



BKalan

Recueil de sujets de concours



**École Normale Supérieure de Bamako
(ENSup)**

Matière : Mathématiques

Niveau : PEF

N°	Année	Sujet	Page
1	2014	Mathématiques – PEF	2
2	2012	Mathématiques – PEF	3
3	2009	Mathématiques – PEF	4
4	2008	Mathématiques – PEF	5
5	2007	Mathématiques – PEF	6
6	2005	Mathématiques – PEF	8
7	2004	Mathématiques – PEF	9
8	2003	Mathématiques – PEF	10
9	2002	Mathématiques – PEF	11
10	2001	Mathématiques – PEF	12

Nombre de sujets : 10 | Version : V1 | Générée le 21 octobre 2026

Retrouvez d'autres documents sur :

<https://bkalan.ml/api/files/WhatsApp/CONCOURS/NATIONAUX/docs.html>

Vous avez des sujets ou des corrigés ? Envoyez-les-nous :

Partager mes documents 

Exercice 1 (4 pts)

Le tableau suivant donnant les variations de la fonction f définie sur $[-3 ; 4]$ est incomplet :

x	-3	-2	-1	2	3	4
Signe de $f'(x)$		0			0	
Variation de $f(x)$		-2	1	-1	4	-2

1-/ Recopier et compléter le tableau de f en remplissant la ligne « signe de $f'(x)$ ».

2-/ Déterminer les intervalles pour lesquelles, a-t-on :

a-/ $f'(x) > 0$

b-/ $f'(x) < 0$

c-/ $f'(x) = 0$

3-/ L'équation $f(x) = 0$ admet une solution au moins dans l'intervalle $[-3 ; 4]$.

a-/ Indiquer le nombre de solution de l'équation

b-/ Situer chacune de ces solutions en indiquant l'intervalle qui la contient (*deux solutions ne doivent pas appartenir à un même intervalle*).

c-/ Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de f passant par le point d'abscisse (-1) .

Exercice 2 (6 pts)

1-/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a-/ $\frac{2z+1}{2iz+1} = \frac{2iz+3i}{1-z}$.

b-/ $z\bar{z} = z(z - \bar{z}) + 13 + 18i$.

c-/ $z^2 + (1 + \sqrt{3})z + 2 + \sqrt{3} = 0$. (On remarquera que $(1 + \sqrt{3})^2 = 4 + 2\sqrt{3}$)

2-/ a-/ Résoudre l'équation différentielle (E) : $9y'' + 16y = 0$.

b-/ Déterminer la solution particulière f de l'équation (E) dont la courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal, passe par le point $A\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur égal à $-\frac{16}{3}$.

c-/ Vérifier que, pour tout réel x , $f(x) = 4\cos\left(\frac{4}{3}x - \frac{\pi}{6}\right)$.

d-/ – Démontrer que $\frac{3\pi}{2}$ est une période pour f .

– Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $\left[0; \frac{3\pi}{4}\right]$.

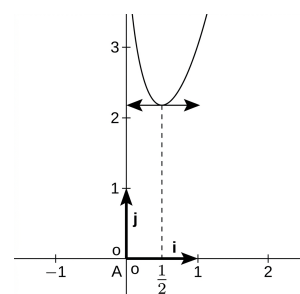
Problème (10 pts)

I-/

La courbe ci-contre représente, dans un repère orthogonal $(A; \vec{u}; \vec{v})$, la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = 2x^2 + 1 - \ln x.$$

Quel est, en justifiant la réponse, le signe de $g(x)$ pour $x > 0$?



II-/ f est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = 2x + \frac{\ln x}{x}$

($\mathcal{C}$) est la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$, d'unités graphiques 2 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée.

1-/ Déterminer la limite de f en 0.

2-/ Calculer $f'(x)$ et vérifier que : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

Déduire de la question I-/ le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau des variations de f .

3-/ Soit ($\mathcal{D}$) la droite d'équation $y = 2x$.

a-/ Calculer les coordonnées du point B, intersection de la courbe ($\mathcal{C}$) et de la droite ($\mathcal{D}$).

b-/ Déterminer une équation de la tangente en B à ($\mathcal{C}$).

c-/ Étudier la position relative de la courbe ($\mathcal{C}$) et de la droite ($\mathcal{D}$).

4-/ Tracer la courbe ($\mathcal{C}$) et la droite ($\mathcal{D}$).

5-/ Calculer l'aire du domaine délimité par : la courbe ($\mathcal{C}$), la droite ($\mathcal{D}$) et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$.

Concours professionnel

Formation - Professeur d'Enseignement Fondamental

Filière : *Sciences*

Date : *Septembre 2012*

Épreuve : *Mathématiques*

Coef.: *2*

Durée : *3 heures*

SUJET I

Exercice 1 [2,5 pts]

1°/ Soit la suite (U_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N} \ U_n = e^{2n+1}$.

a.) Calculer U_0, U_1, U_2 . (1pt)

b.) Préciser la nature et la raison de la suite (U_n) . (1pt)

c.) Calculer en fonction de n la somme $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$ (0,5pt).

Exercice 2 [3,5 pts]

2°/ Dans un centre sportif il y a N étudiants dont :

200 pratiquent du football ;

un tiers pratique du basket-ball ;

un dix-huitième pratique les deux sports ;

un sixième ne pratique ni l'un ni l'autre.

a.) Traduire les informations ci-dessus sous forme d'équations permettant de calculer N puis déterminer sa valeur. (1pt)

b.) Déterminer la probabilité pour qu'un sportif choisi au hasard dans ce centre :

– soit à la fois footballeur et basketteur. (0,5pt)

– ne soit ni footballeur ni basketteur. (0,5pt)

– soit seulement footballeur. (0,5pt)

Exercice 3 [6 pts]

1°/ On considère dans le plan les points A, B et C d'affixes respectives :

$$a = 1 + i ; b = 1 + (1 + \sqrt{3})i ; c = (1 + \sqrt{3})i.$$

a.) Déterminer le module de chacun des nombres complexes suivants :

TSVP

$$a - b ; c - a \text{ et } c - b \text{ (1,5pt)}$$

b.) En déduire la nature du triangle ABC (0,5pt)

2°/ Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

Soit les points $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2} ; \frac{1}{2}\right)$; $B\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} ; \frac{1}{2}\right)$ et $C(0 ; -1)$

On considère l'application s du plan complexe dans lui-même qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = (1 + i\sqrt{3})z$

a.) Déterminer les affixes des points A', B' et C' images respectives des points A, B et C par s . (1,5pts)

b.) Construire dans le plan muni du repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ les points A, B, C et leurs images A', B', C' par s . (1,5pts)

Problème [8 pts]

A-//

1°/ On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - y = 4x e^x$

Déterminer les réels a et b pour que la fonction g définie par $g(x) = (ax^2 + bx)e^x$ soit solution de (E). (1,5pt)

2°/ Vérifier qu'une fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ est solution de (E) équivaut à $f - g$ est solution de l'équation (E') : $y'' - y = 0$ (1pt)

3°/ Résoudre (E') puis en déduire la solution générale de (E). (1,5pt)

B-//

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 - x + 1)e^x$ de courbe représentative (c) dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ (unité 1cm).

1°/ Déterminer la limite de f en $-\infty$ puis interpréter graphiquement ce résultat.

Déterminer la limite de f en $+\infty$. (1,5pt).

2°/ Calculer la fonction dérivée de f puis dresser son tableau de variation. (1,5pt)

3°/ Déterminer une équation de la tangente (T) à (c) au point d'abscisse 1. (1pt)

4°/ Tracer (T) et (c) dans le repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$. (2pts)

Concours professionnel
Formation - Professeur d'Enseignement Fondamental

Filière : Sciences

Date : Novembre 2009

Épreuve : Mathématiques

Coef.: 2

Durée : 3 heures

SUJET I

Exercice 1 [6 pts]

Soit ABCD un losange et f l'application affine de $\mathcal{P}$ définie par : $f(A) = A$,

$f(B) = D$ et $f(C) = D$

1°/ a-/ déterminer les images par f du point D, de la droite (AD) et du plan $\mathcal{P}$.

b-/ Démontrer que $f \circ f$ est une application constante.

2°/ Soit la symétrie orthogonale d'axe (AC).

a-/ Préciser la nature et les éléments caractéristiques de l'application $g \circ f$.

b-/ En déduire la construction de l'image par f d'un point quelconque M de $\mathcal{P}$.

Exercice 2 [6 pts]

1-/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a-/ $\frac{2z+1}{2iz+1} = \frac{2iz+3i}{1-z}$.

b-/ $z\bar{z} = z(z-\bar{z}) + 13 + 18i$.

c-/ $z^2 + (1 + \sqrt{3})z + 2 + \sqrt{3} = 0$. (On remarquera que $(1 + \sqrt{3})^2 = 4 + 2\sqrt{3}$)

2-/ a-/ Résoudre l'équation différentielle (E) : $9y'' + 16y = 0$.

b-/ Déterminer la solution particulière f de l'équation (E) dont la courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal, passe par le point A $\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur égal à $-\frac{16}{3}$.

TSVP

c-/ Vérifier que, pour tout réel x , $f(x) = 4 \cos\left(\frac{4}{3}x - \frac{\pi}{6}\right)$.

d-/ – Démontrer que $\frac{3\pi}{2}$ est une période pour f .

– Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $\left[0; \frac{3\pi}{4}\right]$.

Exercice 3 [8 pts]

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité 2cm)

1°/ On considère la fonction numérique f de courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{1-x}$

a-/ Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

b-/ Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

c-/ Préciser l'équation de la tangente à l'origine puis tracer avec soin la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et sa tangente.

2°/ On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = |x|e^{|1-x|}$

a-/ Écrire $g(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.

b-/ En déduire une méthode pour obtenir la courbe représentative $(\mathcal{C}_g)$ de g sur $]-\infty; 1]$ à partir de $(\mathcal{C}_f)$

c-/ Étudier sur l'intervalle $[1; +\infty[$ les variations de la fonction h définie par $h(x) = xe^{x-1}$

d-/ Étudier la dérivabilité de la fonction g en 0 et en 1.

e-/ Déduire des questions précédentes le tableau de variation de g .

f-/ Tracer $(\mathcal{C}_g)$ ainsi que les demi tangentes à $(\mathcal{C}_g)$ aux points d'abscisses 0 et 1.

Concours professionnel
Formation - Professeur d'Enseignement Fondamental

Filière : *Sciences*

Date : *Octobre 2008*

Épreuve : *Mathématiques*

Coef.: **2**

Durée : *3 heures*

SUJET

Exercice 1 [4 pts]

On considère la fonction g définie par : $g(x) = e^{2x^2+3x+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

a-/ Calculer l'intégrale $I = \int_1^3 (e^{2x^2+3x+1}) dx$

b-/ Étudier et représenter graphiquement les variations de la fonction g .

c-/ Donner une interprétation géométrique du résultat trouvé en a-/.

d-/ Donner une valeur approchée du résultat de a-/ : (ici la calculatrice peut être utilisée).

Exercice 2 [8 pts]

On considère le nombre complexe $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

a-/ Calculer j^2 . Quelle est la relation entre j^2 et $\bar{j}$? Calculer les racines carrées de j .

b-/ Graduer un repère orthonormé en prenant (2cm) comme unité sur chacun des axes.

c-/ En utilisant, à titre auxiliaire, un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent respectivement 1 unité et 2 unités, pour obtenir une longueur correspondant à $\sqrt{3}$ unité sur le repère, construire les points A_1 , B_1 , et C_1 ayant pour affixes, respectivement 1, j et j^2 .

Montrer que $A_1B_1C_1$ est un triangle équilatéral.

d-/ On construit d'une part les points A_2 , B_2 , et C_2 ayant respectivement pour affixes 2, $2j$ et $2j^2$, d'autre part les points A_3 , B_3 , et C_3 correspondant respectivement aux complexes 3, $3j$ et $3j^2$.

Montrer que $A_2B_2C_2$ et $A_3B_3C_3$ sont des triangles équilatéraux.

e-/ Calculer les côtés de chacun des triangles $A_iB_iC_i$, $i = 1, 2, 3$.

f-/ On considère les points sont D_1 , D_2 et D_3 , symétriques respectifs de A_1 , A_2 et A_3 par rapport au point $\omega = \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$.

Déterminer les affixes de D_1 , D_2 et D_3 et montrer que les triangles $D_1C_1B_1$, $D_2C_2B_2$ et $D_3C_3B_3$ sont équilatéraux.

g-/ Quelle est la valeur de l'aire du losange $A_3B_3D_3C_3$?

Exercice 2 [4 pts]

On donne la suite $(U_n)_{n \geq 1}$ telle que

$$\begin{cases} U_1 = \frac{1}{3} \\ U_{n+1} = \frac{n+1}{3n} U_n \quad n \geq 1 \end{cases}$$

a-/ Calculer U_2 , U_3 , U_4 et U_5 .

b-/ On définit la suite $(V_n)_{n \geq 1}$ par $V_n = \frac{U_n}{n}$ $n \geq 1$.

Montrer que $(V_n)_{n \geq 1}$ est une suite géométrique. Préciser son premier terme et sa raison.

c-/ Trouver l'expression de U_n en fonction uniquement de n .

On posera $U_n = f(n)$ l'expression trouvée. Retrouver, à partir de cette expression $U_n = f(n)$, les valeurs de U_2 , U_3 , U_4 et U_5 obtenues à la première question.

d-/ On introduit la fonction associée à la suite $(U_n)_{n \geq 1}$ c'est-à-dire la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+^* &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

La relation f étant la même que dans $U_n = f(n)$. Construire soigneusement, sur le même repère, la courbe $(\mathcal{C})$ représentant la fonction f sur $]0 ; +\infty[$ et la droite Δ d'équation $y = x$.

Utiliser ces deux courbes $(\mathcal{C})$ et Δ pour placer correctement les valeurs U_1 , U_2 , et U_3 sur l'axe des x .

Exercice 1 [4 pts]

$\mathbb{C}$ désignant l'ensemble des nombres complexes ; on considère l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$f(z) = z^3 - (2 + \sqrt{3} + i)z^2 + (\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} + i)z - 2 - 2i$$

1-/ Vérifier, de deux façons différentes, que $f(z)$ peut s'écrire

$$f(z) = (z - 1 - i)[z^2 - (\sqrt{3} + 1)z + 2]$$

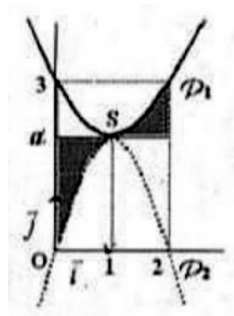
2-/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $f(z) = 0$

Indication : On remarquera que le discriminant du trinôme est égal à $-(\sqrt{3} - 1)^2$.

3-/ Représenter dans le plan complexe $\mathcal{P}$ les points A, B, C, images des solutions de l'équation (E) [Unité sur le graphique : 4cm]

Montrer que le triangle OAB est équilatéral.

Exercice 2 [4 pts]



Sur la figure ci-contre, P_1 et P_2 sont deux paraboles de même sommet S. Les coordonnées de S sont $(1 ; a)$ dans le repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 1,2 cm).

P_1 passe par les points de coordonnées $(0 ; 3)$ et $(2 ; 3)$ et P_2 passe par l'origine du repère ainsi que le point de coordonnées $(2 ; 0)$.

Trouver la valeur de a telle que les aires des deux domaines coloriés soient égales. Donner la valeurs communes de ces aires, d'une part en unité graphique, d'autre part en cm^2 .

TSVP

Exercice 3 [6 pts]

Lors de la signature de contrat de travail, le 1^{er} janvier 2000, deux agents A et B se voient proposer deux formules (les salaires étant exprimés dans une certaine Unité de Compte, UC) :

Dans la première, le salaire mensuel est de 8 000 UC et augmente régulièrement ensuite de 550 UC au 1^{er} janvier de chaque année.

Dans la deuxième, le salaire mensuel est de 8 000 UC et augmente régulièrement ensuite de 6% au 1^{er} janvier de chaque année.

1-/ a-/ A qui cherche un contrat de courte durée accepte la première formule et s'engage pour six mois. Déterminer son salaire S_1 au premier janvier 2001, puis S_2 au premier janvier 2002, puis S_3 , S_4 et S_5 . Convertir ces salaires en CFA sachant que 1 UC = 10 CFA.

À quelle année correspond S_{10} ? Déterminer S_{10} .

b-/ Exprimer le salaire S_n au premier janvier 2000 + n en fonction du salaire de départ S_0 et de n . Quelle est la nature de la suite (S_n) ?

2-/ a-/ B choisit la deuxième formule, on désigne par S'_n son salaire au premier janvier 2000 + n .

Calculer S'_1 , S'_2 , S'_3 , S'_4 . Convertir ces salaires en CFA.

b-/ Exprimer le salaire S'_{n+1} en fonction du salaire S'_n . Quelle est la nature de la suite (S'_n) ? Exprimer le salaire S'_n en fonction du salaire de départ S_0 et de n .

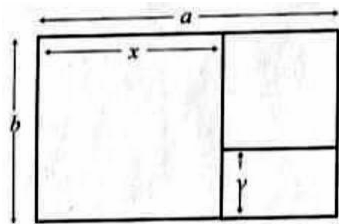
3-/ a-/ Dans le plan muni d'un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, placer les points $A_n(n, S_n)$ et $B_n(n, S'_n)$ pour $0 \leq n \leq 10$.

b-/ Joindre les points successifs de chacune des suites de points (A_n) et (B_n) .

c-/ Utiliser ces courbes pour dire si le choix effectué par chacun des deux agents se justifie.

Exercice 4 [6 pts]

On découpe un rectangle de longueur a et largeur b , comme indiqué ci-dessous.

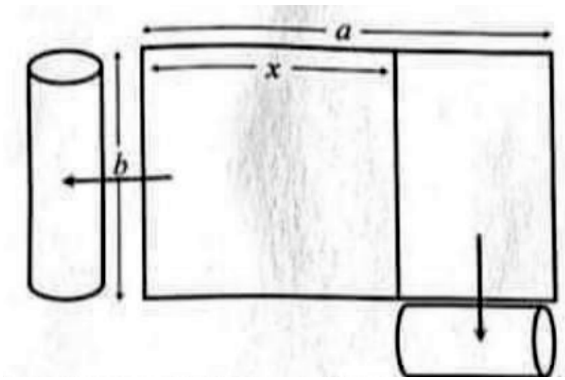


1-/ Peut-on découper de telle sorte que les 3 rectangles aient la même aire ?

Donner les valeurs correspondantes des variables x et y .

2-/ Peut-on faire le découpage de telle sorte que les 3 rectangles aient le même périmètre ? Calculer les valeurs correspondantes de x et y si elles existent.

On découpe maintenant ce rectangle en deux parties, que l'on enroule comme indiqué ci-dessous, pour constituer deux surfaces cylindriques.



3-/ À quelle condition ces cylindres ont-ils même volume ? (Écrire l'équation en x).

4-/ Que se passe-t-il si $a=2b$?

5-/ Vérifier que, si $a=b$, alors $x = b \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ est solution.

Concours professionnel
Formation - Professeur d'Enseignement Fondamental

Filière : Sciences

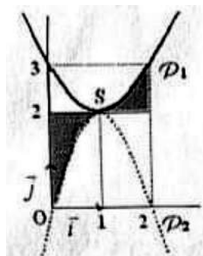
Epreuve : Mathématiques

Coef.: 2

SUJET

Date : Septembre 2005

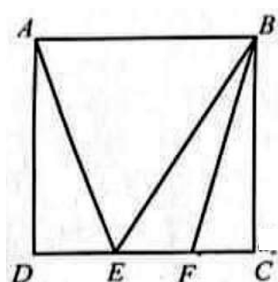
Durée : 3 heures

EXERCICE 1 [4 pts]

Sur la figure ci-contre, P_1 et P_2 sont deux paraboles de même sommet S . Les coordonnées de S sont $(1 ; 2)$ dans le repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 1,2 cm).

P_1 passe par le point de coordonnées $(0 ; 3)$ et P_2 passe par l'origine du repère.

Calculer l'aire en cm^2 du domaine colorié.

..... **EXERCICE 2** [6 pts]

Un cultivateur possède un champ carré de côté a , représenté par la figure $ABCD$ ci-contre. Il se propose de le partager entre ses 4 enfants, en 4 domaines d'aires respectives d_1, d_2, d_3, d_4 correspondant respectivement aux 4 triangles AED, ABE, BFE et BCF .

Il pose $x=DE$, $y=FC$ (longueurs de segments), d l'aire du champ et k un réel quelconque. Pour des raisons de préférence entre ses enfants, il pose les conditions suivantes :

$$d_2 + d_3 = kd ; \quad d_1 + d_4 = (1-k)d ; \quad k \geq \frac{3}{5}$$

1-/ Calculer les valeurs de d_1, d_2, d_3 et d_4 en fonction des paramètres a, x, y et k , dans le cas où le partage serait possible.

TSVP

2-/ Montrer que lorsque le partage est possible, on a :

$$d_1 > d_4 \quad \text{et} \quad d_2 > d_3$$

3-/ Donner une condition nécessaire et suffisante, portant sur les paramètres a et k , que x doit vérifier pour que ce partage soit possible.

4-/ Application numérique : On prend

a-/ $a = 100 \text{ m}$; $k = \frac{3}{5}$ et $x = 45 \text{ m}$.

b-/ $a = 150 \text{ m}$; $k = \frac{3}{5}$ et $x = 50 \text{ m}$.

Dire dans chacun des cas si le partage est possible dans les conditions définies par le cultivateur ? Si oui, trouver les valeurs correspondantes de d_1, d_2, d_3 et d_4 .

EXERCICE 3 [6 pts]

On considère la suite (U_n) définie par $U_0=2$ et pour tout naturel n ,

$$U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n - 1$$

1-/ Calculer U_1, U_2, U_3, U_4 .

2-/ (V_n) est une suite définie pour tout naturel n par $V_n = U_n + \frac{3}{2}$.

a-/ Démontrer que la suite (V_n) est géométrique.

b-/ Exprimer V_n , explicitement en fonction de n .

3-/ a-/ Déduire de 2-/ une expression de U_n explicitement en fonction de n .

b-/ Étudier la limite de la suite (U_n) .

c-/ On note : $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$

$$\Sigma_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$$

Exprimer S_n puis Σ_n explicitement en fonction de n . Puis, étudier les limites de S_n et Σ_n

EXERCICE 4 (Professionnel) [4 pts]

La consigne est de **construire « précisément », en utilisant les instruments autorisés, toutes les droites de symétrie des figures proposées. Le problème de l'existence de ces droites n'est pas posé ici.**

Pour chaque groupe de figures les instruments autorisés sont indiqués.

Questions :

1-/ Donner les propriétés de base de la droite de symétrie.

2-/ Construire pour chaque figure toutes les droites de symétrie (en justifiant vos constructions).

NB : Les constructions sont faites sur une fiche spéciale « figures » qui accompagne le sujet.

**Concours professionnel
Formation - Professeur d'Enseignement Fondamental**

Filière : Sciences

Date : Septembre 2004

Epreuve : Mathématiques

Coef.: 1

Durée : 3 heures

SUJET

..... EXERCICE 1 [6
pts]

En utilisant les propriétés de la fonction $\ln$ (logarithme népérien), transformer, puis résoudre le système d'équations suivant dans $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} 4^x \times (\sqrt{2})^y = 2^{2x+1} \\ 2^x \times 8^y = 4^{y-1} \end{cases}$$

NB : Compléter la réponse par une vérification explicite de la solution trouvée.

..... EXERCICE 2 [6
pts]

Soit f la fonction numérique de variable réelle définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin x - x \cos x$$

1-/ Quelle est la parité de f ?

2-/ Étudier f sur l'intervalle $[0 ; 4\pi]$

3-/ Représenter sur un même graphique pour $x \in [0 ; 4\pi]$, la courbe représentative C de f , les droites :

D d'équation $y = x$

et Δ d'équation $y = -x$

On précisera les points d'intersection de C , d'une part avec D , d'autre part avec Δ .

4-/ Calculer, pour $\forall a \in \mathbb{N}$, $f(2a\pi)$ et $f[(2a+1)\pi]$

5-/ a-/ Situer les zéros de la fonction f , sur l'intervalle $[0 ; 4\pi]$, sans chercher à en déterminer les valeurs exactes.

TSVP

b-/ Indiquer clairement une méthode graphique permettant de déterminer des valeurs approchées de ces zéros de f , sans réaliser cette résolution graphique dans le détail.

c-/ Dessiner, sans autres calculs, la courbe représentative de f sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 3 [8 pts]

Une entreprise fabrique des objets à l'aide d'une machine à emboutir. On désigne par x , en centaine, le nombre d'objets fabriqués par la machine et l'on sait que le coût d'utilisation de la machine, exprimé en fonction de x , en milliers de francs, est

$$f(x) = \frac{3}{4}x + e^{-\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}}$$

1-/ Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

2-/ En déduire, à l'unité près, le nombre d'objets qu'il faut produire pour que le coût soit minimal.

3-/ Un objet fabriqué par cette machine est vendu à 8 francs. Prouver que le bénéfice, en milliers de francs, est donné en fonction de x , par

$$g(x) = \frac{1}{20}x - e^{-\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}}$$

4-/ Étudier les variations de g sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

5-/ a-/ Déterminer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α et qu'on a :

$$3,13 < \alpha < 3,14$$

b-/ En déduire le nombre minimal d'objets à fabriquer, afin que l'entreprise réalise un bénéfice sur la vente des objets fabriqués par cette machine.

Concours professionnel
Formation - Professeur d'Enseignement Fondamental

Filière : Sciences

Date : Septembre 2003

Epreuve : Mathématiques

Coef.: 1

Durée : 3 heures

Sujet

Exercice 1

4pts

1-/ Soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$

a-/ En utilisant la méthode d'intégration par partie, montrer que

$$I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \text{ (on pourra remarquer que } \sin^n x = \sin x \cdot \sin^{n-1} x \text{) (1pt)}$$

b-/ Calculer I_0 ; En déduire I_2 et I_4 . (0,5pt)

2-/ Soit le polynôme $P(z) = z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 2$ d'inconnue complexe z

a-/ Montrer que si z_0 est une solution de l'équation $P(z) = 0$ alors son conjugué $\bar{z}_0$ est aussi solution de l'équation $P(z) = 0$. (0,5pt)

b-/ Calculer $P(-i)$ puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$. (1pt)

c-/ Ecrire chacune des solutions sous forme exponentielle. (1pt)

Exercice 2

6pts

1-/ soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par
$$\begin{cases} U_1 = 3 \\ U_{n+1} = U_n + n \end{cases}$$

On considère la suite (V_n) définie par $V_n = U_{n+1} - U_n$ (1)

a-/ Exprimer V_n en fonction de n et montrer que (V_n) est une suite arithmétique dont on déterminera le 1^{er} terme et la raison. (1pt)

b-/ Calculer $S_n = V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n$ (1pt)

c-/ Utiliser la relation (1) pour trouver une autre expression de S_n . En déduire U_n en fonction de n . Calculer la limite de U_n . (1pt)

TSVP

2-/ Une urne contient 15 boules indiscernables au toucher dont 10 sont rouges, 3 bleues et 2 vertes.

Le principe d'un jeu est le suivant : le joueur paye 50F au début de chaque jeu et ensuite il tire simultanément 2 boules de l'urne ;

- le tirage d'une boule rouge ne rapporte rien
- chaque boule bleue tirée rapporte 50F
- chaque boule verte tirée rapporte 250F.

Un joueur joue une fois, quelle est la probabilité pour ce joueur

a-/ de ne ni gagner, ni perdre ? (gagner 0F). (1pt)

b-/ de perdre 50F ? (1pt)

c-/ de gagner 50F ? (0,5pt)

d-/ de gagner 250F ? (0,5pt)

NB : Le gain algébrique du joueur est la différence entre le montant obtenu à l'issue du jeu et celui payé au début du jeu.

Problème

10pts

Soit la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+2)e^{-x}$.

On désigne par (c) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1-/ Déterminer la limite de $f(x)$ en $-\infty$ puis en $+\infty$. Interpréter graphiquement ces résultats (1pt)

2-/ a-/ Etablir que pour tout x réel $f'(x) = -(x+1)e^{-x}$, en déduire le signe de $f'(x)$, puis le tableau de variation de f . (2pts)

b-/ Ecrire l'équation de la tangente (T) à la courbe (c) au point d'abscisse $x=0$ (1pt)

c-/ Construire la courbe (c) et la tangente (T) dans le plan muni du repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité 2 cm) (2pts)

3-/ Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ a deux solutions distinctes sur $[-2 ; 4]$. (1pt)

4-/ Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (ax+b)e^{-x}$.

a-/ Déterminer les réels a et b pour que g soit une primitive de f . (1pt)

b-/ Calculer en unité d'aire la valeur exacte de l'aire de la partie du plan limité par la courbe (c) , l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x=-2$ et $x=4$. Donner une valeur approchée de l'aire à 10^{-2} près par défaut en cm^2 . (2pts)

Concours professionnel

Formation – Professeur d'Enseignement Fondamental

Filière : Sciences

Date : Septembre 2002

Epreuve : Mathématiques

Coef.: 1

Durée : 3 heures

SUJET

EXERCICE 1 [4 pts]

1-/ Transformer en somme l'expression suivante : $f(x) = \cos^3(x) \cos(3x)$

2-/ Calculer l'intégrale $J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx$

Indication : On peut d'abord linéariser chaque terme de la somme, puis utiliser les formules d'Euler.

EXERCICE 2 [4 pts]

Déterminer le domaine de définition et la solution de l'inégalité

$$\ln(x-3) + \ln(x-1) > 3$$

EXERCICE 3 [4 pts]

C désignant l'ensemble des nombres complexes ; on considère l'application de C dans C définie par :

$$f(z) = z^3 - (2 + \sqrt{3} + i)z^2 + (\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} + i)z - 2 - 2i$$

1-/ Vérifier, de deux façons différentes, que $f(z)$ peut s'écrire

$$f(z) = (z - 1 - i)[z^2 - (\sqrt{3} + 1)z + 2]$$

2-/ Résoudre dans C l'équation (E) : $f(z) = 0$

Indication : On remarquera que le discriminant du trinôme est égal à $-(\sqrt{3}-1)^2$.

3-/ Représenter dans le plan complexe $\mathcal{P}$ les points A, B, C, images des solutions de l'équation (E) [Unité sur le graphique : 4cm]

Montrer que le triangle OAB est équilatéral.

Problème [8 pts]

On considère la fonction f qui à tout réel x fait correspondre le réel

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x + \frac{3}{2}}$$

Soit Γ la courbe représentative de la variation de f dans un repère orthonormal $(x'ox, y'oy)$.

1-/ Montrer que $f(x)$ peut se mettre sous la forme :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x + \frac{3}{2}}, \text{ où } a, b, c \text{ sont des réels.}$$

Déduire de cela que la courbe C a une asymptote oblique, dont on déterminera l'équation.

2-/ Montrer que le point d'intersection I des 2 asymptotes de la courbe est centre de symétrie de C.

3-/ Tracer la courbe C en en justifiant les éléments.

4-/ Utiliser le graphique pour discuter l'existence et le nombre des solutions de l'équation

$$x^2 - (2 + p)x - \frac{3}{2}p + 1 = 0$$

suivant les valeurs du paramètre p .

5-/ Donner l'équation de la tangente à la courbe C en son point A d'abscisse 3. Tracer cette tangente.

Quelle est l'ordonnée du point B de cette tangente dont l'abscisse est égale à $-\frac{3}{4}$?

Concours professionnel
Formation - Professeur d'Enseignement Fondamental

Filière : Sciences

Date : Septembre 2001

Epreuve : Mathématiques

Coef.: 1

Durée : 3 heures

Sujet

Exercice 1 [3 pts]

1-/ Déterminer dans $\mathbb{C}$ les racines carrées de

$$t = 7 + 24i$$

2-/ Les racines z_1 et z_2 d'une équation du second degré à coefficients complexes vérifient

$$\begin{cases} z_1 + z_2 + z_1 z_2 = 2 + 3i \\ \frac{z_1 + z_2}{z_1 z_2} = -\frac{9 + 7i}{26} \end{cases}$$

Former cette équation et résoudre dans $\mathbb{C}$.

Exercice 2 [3 pts]

Une personne plante dans son jardin :

- un arbre mesurant 50 cm et dont la hauteur augmente de 20% par an ;
- et un autre mesurant 1,50 m et dont la hauteur augmente de 4% par an.

1-/ Montrer que les nombres mesurant par an les hauteurs de chaque arbre suivent une progression géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

2-/ Au cours de quelle année les deux arbres auront-ils la même hauteur ?

3-/ Lequel des deux arbres atteindra 2,50 m le premier ? Au cours de quelle année ?

Exercice 3 [4 pts]

Une roue de jeu (roue de la fortune) est partagée en quatre secteurs coloriés en rouge, bleu, vert et jaune : les mesures de ces secteurs constituent dans l'ordre une suite arithmétique de premier terme α et de raison r .

Lors d'une partie, on fait tourner la roue, et un repère désigne la couleur obtenue à l'arrêt ; les probabilités d'atteindre les différents secteurs circulaires sont proportionnelles aux mesures des angles de ces secteurs.

1-/ Montrer que les probabilités d'atteindre les secteurs rouge (R), bleu (B), vert (V) et jaune (J) sont respectivement :

$$p(R) = \frac{\alpha}{360} ; p(B) = \frac{\alpha + r}{360} ; p(V) = \frac{\alpha + 2r}{360} ; p(J) = \frac{\alpha + 3r}{360}$$

2-/ On définit la règle suivante :

- si le résultat est rouge, le joueur gagne 11 000 f ;
- si le résultat est bleu, le joueur gagne 5 000 f ;
- si le résultat est vert, le joueur perd 1 000 f ;
- si le résultat est jaune, le joueur perd 5 000 f ;

Soit X la variable aléatoire prenant pour valeurs les gains algébriques du joueur à l'issue d'une partie.

a-/ Donner la loi de probabilité de X en fonction de α et r .

b-/ Déterminer α et r pour que l'espérance mathématique de X soit nulle.

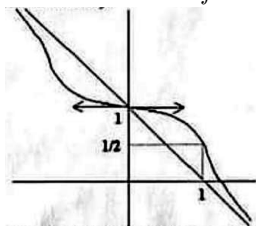
3-/ On fixe $\alpha = 40^\circ$ et $r = \frac{100}{3}$

Quelle est la probabilité d'avoir un gain positif à l'issue d'une partie ?

Problème [10 pts]

Dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on donne la courbe représentative de f :

1-/ Déterminer l'ensemble de définition de f .



2-/ Donner le tableau de variation de f et l'équation de l'asymptote oblique.

3-/ Sachant que $f(x) = ax + b + \frac{cx}{x^2 + 1}$

Déterminer a , b et c .

4-/ Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à déterminer.

Construire la courbe de la bijection réciproque f^{-1} .

5-/ Calculer $(f^{-1})' \left(\frac{1}{2} \right)$