_{k=0}^n \frac{A^{2k}}{(2k)!}$ (avec $0!=1$).

Montrer que S_n et C_n peuvent s'écrire sous la forme:

$S_n = XU_n$ et $C_n = YV_n$ où X et Y sont des matrices et U_n et V_n les termes généraux de 2 suites numériques que l'on précisera.

3°) On désigne par F , le sous ensemble de E constitué des matrices A telle que U_A ait pour valeur propres:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

4°) E et F sont ils des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel des matrices carrée d'ordre 2 à coefficients réels.

Exercice 4:

1°) Déterminer les racines réelles du polynôme $P(x)=x^6-14x^4+49x^2-36$.

2°) décomposez en éléments simples sur $\mathbb{R}$, la fraction rationnelle:

$$F(X) = \frac{-12x}{x^6 - 14x^4 + 49x^2 - 36}$$

3) Dans cette question, on se propose d'utiliser les résultats ci-dessus pour déterminer la limite de la suite (U_n) définie pour tout entier $n \geq 1$ par :

$$U_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$$

a) Montrer, par exemple en utilisant un raisonnement par récurrence que :

$$\sum_{k=1}^{k=n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

b) Justifier, pour tout entier $n \geq 1$ l'égalité :

$$\sum_{k=1}^{k=n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) = \ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$$

c) En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$S_n = \frac{1}{12n^4} \left[n(n+1)^2 - \frac{1}{n} \ln\left(\frac{n!}{n^n}\right) \right] - \frac{1}{3}$$

d) A partir du résultat précédent, déterminer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln\left(\frac{n!}{n^n}\right) \text{ puis la limite de la suite } (U_n).$$

Exercice :

On considère la suite (U_n) définie par U_0 et pour tout n de $\mathbb{N}$ par :

$$U_{n+1} = \frac{U_n + 1}{\sqrt{U_n^2 + 1}} - 1$$

1) Démontrer que la suite (U_n) est constante si, et seulement si, U_0 prend deux valeurs que l'on précisera.

2) On prend U_0 dans l'intervalle $] -1; 0[$

a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $-1 < U_n < 0$, et que (U_n) est une suite décroissante.

b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < U_{n+1} + 1 \leq \frac{1}{\sqrt{U_0^2 + 1}}(U_n + 1)$

c) On pose $k = \frac{1}{\sqrt{U_0^2 + 1}}$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$0 < U_n + 1 < k^n(U_0 + 1)$$

En déduire que la suite (U_n) admet une limite l , que l'on précisera.

Problème :

Partie A :

Dans cette partie on se propose de résoudre le problème suivant :
trouver une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$, s'annulant pour $x = 1$ et vérifiant la propriété :
pour tout $x > 0$:

$$xf'(x) - 3f(x) = 3\ln(x) \quad (E)$$

où $\ln$ désigne le logarithme népérien.

1) Trouver toutes les fonctions polynômes P du troisième degré telles que, pour tout x réel :

$$xP'(x) - 3P(x) = 0$$

2) Soit une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ telle que $f(1) = 0$, soit h la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par la relation $f(x) = x^3 h(x)$

a) Calculer $h(1)$

b) Calculer $f'(x)$ en fonction de $h'(x)$ et de $h(x)$.

c) Montrer que f vérifie la propriété (E) si et seulement si pour tout $x > 0$:

$$h'(x) = \frac{3}{x^4} \ln x$$

d) On suppose que f vérifie la propriété (E). Montrer que h est définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$h(x) = \int_1^x \frac{3}{t^4} \ln t \, dt$$

déterminer $h(x)$ à l'aide d'une intégration par parties.

3) Montrer qu'il existe une fonction f et une seule solution du problème posé et en donner l'expression.

Partie B :

I Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \ln x - \frac{1}{3}$

1) a) Etudier les variations de f .

b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

c) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2) Construire dans un repère orthogonal (unités: 10 cm en abscisses, 5 cm en ordonnées), la courbe représentative C de f sur l'intervalle $]0; 1]$

3) Soit λ un réel strictement positif

a) A l'aide d'une intégration par parties calculer :

$$\int_1^\lambda \ln t \, dt$$

b) En déduire $I(\lambda) = \int_1^\lambda f(t) \, dt$

Donner une interprétation graphique du résultat.

c) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} I(\lambda)$

II

1) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

a) Soit k un entier naturel tel que $1 \leq k \leq n - 1$, montrer que :

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t) \, dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

b) En déduire les inégalités :

$$\frac{1}{n} \left[f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right] \leq \int_{1/n}^1 f(t) \, dt \leq \frac{1}{n} \left[f\left(\frac{1}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) \right] \quad (1)$$

c) En utilisant la courbe C et en prenant $n = 10$, interpréter graphiquement cet encadrement.

2) Pour tout entier $n \geq 2$ on pose :

$$S_n = \frac{1}{n} \left[f\left(\frac{1}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$

a) Déduire des inégalités (1) l'encadrement

$$I\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n \leq I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$$

b) Déterminer $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda f(\lambda)$ et prouver alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{3}{4}$

AVRIL 1996

Exercice :

Soit P le plan complexe rapporté au repère orthonormé (O, u, v) .

Soit m un nombre réel, on considère l'application f_m du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z , fait correspondre le point M' d'affixe z' , défini par :

$$z' = \frac{\sqrt{2}}{2} (m + i) z + \frac{\sqrt{2}}{2} (m^2 - 1)$$

1) a) On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$

(x, y, x' et y' réels).

Calculer x' et y' en fonction de x et y .

b) Démontrer que, quel que soit le réel m , l'image O' de O par f_m appartient à une droite dont on donnera une équation cartésienne.

2) Est-il possible de déterminer m pour que l'application f_m soit :

a) une translation ?

b) une rotation de centre O ?

Dans le cas d'une réponse positive, préciser la ou les valeurs de m et donner les éléments géométriques de la transformation f_m correspondante.

3) On considère le cas particulier où $m = 1$ et on désigne par Δ la droite d'équation $x + y = 0$.

Déterminer l'image Δ' de Δ par f_1 (faire la figure).

Quelle est l'image de la droite Δ par l'application f_1^4 ($f_1^4 = f_1 \circ f_1 \circ f_1 \circ f_1$)

Problème:

On considère la suite (U_n) définie pour $n \geq 1$ par :

$$U_n = \frac{n! e^n}{n^n \sqrt{n}}$$

I Soit f la fonction définie par sur $]1, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x - \frac{1}{2}} + \ln(x - 1) - \ln x$$

1) Calculer la dérivée f' de f et vérifier que, pour tout x dans $]1, +\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{1}{4x(x - 1)(x - \frac{1}{2})^2}$$

2) Calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 1.

3) Montrer que la limite de $f(x)$, quand x tend vers $+\infty$ est égale à 0.

4) Dresser le tableau de variation de f sur $]1, +\infty[$. En déduire le signe de $f(x)$ pour x dans $]1, +\infty[$.

5) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormal (O, i, j) (Unité graphique : 4 cm)

II Soit (V_n) la suite définie pour $n \geq 1$ par $V_n = \ln(U_n)$

1) a) En remarquant que

$\ln(n!) = \ln(1) + \ln(2) + \ln(3) + \dots + \ln(n)$, montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, on a $V_n - V_{n-1} = (n - \frac{1}{2}) f(n)$ (1)

où f est la fonction étudiée dans la partie I.

b) Etudier le sens de variation de la suite (V_n) , puis le sens de variation de la suite (U_n) .

2) Montrer que, la suite (U_n) converge vers un réel positif ou nul noté l .

III Soit g la fonction définie sur $[2, +\infty[$ par :

$$g(x) = f(x) + \frac{1}{5x^2(x - \frac{1}{2})}$$

où f est la fonction définie à la partie I.

1) Calculer la dérivée g' de g et vérifier que pour tout x dans $[2, +\infty[$, on a :

$$g'(x) = \frac{-7x^2 + 16x - 4}{20x^3(x-1)(x-\frac{1}{2})^2}$$

2) Dresser le tableau de variation de g , calculer la limite de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$ et en déduire que, pour tout x dans $[2, +\infty[$ $g(x)$ est strictement positif.

(On ne demande pas de tracer la courbe représentative de g)

IV Soit (W_n) la suite définie pour $n \geq 2$ par :

$$W_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2}$$

1) a) Montrer que, pour tout entier naturel $k \geq 2$ on a :

$$\frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{x^2} dx \quad (2)$$

b) Dédire de (2) l'inégalité pour n entier supérieur ou égal à 2,

$$W_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2} \leq \int_1^n \frac{1}{x^2} dx \quad (3)$$

Interpréter graphiquement les inégalités (2) et (3).

c) Pour $n \geq 2$, calculer $\int_1^n \frac{1}{x^2} dx$ et montrer que $W_n \leq 1$.

d) Montrer que la suite (W_n) converge vers un réel W vérifiant $W \leq 1$.

2) a) A l'aide de l'égalité (1) établie dans la partie II et en utilisant le signe de la fonction g étudiée dans la partie III, montrer que, pour tout entier $k \geq 2$, on a :

$$V_k - V_{k-1} \geq -\frac{1}{5k^2}$$

b) En déduire que pour tout entier $n \geq 2$ on a :

$$V_n \geq -\frac{1}{5}W_n + 1$$

c) Montrer enfin que la limite l de la suite (U_n) est supérieure ou égale à $l^{\frac{4}{5}}$ et donc est strictement positive
