

# **Avants - Propos :**

Conformément au nouveau programme de mathématiques, Ce présent manuel est le résultat d'un travail réalisé par un comité d'enseignants du secondaire qui répond au souci du ministère de l'éducation nationale pour la mise en œuvre de **l'approche par compétence (A.P.C)** dans les classes de **TAL** (Terminale Arts et Littératures) au Mali et ayant pour **objectif** d'uniformiser le niveau des élèves venant des classes antérieures afin de leur offrir les mêmes chances dans la poursuite de leurs études universitaires. Il permet en outre d'harmoniser la pédagogie des mathématiques et de mettre à la disposition des élèves l'acquisition d'une formation solide.

Chacun des chapitres recouvrant l'ensemble du programme, est composé de **04** parties :

## ■ **Situation - Problème :**

Une **activité ouverte** permettant d'aborder en grande partie les connaissances nouvelles.

## ■ **Activités préparatoires :**

Les **activités préparatoires**, approches simples des nouvelles notions à partir des connaissances acquises dans les classes antérieures.

## ■ **Le cours :**

Rien que **l'essentiel dans un langage clair et simple** avec des **démonstrations**. Chaque définition ou théorème est suivi d'un exemple simple, court, en situation, pouvant servir de référence et d'aide à la démonstration.

## ■ **Exercices et problèmes :**

- **Les exercices** : Inédits et ordonnés suivant **la progression du cours**, ils contribuent à l'acquisition et à l'assimilation du cours.
- **Les problèmes** : Variés, ce sont des **problèmes de synthèse** ou des problèmes ouverts pour aller plus loin dans l'acquisition de vos connaissances sans aller au-delà du programme en vigueur.

Nous souhaitons donc que l'utilisation de ce livre ne se substitue pas au travail des professeurs en classe, mais qu'il constitue un support efficace, utile aux élèves pour mieux comprendre les mathématiques dans toute sa diversité. A cet effet, nous tenons à remercier **les éditions SAMASSA** et tous ceux qui voudront bien nous faire part de leurs remarques, critiques, suggestions ou autres solutions plus élégantes que les miennes, que nous publierons dans une future édition.

**Les auteurs**

# SOMMAIRE

1

## Calculs numériques .....63

- 1- Situation problème.
- 2- Activité préparatoire
- 3- Introduction et définition.
- 4- Ensemble d'application.
- 5- Nombres premiers.
- 6- Nombres premiers entre eux.
- 7- PGCD et PPCM de deux entiers  $a$  et  $b$ .

2

## Fonctions numériques.....63

- 1- Situation problème.
- 2- Activité préparatoire
- 3- Généralité.
- 4- Limites.
- 5- Dérivés.

3

## Suites numériques ...100

- 1- Situation problème.
- 2- Activité préparatoire
- 3- Généralité.
- 4- Suites arithmétiques.
- 5- Suites arithmétiques.

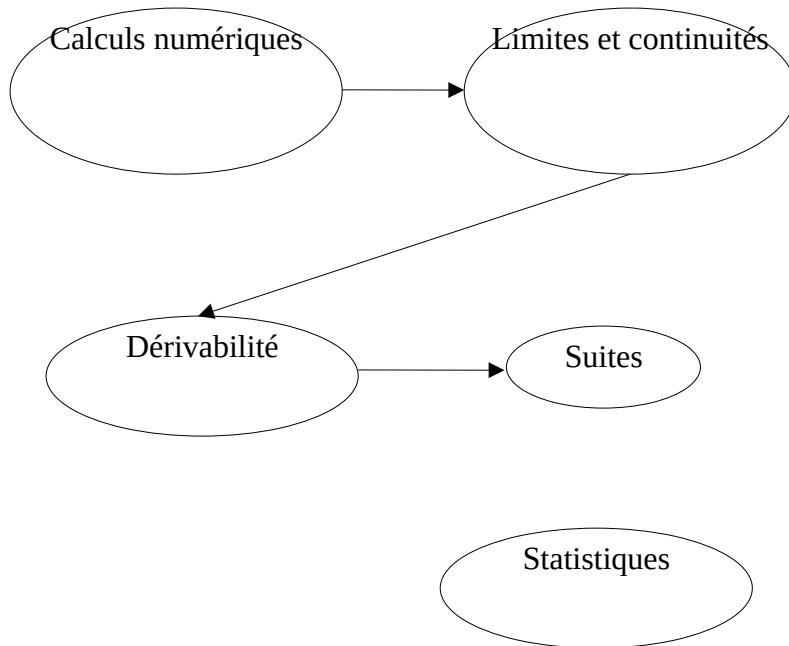
4

## Statistiques...156

- 1- Situation problème.
- 2- Activité préparatoire
- 3- Définition et présentation des données.
- 4- Éléments caractéristiques d'une série statistique.

**Sujets types  
Bac**

## LIEN ENTRE LES CHAPITRES DU MANUEL



# Calculs

## Objectifs

**Ce chapitre vise à :**

- approfondir les notions d'arithmétique vues au premier cycle ;

## Savoirs et savoir-faire

### 1. NOMBRES PREMIERS

| SAVOIRS                                                                                                                                                                                         | SAVOIR-FAIRE                                                                                                                                                                                                                     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <ul style="list-style-type: none"><li>• Définition.</li><li>• L'ensemble des nombres premiers est infini.</li><li>• Décomposition d'un entier naturel en produit de facteurs premiers</li></ul> | <ul style="list-style-type: none"><li>• Démontrer qu'un nombre est premier.</li><li>• Déterminer l'ensemble des diviseurs d'un entier naturel non nul.</li><li>• Décomposer un entier en produit de facteurs premiers.</li></ul> |

### 2. PGCD, PPCM

| SAVOIRS                                                                                                                                                                                                     | SAVOIR-FAIRE                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <ul style="list-style-type: none"><li>• Définition et propriétés.</li><li>• Algorithme d'Euclide.</li><li>• Nombres premiers entre eux.</li><li>• Théorème de Bézout.</li><li>• Théorème de Gauss</li></ul> | <ul style="list-style-type: none"><li>• Déterminer le PGCD de deux nombres :<ul style="list-style-type: none"><li>- à l'aide de l'algorithme d'Euclide ;</li><li>- à l'aide de la décomposition en produit de facteurs premiers.</li></ul></li><li>• Déterminer le PPCM de deux nombres :<ul style="list-style-type: none"><li>- à l'aide de la décomposition en produit de facteurs premiers ;</li><li>- à l'aide du PGCD.</li></ul></li><li>• Utiliser le théorème de Bézout pour démontrer que des entiers sont premiers entre eux.</li><li>• Utiliser le théorème de Gauss pour résoudre des problèmes d'arithmétique.</li></ul> |

## I) Activité :

- a- En te référant sur les notions vues dans les classes antérieures, décompose les nombres 450 et 320 en produit de facteur premier puis en déduire le PGCD de 450 et 320.
- b- Un champ a pour dimensions 4,5m et 3,2m. On souhaite carreler cette pièce avec un nombre entier de dalles carrées, sans aucune découpe. Quel est le plus grand côté possible ( en cm ) de la dalle carrée ?

### Solution

- a- Décomposons les nombres 450 et 320 en produit de facteur premier puis en déduire le PGCD de 450 et 320.

|     |   |     |   |
|-----|---|-----|---|
| 450 | 2 | 320 | 2 |
| 225 | 3 | 160 | 2 |
| 75  |   | 80  | 2 |
| 25  | 5 | 40  | 2 |
| 5   | 5 | 20  | 2 |
| 1   |   | 10  | 2 |
|     |   | 5   | 5 |
|     |   |     | 1 |

$$\Rightarrow 450 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = > 320 = 2^6 \cdot 5 \cdot 3^0$$

$$\text{Alors PGCD}(450 ; 320) = 2 \times 5 \times 3^0 = 10$$

- b- Déterminons le plus grand côté possible ( en cm ) de la dalle carrée ?

$$\text{On a : } L = 4,5 \text{ m} = 450 \text{ cm} \quad \text{et} \quad l = 3,2 \text{ m} = 320 \text{ m.}$$

$$\text{Ainsi le côté en cm d'une dalle carrée est le PGCD}(450 ; 320) = 10.$$

$$\text{D'où le plus grand côté possible d'une dalle est } 10 \text{ cm.}$$

## II) Introduction et Définition :

## 1) Introduction

On peut considérer que, dès l'époque préhistorique, les hommes ont utilisé leurs doigts pour compter ou effectuer des calculs sommaires. L'emploi de symboles pour désigner les nombres apparaît sans doute en Mésopotamie, vers 2000 av. J.-C, où l'on a retrouvé des tablettes babyloniennes couvertes de chiffres en base 60. Puis viennent les systèmes de numération égyptiens, grecs et romains. **C'est en Grèce qu'est fondée l'arithmétique théorique par les pythagoriciens au VI<sup>e</sup> siècle av. J.-C.** À cette époque, les mathématiciens grecs savent déjà manipuler des notions arithmétiques comme les proportions, les moyennes, ou encore les progressions. Tout ce savoir a été, par la suite, regroupé dans les **Éléments d'Euclide**.

## 2) Définition

L'Arithmétique est la branche des mathématiques qui étudie les propriétés des **Nombres Entiers Naturels**  $\mathbb{N}$ , des **Entiers Relatifs**  $\mathbb{Z}$  et des **Nombres Rationnels**  $\mathbb{Q}$ .

## III) Ensembles d'applications

En arithmétique, on utilise trois types de nombres :

les **Nombres Entiers Naturels**  $\mathbb{N}$  ; les **Nombres Entiers Relatifs**  $\mathbb{Z}$  et les **Nombres Rationnels**  $\mathbb{Q}$ .

### 1) Ensemble des Nombres entiers naturels :

L'ensemble des entiers naturels, noté :  $\mathbb{N}$  est défini en extension comme suite :

$$\mathbb{N} = \{ 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \dots ; n ; (n+1) ; \dots \}$$

On définit dans  $\mathbb{N}$  deux lois de compositions internes de la fonction suivante :

- **L'addition** :  $\forall a \in \mathbb{N}$  et  $\forall b \in \mathbb{N}$ ,  $a + b = S \in \mathbb{N}$ .
- **La multiplication** :  $\forall a \in \mathbb{N}$  et  $\forall b \in \mathbb{N}$ ,  $a \times b = p \in \mathbb{N}$ .

Exemple :  $2 + 1 = 3 \in \mathbb{N}$  et  $4 \times 3 = 12 \in \mathbb{N}$

On définit aussi dans  $\mathbb{N}$  une relation d'ordre, c'est-à-dire que pour tout a et b de  $\mathbb{N}$ , on a :

Soit  $a \leq b$ , soit :  $b \leq a$ .

### Propriétés

**P<sub>1</sub>**:  $\mathbb{N}$  a un plus petit élément noté 0.

**P<sub>2</sub>**:  $\mathbb{N}$  n'a pas de plus grand élément.

**P<sub>3</sub>**-Toute partie non vide de  $\mathbb{N}$  a un plus petit élément.

### **2) Ensemble des Nombres entiers relatifs :**

L'ensemble des entiers relatifs, noté :  $\mathbb{Z}$  est défini en extension comme suite :

$$\mathbb{Z} = \{ -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; \dots ; n ; -n ; (n + 1) ; -(n + 1), \dots \}$$

Cet ensemble a la structure d'un **anneau commutatif unitaire** :

On définit dans  $\mathbb{Z}$  deux lois de composition interne : une addition et une multiplication.

### Propriétés :

**P<sub>1</sub>**: L'addition est commutative associative dans  $\mathbb{Z}$  et admet un élément neutre qui est 0.

**P<sub>2</sub>**: La multiplication est commutative associative dans  $\mathbb{Z}$  et admet un élément neutre qui est 1.

**P<sub>3</sub>**: La multiplication est distributive par rapport à l'addition :  $a \cdot (b + c) = ab + ac$ .

**P<sub>4</sub>**: L'existence d'un élément symétrique  $-a$ , c'est-à-dire que  $a + (-a) = 0$ .

### NB :

L'anneau est unitaire à cause de l'existence de l'élément neutre "1" de la multiplication.

$(\mathbb{Z} ; +)$  est un groupe commutatif.

$(\mathbb{Z} ; + ; \times)$  est un anneau commutatif unitaire.

On définit dans  $\mathbb{Z}$  une **relation d'ordre**  $(\frac{2n+1}{n+2})$  vérifiant les propriétés suivantes :

- 1)  $a < b \Rightarrow a + c < b + c$
- 2)  $a < b$  et  $c > 0 \Rightarrow ac < bc$
- 3)  $a < b$  et  $c < 0 \Rightarrow ac > bc$

D'autres propriétés de  $\mathbb{Z}$ , que nous admettrons sans preuve sont :

**P<sub>1</sub>**- Toute partie de  $\mathbb{Z}$  qui est non vide et qui est majorée, a un plus grand élément.

**P<sub>2</sub>**- Toute partie de  $\mathbb{Z}$  qui est non vide et qui est minorée a un plus petit élément.

**P<sub>3</sub>**- Si  $a$  et  $b$  sont deux entiers relatifs, et  $b$  est non nul, il existe un entier relatif  $n$  où  $nb < a$ .

### 3) Ensemble des Nombres rationnels :

L'ensemble des nombres rationnels, noté :  $\mathbb{Q}$  est un ensemble qui est défini en extension comme suite :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{P}{Q} , P \in \mathbb{Z} ; q \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

**NB :**  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

## IV) Nombre entier naturel premier :

### 1) Définition :

On dit qu'un nombre entier naturel p est premier s'il a exactement deux diviseurs, 1 et p.

#### D'une manière générale :

Pour montrer qu'un nombre entier naturel p est premier, il suffit de le diviser par les entiers naturels premiers successifs qui lui sont inférieurs afin d'obtenir un entier premier d qui ne le divise pas avec ( $d^2 < a$ )

### Exemple

Montrer que 239 est un nombre entier premier.

On a :  $a = 239 \Rightarrow ( C \begin{smallmatrix} F \\ E \end{smallmatrix} )$

Ainsi les nombres entiers premiers inférieurs à 15,45 sont : {1, 3, 5, 7, 13} et on remarque que 239 n'est pas divisible par aucun de ces nombres premiers c'est-à-dire : {1, 3, 5, 7, 13}.

**Conclusion :** 239 est un nombre premier.

### 2) Théorèmes :

**Théorème 1 :** Tout entier naturel n supérieur à 1, admet au moins un diviseur premier.

**Théorème 2 :** L'ensemble des nombres premiers est infini.

**Théorème 3 :** Tout entier naturel n supérieur à 1 admet au moins un diviseur premier d tel que :  $1 < d^2 \leq n$

#### **NB :**

L'ensemble des nombres premiers compris entre 1 et 100 peut s'obtenir par **l'algorithme d'Eratosthène** que nous décrivons comme suit :

- 1) On construit une table des nombres allant de 1 à 100.
- 2) On élimine le nombre 1 qui n'est pas premier

- 3) On garde le nombre 2 et on élimine de la table tous ses multiples
- 4) Le nombre suivant non éliminé est 3, que l'on garde. On élimine de la table tous les multiples de 3;
- 5) On procède ainsi jusqu'au nombre 100 .
- 6) Les nombres non éliminés de la table sont tous premiers.

On obtient alors la table suivante :

|               |                                                |               |               |                                                |                                                                          |                                                |                                                |    |                                                |
|---------------|------------------------------------------------|---------------|---------------|------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------|------------------------------------------------|----|------------------------------------------------|
| 1             | 2                                              | 3             | <del>4</del>  | 5                                              | $A_1^1=1$                                                                | 7                                              | $A_1^1=n!$                                     | 9  | $\in \mathbb{N}^* \text{ et } \mathbb{Q}$      |
| 11            | $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ | 13            | <del>14</del> | $P_3: C_n^1=n$                                 | $P_2: C_n^1=1$                                                           | 17                                             | $P_4: C_n^1=1$                                 | 19 | $P_2: C_n^1=n$                                 |
| 21            | $C_n^P$                                        | 23            | <del>24</del> | $P_3: A_n^1=n!$                                | $P_4(n>p)$                                                               | $A_1^1=\frac{n!}{(n-p)!}$                      | $A_1^1=(n)^p$                                  | 29 | $A_1^1=(n)^1=1$                                |
| 31            | $P_2: A_1^1(n)=n$                              | <del>33</del> | <del>34</del> | $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ | $\in$                                                                    | 37                                             | $\in$                                          | 39 | $C_n^1=\frac{20!}{3!(20-3)!}$                  |
| 41            | $A_1^1=\frac{30!}{(30-3)!}$                    | 43            | <del>44</del> | $A_1^1=(30)^3$                                 | $\frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$ | 47                                             | $\Omega$                                       | 49 | $\Omega$                                       |
| <del>51</del> | $\frac{3}{6}=0,5$                              | 53            | <del>54</del> | $\frac{1}{6}$                                  | $\frac{0}{6}=0$                                                          | $\frac{6}{6}=1$                                | $\Omega$                                       | 59 | $\Omega$                                       |
| 61            | $\Omega$                                       | 63            | <del>64</del> | $\varphi$                                      | $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$                           | 67                                             | $\overline{A})$                                | 69 | $\varphi$                                      |
| 71            | $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ | 73            | <del>74</del> | $C_{\text{out}}^1(n)=n!$                       | $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$                           | $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ | 79 | $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ |
| <del>81</del> | $\frac{1}{6}$                                  | 83            | <del>84</del> | $\frac{1}{2}$                                  | $\Omega$                                                                 | $\Omega$                                       | $\Omega$                                       | 89 | $\Omega$                                       |
| 91            | $\Omega$                                       | 93            | <del>94</del> | $\Omega$                                       | $\mapsto$                                                                | 97                                             | $\mapsto$                                      | 99 | $\overline{X}$                                 |

#### **Théorème 4 : (Décomposition d'un nombre entier en produit de facteur premier).**

Tout entier naturel supérieur à 1 se décompose de façon unique comme un produit de facteurs premiers. La décomposition prend la forme générale :  $n = P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} P_3^{\alpha_3} \dots P_k^{\alpha_k}$

où  $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$  est le nombre de termes de valeur  $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$  contenus dans  $n$ .

#### **Exemple**

- 1) Décomposer en produit de facteurs premiers le nombre 21200.
- 2) On pose  $N = 21200n$ . Déterminer la valeur de  $n$  pour que  $N$  soit un carré parfait.

#### **Solution**

- 1) Décomposons en produit de facteurs premiers le nombre 21200.

Nous remarquons la présence de deux zéros à la fin du nombre.

D'où :  $n = 212 \times 10^2 = 212 \times 2^2 \times 5^2$

Maintenant nous utilisons la table des nombres premiers pour décomposer le terme 212 comme suite :

---

212 2  
106 2  
53 53  
1

En regroupant les termes, on a :  $2^2 \times 53 \times 2^2 \times 5^2 = 2^4 \times 5^2 \times 53^1$

2) On pose  $N = 21200n$ . Déterminons la valeur de  $n$  pour que  $N$  soit un carré parfait.

$N = 21200n = 2^4 \times 5^2 \times 53^1 \times n$ . Alors  $N$  est un carré parfait si  $n = 53^{2k+1}$  ( avec  $k \in \mathbb{N}$  )

Où  $2k + 1$  est l'écriture d'un nombre impaire.

## V) PPCM et PGCD de deux entiers naturels a et b :

### 1) Plus Petit Commun Multiple(PPCM)

#### a- Définition :

Soient  $a$  et  $b$  deux entiers relatifs non nuls. On appelle plus petit commun multiple de  $a$  et  $b$ , le plus petit élément strictement positif de  $(a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z})$ .

#### Notation :

Le plus petit commun multiple de  $a$  et  $b$  peut être noté comme suit:

$$\text{PPCM}(a; b) = (a \vee b) = m.$$

#### b- Propriétés

$$\mathbf{P_1:} \forall (a; b) \in \mathbb{Z}^2; \text{PPCM}(a; b) = \text{PPCM}(|a|; |b|)$$

C'est à dire cherché le PPCM de deux entiers relatifs, revient à cherché le PPCM de deux entiers naturels non nuls.

$$\mathbf{P_2:} \forall (a; b) \in (\mathbb{N}^*)^2, \text{ on a : } ma(a; b) \leq \text{PPCM}(a; b) \leq a \cdot b$$

$$\mathbf{P_3:} \forall (a; b) \in (\mathbb{N}^*)^2, \text{ on a : } \text{PPCM}(a; b) = a \Leftrightarrow a \in (b\mathbb{Z}).$$

**Exemple :**  $\text{PPCM}(12; 4) = 12 \Leftrightarrow 12 \in (4\mathbb{Z})$ .

**P<sub>4</sub> :** L'ensemble des multiples communs de deux entiers naturels non nuls  $a$  et  $b$  est l'ensemble des multiples de leur PPCM, c'est-à-dire si  $\text{PPCM}(a; b) = m$  ; alors :  
 $(\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}) = m\mathbb{Z}$ .

**Exemple :**  $\text{PPCM}(12; 16) = 48$  donc  $(12\mathbb{Z} \cap 16\mathbb{Z}) = 48\mathbb{Z}$ .

**P<sub>5</sub> :** Soit  $a, b$  et  $k$  trois entiers naturels non nuls. On a :

$$\text{PPCM}(ka; kb) = k \text{PPCM}(a; b)$$

**Exemple :**  $\text{PPCM}(120; 168) = \text{PPCM}(24 \times 5; 24 \times 7) = 24 = 24 \cdot \text{PPCM}(5; 7) = 24 \times 35$   
 $\Rightarrow \text{PPCM}(120; 168) = 840$

## 2) Plus Grand Commun Diviseur (PGCD)

### a- Définition :

Soient  $a$  et  $b$  deux entiers relatifs non nuls. On appelle Plus Grand Commun Diviseur de  $a$  et  $b$ , le plus grand élément commun strictement positif de  $(a \in \mathbb{Z} \cap b \in \mathbb{Z})$ . **à revoir**

### Notation :

Le Plus Grand Commun Diviseur de  $a$  et  $b$  peut avoir les notations suivantes :

$$\text{PGCD}(a; b) = (a \wedge b) = d = \Delta.$$

### b- Propriétés :

$$\mathbf{P_1 :} \forall (a; b) \in \mathbb{Z}^2; \text{PGCD}(a; b) = \text{PGCD}(|a|; |b|)$$

C'est à dire cherché le PGCD de deux entiers relatifs, revient à cherché le PGCD de deux entiers naturels non nuls.

**P<sub>2</sub> :** Soient  $a$  et  $b$  deux entiers naturels non nuls. On a :

$$\text{PGCD}(a; b) = d \Rightarrow D(a; b) = D_d \text{ où } D_d \text{ désigne l'ensemble des diviseurs de } d.$$

### Exemple :

$$\text{PGCD}(24; 30) = 6 \Rightarrow D(24; 30) = D_6 = \{1; 2; 3; 6\}$$

**P<sub>3</sub>** : Soient  $a$ ;  $b$  et  $k$  trois entiers naturels non nuls. On a :

$$\text{PGCD}(ka; kb) = k \text{PGCD}(a; b).$$

**Exemple :**

$$\text{PGCD}(228; 95) = \text{PGCD}(19 \times 12; 19 \times 5) = 19 \text{PGCD}(12; 5) = 19 \times 1 = 19$$

$$\mathbf{P_4} : \text{Si } b > a \text{ alors } \text{PGCD}(a; b) = \text{PGCD}(a; b - a) = \text{PGCD}[b - a; a - (b - a)]$$

**Exemple 1 :**

$$\begin{aligned} \text{PGCD}(143; 27) &= \text{PGCD}(27; 116) = \text{PGCD}(27; 89) = \text{PGCD}(77; 62) = \text{PGCD}(27; 35) \\ &= \text{PGCD}(27; 8) = \text{PGCD}(8; 19) = 1 \end{aligned}$$

**Exemple 2 :**

$$\begin{aligned} \text{PGCD}(2n + 3; 5n - 2) &= \text{PGCD}(3n - 5; 2n + 3) = \text{PGCD}(n - 8; 2n + 3) \\ &= \text{PGCD}(n + 11; n - 8) = \text{PGCD}(19; n - 8) = 19 \end{aligned}$$

**P<sub>4</sub>** : D'après l'algorithme d'Euclide, si  $a = bq + r$  ( $r \neq 0$ ) alors :

$$\text{PGCD}(a; b) = \text{PGCD}(b; r) \text{ et puis que } r = a - bq \text{ alors on a :}$$

$$\text{PGCD}(a; b) = \text{PGCD}[b; (a - bq)]$$

**Exemple :**

$$\text{Montrer que } \text{PGCD}[(5n^3 - n); (n + 2)] = \text{PGCD}[(n + 2); 38]$$

**Solution**

La division Euclidienne de  $(5n^3 - n)$  par  $(n + 2)$  donne pour quotient :  
 $q = 5n^2 - 10n + 19$  et pour reste  $r = -38$ .

Puisque :  $\text{PGCD}(a; b) = \text{PGCD}(b; r)$  alors on a :

$$\text{PGCD}[(5n^3 - n); (n + 2)] = \text{PGCD}[(n + 2); -38] = \text{PGCD}[(n + 2); 38]$$

**P<sub>5</sub>** : Soit  $(a; b) \in (\mathbb{N}^*)^2$  et  $d$  leur PGCD. Un entier relatif  $m$  est un multiple de  $d$  si et seulement si, il existe deux entiers relatifs  $u$  et  $v$  tel que  $m = au + bv$

**Exemple :**

38 est un multiple de 19 ; donc il existe un couple  $(u; v) \in \mathbb{Z}^2$  tel que :

38

$$= 228u + 95v = > 38 = 228(1) + (-2)(95) = > u = 1 \quad \text{et} \quad v = -2$$

### Exercices d'application

1) Déterminer le PGCD et le PPCM des entiers  $a$  et  $b$  dans chacun des cas suivants :

**a-**  $a=1455$  et  $b=335$  ; **b-**  $a=24$  et  $b=33$  ; **c-**  $a=48$  et  $b=46$

### Solution

La décomposition des entiers  $a$  et  $b$  en produit de facteurs premiers :

**a-**  $a=1455$  et  $b=335$

La décomposition de  $a$  et  $b$  en produit de facteurs premiers donne :

$$\begin{cases} a=1455 \\ b=335 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \cdot 5 \cdot 97 \\ b = 5 \cdot 67 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \cdot 5 \cdot 97 \cdot 67^0 \\ b = 5 \cdot 67 \cdot 97^0 \cdot 3^0 \end{cases}$$

$$\text{PGCD}(1455 ; 335) = 3^0 \cdot 97^0 \cdot 67^0 \cdot 5^1 = 5 = > \text{PGCD}(1455 ; 335) = 5$$

= >

$$\text{PPCM}(1455 ; 335) = 3 \cdot 5 \cdot 97 \cdot 67 = 97485 = > \text{PPCM}(1455 ; 335) = 97485$$

**b-**  $a=24$  et  $b=33$

La décomposition de  $a$  et  $b$  en produit de facteurs premiers donne :

$$\begin{cases} a=24 \\ b=33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2^3 \cdot 3 \\ b = 3 \cdot 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2^3 \cdot 3 \cdot 11^0 \\ b = 3 \cdot 11 \cdot 2^0 \end{cases}$$

$$\text{PGCD}(24 ; 33) = 2^0 \cdot 3 \cdot 11^0 = 3 = > \text{PGCD}(24 ; 33) = 3$$

= >

$$\text{PPCM}(24 ; 33) = 2^3 \cdot 3 \cdot 11 = 264 = > \text{PPCM}(24 ; 33) = 264$$

**c-**  $a=48$  et  $b=46$

La décomposition de  $a$  et  $b$  en produit de facteurs premiers donne :

$$\begin{cases} a=48 \\ b=46 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2^4 \cdot 3 \\ b = 2 \cdot 23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2^4 \cdot 3 \cdot 23^0 \\ b = 2 \cdot 23 \cdot 3^0 \end{cases}$$

$$\text{PGCD}(48 ; 46) = 2 \cdot 3^0 \cdot 23^0 = 2 = > \text{PGCD}(48 ; 46) = 2$$

= >

$$\text{PPCM}(48 ; 46) = 2^4 \cdot 3 \cdot 23 = 1104 = > \text{PPCM}(48 ; 46) = 1104$$

## VI) Algorithme d'Euclide :

### 1) Définition :

Soient  $a$  et  $b$  deux entiers tels que :  $0 < b < a$  et  $r$  le reste de la division Euclidienne de  $a$  par  $b$ .

On appelle **Algorithme d'Euclide**, toute opération visant à déterminer le PGCD des deux entiers  $a$  et  $b$  en effectuant les divisions Euclidiennes successives suivantes :

- Division de  $a$  par  $b$  pour obtenir :  $a = bq_0 + r_0$  ; Avec  $0 \leq r_0 < b$ .
- Division de  $b$  par  $r_0$  pour obtenir :  $b = r_0q_1 + r_1$  ; Avec  $0 \leq r_1 < r_0$ .
- Division de  $r_0$  par  $r_1$  pour obtenir :  $r_0 = r_1q_2 + r_2$  ; Avec  $0 \leq r_2 < r_1$ .

Et ainsi de suite jusqu'à obtention du dernier reste non nul qui correspond au PGCD des deux entiers  $a$  et  $b$ .

**NB :** toutes ces opérations peuvent être résumées dans un tableau appelé : **tableau d'Algorithme**.

|                  |                 |       |       |      |       |       |       |
|------------------|-----------------|-------|-------|------|-------|-------|-------|
| <b>Quotients</b> | $q_0$           | $q_1$ | $q_2$ | .... | ..... | ..... | ..... |
| <b>Dividende</b> | <b>Diviseur</b> | $r_0$ | $r_1$ | .... | ..... | ..... | ..... |
| <b>Restes</b>    | $r_0$           | $r_1$ | $r_2$ | .... | ..... | ..... | ..... |

### Exemple

En utilisant le tableau d'Algorithme, déterminer le PGCD des entiers  $a$  et  $b$  dans chacun des cas suivants :

**a-**  $a=1455$  et  $b=335$  ; **c-**  $a=46$  et  $b=43$

### Solution

**a-**  $a=1455$  et  $b=335$

|                  |     |   |   |    |  |
|------------------|-----|---|---|----|--|
| <b>Quotients</b> | 421 | 1 | 2 |    |  |
|                  |     |   |   | 14 |  |

---

|                |        |    |   |  |  |
|----------------|--------|----|---|--|--|
| <b>1455335</b> | 115105 | 10 | 5 |  |  |
|----------------|--------|----|---|--|--|

---

|               |     |     |    |   |   |
|---------------|-----|-----|----|---|---|
| <b>Restes</b> | 115 | 105 | 10 | 5 | 0 |
|---------------|-----|-----|----|---|---|

---

Ici le dernier reste non nul est 5. D'où **PGCD( 1455 ; 335 ) = 5**

c-  $a=46$   $et b=43$

|                  |      |   |   |
|------------------|------|---|---|
| <b>Quotients</b> | 1143 |   |   |
| <b>46</b>        | 4331 |   |   |
| <b>Restes</b>    | 3    | 1 | 0 |

Ici le dernier reste non nul est 1. D'où **PGCD( 1455 ; 335 ) = 1**

## VII) Nombres Premiers entre eux ou Nombres étrangers :

### 1) Définitions :

**Activité :** Détermine le PGCD (48 ; 43)

#### Synthèse

Le PGCD (48 ; 43) = 1. On dit alors que 48 et 43 sont premiers entre eux ou qu'ils sont étrangers.

#### Définition 1 :

Soient  $a$  et  $b$  deux nombres entiers relatifs non nuls.

On dit que  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux (ou sont étrangers) si **PGCD (  $a$  ;  $b$  ) = 1**.

#### Définition 2:

On dit également que  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux (ou sont étrangers) s'ils n'admettent pas de diviseur commun (en dehors de l'unité c'est-à-dire 1).

**Exemple :** 3 et 5 sont premiers entre eux alors PGCD (3 ; 5) = 1

## 2) Théorèmes :

### ➤ **Théorème 1 : (Théorème de Bézout).**

Soient  $a$  et  $b$  deux entiers relatifs non nuls.  $a$  et  $b$  sont écopangers s'il existe un couple  $(u; v) \in \mathbb{N}$  tel que :  $au + bv = 1$ .

### ➤ **Théorème 2 : (Théorème de Gauss).**

Soient  $a$  ;  $b$  ; et  $c$  trois entiers relatifs non nuls. Si  $a$  divise  $bc$  et que  $a$  et  $b$  sont premier entre eux (  $\text{PGCD} (a; b) = 1$ ), alors  $a$  divise  $c$ .

### ➤ **Théorème 3 : (Théorème de Fermat).**

Soit  $a$  un nombre entier non nul, et  $p$  un nombre premier. Si  $p$  ne divise pas  $a$ , alors il s'en suit la congruence suivante :  $a^{p-1} \equiv 1 [p]$

### ➤ **Théorème 4 :**

Si  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux (  $\text{PGCD} (a; b) = 1$ ) et si  $a$  et  $b$  divisent  $c$ , alors le produit  $ab$  divise  $c$ .

### ➤ **Théorème 5 :**

Si  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux (  $\text{PGCD} (a; b) = 1$ ), alors  $\text{PPCM} (a; b) = ab$

## **Exemple**

- 1) En utilisant le théorème de Bézout, déterminer le couple  $(u; v)$  tel que  $7u + 5v = 1$ .
- 2) En utilisant le théorème de Gauss, montrer que si  $n$  est un entier naturel, alors, le nombre  $N = n^3 - n$  est divisible par 6.
- 3) En utilisant le théorème de Fermat, déterminer le reste de la division de  $15^{401}$  par 17.

## **Solution**

- 1) **En utilisant le théorème de Bézout, déterminons le couple  $(u; v)$  tel que**

$$7u + 5v = 1.$$

Puisque  $\text{PGCD} (7; 5) = 1$ , alors utilisons la table d'Algorithme pour déterminer le couple  $(u; v)$

)

|                  |          |   |   |
|------------------|----------|---|---|
| <b>Quotients</b> | 1        | 2 | 1 |
| <b>7</b>         | <b>5</b> | 2 | 1 |
| <b>Restes</b>    | 2        | 1 | 0 |

$$\Rightarrow 1 = 5 - 2 \times 2 \quad \text{or} \quad 2 = 7 - 1 \times 5$$

$$\Rightarrow 1 = 5 - 2(7 - 1 \times 5)$$

# Fonctions numériques d'une



Leibniz, Gottfried Wilhelm (1646-1716)



Euler Leonhard (1707-1783) Physicien, ingénieur et philosophe.

Mathématicien suisse, philosophe et savant allemand

Depuis longtemps, l'homme a utilisé la notion de fonction à partir des objets anciens tels que la tablette de calcul babylonienne. Cependant une fonction fut une formule permettant d'obtenir un résultat. Il a fallut donc attendre le XVII<sup>ème</sup> siècle pour que le mot fonction et la notion  $y = f(x)$  soit introduit par Leibniz et approfondie par Euler.



Tablette babylonienne

## Sommaire

|                             |     |
|-----------------------------|-----|
| 1- Limites.....             | 79  |
| 2- Continuité.....          | 91  |
| 3- Dérivation.....          | 95  |
| 4- Etudes de fonctions..... | 103 |

## I- Généralité sur les fonctions

### 1) Définition d'une fonction :

On appelle fonction toute relation de **A vers B** qui à chaque élément de **A** on associe **au plus un élément de B**.

### 2) Ensemble de définition ou domaine de définition d'une fonction numérique f :

On appelle ensemble de définition ou domaine de définition d'une fonction numérique  $f$ , **l'ensemble des éléments qui ont une image par  $f$** . On le note  **$D_f$** .

### Exemple

- Si  $f(x) = u(x)$  (fonction polynôme); alors  $D_f = \mathbb{R} = ] - \infty; + \infty[$
- Si  $f(x) = \sqrt{u(x)}$  (fonction irrationnelle); alors  $D_f = \{ x/x \in \mathbb{R}; u(x) \geq 0 \}$
- Si  $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$  (fonction rationnelle), alors  $D_f = \{ x/x \in \mathbb{R}; v(x) \neq 0 \}$ .

### Evaluation

Déterminons l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{ll} 1) f(x) = \frac{-3x^2+5x+1}{x+3} & ; \quad 2) f(x) = (x+2)\sqrt{x^2-3x+2}; \\ 3) f(x) = \frac{x+2}{x-\sqrt{x^2-2x+1}} & ; \quad 4) f(x) = \frac{\sqrt{-x+3}}{-x^2-2x+4} \\ 5) f(x) = \frac{\tan(2x)}{\cos(x)} & ; \quad 6) f(x) = \frac{8}{x+\sqrt{x^2+1}} \end{array}$$

### Synthèse

$$1) f(x) = \frac{-3x^2+5x+1}{x+3}$$

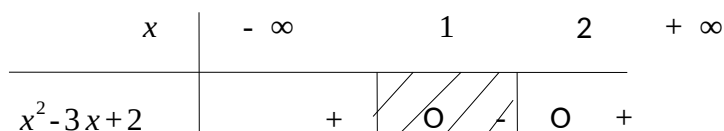
$$D_f = \{ x/x \in \mathbb{R} ; x+3 \neq 0 \}$$

$$x + 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq -3 \Rightarrow \mathbf{D_f} = \mathbb{R} - \{-3\} = ]-\infty; -3[ \cup ]-3; +\infty[$$

$$2) f(x) = (x + 2)\sqrt{x^2 - 3x + 2}$$

$$\mathbf{D_f} = \{x/x \in \mathbb{R}; x^2 - 3x + 2 \geq 0\}$$

$$x^2 - 3x + 2 \geq 0. \text{ Posons } x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \text{ et } x_2 = 2$$

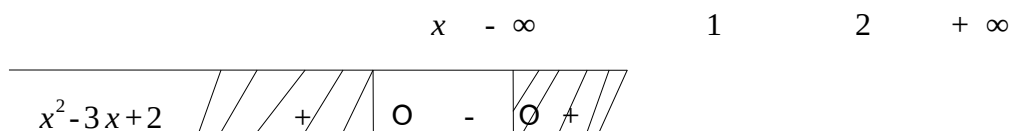


$$\Rightarrow \mathbf{D_f} = ]-\infty; 1] \cup [2; +\infty[$$

$$3) f(x) = \frac{x + 2}{x - \sqrt{x^2 - 3x + 2}}$$

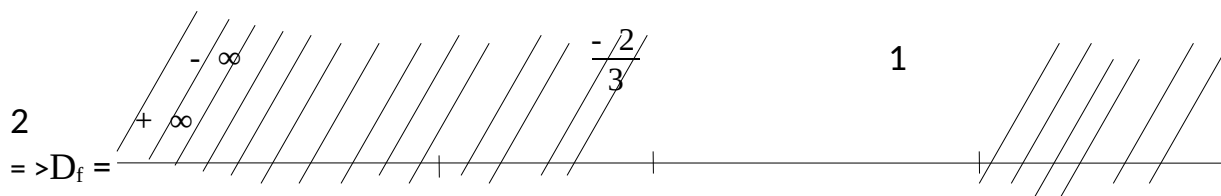
$$\mathbf{D_f} = \{x/x \in \mathbb{R}; x^2 - 3x + 2 \geq 0 \text{ et } x - \sqrt{x^2 - 3x + 2} \neq 0\}$$

$$x^2 - 3x + 2 \geq 0. \text{ Posons } x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \text{ et } x_2 = 2$$



$$x - \sqrt{x^2 - 3x + 2} \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 3x + 2} \neq x \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 \neq x^2$$

$$\Rightarrow -3x + 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{-2}{3}$$



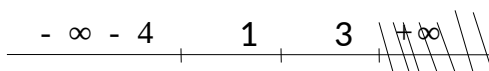
$$\Rightarrow \mathbf{D_f} = [1; 2]$$

$$4) f(x) = \frac{\sqrt{-x + 3}}{-x^2 - 2x + 4}$$

$$D_f = \{x/x \in \mathbb{R} ; -x^2 - 3x + 4 \neq 0 \text{ et } -x + 3 \geq 0\}$$

$$(1) : -x^2 - 3x + 4 \neq 0 \Rightarrow x_1 \neq 1 \text{ et } x_2 \neq -4$$

$$(2) : -x + 3 \geq 0 \Rightarrow x \leq 3$$



$$\Rightarrow D_f = ]-\infty ; -4[ \cup ]1 ; 3[$$

$$5) f(x) = \frac{\tan(2x)}{\cos(x)}$$

$$D_f = \left\{x/x \in \mathbb{R} ; 2x \neq \frac{\pi}{2} \text{ et } \cos(x) \neq 0\right\}$$

$$(1) : 2x \neq \frac{\pi}{2} \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{4}$$

$$(2) : \cos(x) \neq 0 \Leftrightarrow \cos(x) \neq \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2}\right\}$$

$$\Rightarrow D_f = \left] -\infty ; -\frac{\pi}{2} \right[ \cup \left] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{4} \right[ \cup \left] \frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2} \right[ \cup \left] \frac{\pi}{2} ; +\infty \right[$$

$$6) f(x) = \frac{8}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$D_f = \left\{x/x \in \mathbb{R} ; x^2 + 1 \geq 0 \text{ et } x + \sqrt{x^2 + 1} \neq 0\right\}$$

$$x^2 + 1 \geq 0 \quad (\text{Vraie})$$

$$x + \sqrt{x^2 + 1} \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} \neq -x \Leftrightarrow x^2 + 1 \neq x^2 \Rightarrow 1 \neq 0 \quad (\text{Vraie})$$

$$\Rightarrow D_f = \mathbb{R} = \left] -\infty ; +\infty \right[$$

### 3) Opération sur les fonctions :

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies respectivement sur leur ensembles de définition  $Df$  et  $Dg$ .

#### a- Somme :

$$\forall x \in Df \text{ et } \forall x \in Dg ; (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

#### b- Produit :

$$\forall x \in Df \text{ et } \forall x \in Dg ; (f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$$

#### c- Quotient :

$$\forall x \in Df \text{ et } \forall x \in Dg ; \left( \frac{f}{g} \right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ avec } g(x) \neq 0$$

## II- Limites

### Objectifs

Ce chapitre vise à :

- Compléter l'étude de la limite d'une fonction engagée en classe de première par :
  - L'introduction de la limite d'une fonction composée ;
  - La limite d'une fonction monotone sur un intervalle ouvert.
- Introduire la continuité d'une fonction sur un intervalle et utiliser quelques théorèmes usuels liés à la continuité de cette fonction.

### Savoirs et savoir-faire

| SAVOIRS                                                                           | SAVOIR-FAIRE                                                                                                                           |
|-----------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| • Limites <ul style="list-style-type: none"><li>- Limite d'une fonction</li></ul> | • Déterminer la limite d'une fonction : <ul style="list-style-type: none"><li>- en utilisant les limites de référence ou une</li></ul> |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>composée.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Limite d'une fonction monotone sur un intervalle ouvert</li> </ul> <p>• Branches paraboliques de direction (OI) et (OJ) dans un repère (O, I, J).</p> <p>• Continuité sur un intervalle :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Opérations, composée (propriétés admises).</li> <li>- Image d'un intervalle.</li> </ul> <p>• Fonction continue et strictement monotone sur un intervalle :</p> <p><b>Théorème 1 :</b> si <math>f</math> est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle <math>I</math>, alors <math>f</math> est une bijection de <math>I</math> sur <math>f(I)</math>. sa bijection réciproque <math>f^{-1}</math> est continue et de même sens de variation que la fonction <math>f</math></p>                                                                                                                                                        | <p>expression conjuguée ;</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- en ayant recours à la définition d'un nombre dérivé.</li> </ul> <p>• Déterminer la limite d'une fonction composée.</p> <p>• interpréter graphiquement :</p> $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \text{ (resp. } -\infty \text{)}$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \text{ (resp. } -\infty \text{)}$ <p>• Démontrer qu'une courbe admet une branche parabolique de direction (OI)(reps. (OJ) )</p> <p>• Déterminer l'image d'un intervalle par une fonction continue :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- en utilisant le tableau de variations ;</li> <li>- en utilisant une méthode algébrique.</li> </ul> <p>• Démontrer qu'une fonction réalise une bijection d'un intervalle <math>I</math> sur un intervalle <math>J</math> dans le cas où <math>f</math> est donnée par une formule explicite, déterminer <math>f^{-1}(x)</math>.</p> |
| <p><b>Théorème 2 :</b> si <math>f</math> est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle <math>I</math>, alors pour tout <math>m</math> de <math>f(I)</math>, l'équation <math>f(x) = m</math> admet une unique solution dans <math>I</math>.</p> <p>Corollaire : soit <math>f</math> une fonction continue et strictement monotone sur <math>[a, b]</math>. Si <math>f(a)</math> et <math>f(b)</math> sont des signes contraires, alors l'équation <math>f(x) = 0</math> admet une unique solution dans l'intervalle ouvert <math>]a, b[</math>.</p> <p>• Fonctions du type :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- <math>x \mapsto \sqrt[n]{x}</math>, (<math>n \in \mathbb{N}^*</math>)</li> <li>- <math>x \mapsto x^r</math> (<math>r \in \mathbb{Q}</math>, <math>x \in \mathbb{R}^{+*}</math>).</li> </ul> <p>Définitions ; notons <math>x^{\frac{p}{q}}</math></p> <p>Propriétés des puissances d'exposants rationnels</p> | <p>• Prouver l'existence d'une unique solution de l'équation : <math>f(x) = m</math> sur un intervalle <math>I</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |

## Activité 1

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{1}{x^3}$

a- Complète le tableau suivant

| $x$    | - 3000000 | - 2000000 | - 1000000 | 0 | 1000000 | 2000000 | 3000000 |
|--------|-----------|-----------|-----------|---|---------|---------|---------|
| $f(x)$ |           |           |           |   |         |         |         |

b- Donne la valeur de  $x$  pour la quelle  $f$  n'est pas définie.

c- Que peux-tu conclure quand  $x$  tend vers  $-\infty$  ou  $+\infty$  ?

## Activité 2

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^3$

a- Complète le tableau suivant

| $x$    | - 3000000 | - 2000000 | - 1000000 | 0 | 1000000 | 2000000 | 3000000 |
|--------|-----------|-----------|-----------|---|---------|---------|---------|
| $f(x)$ |           |           |           |   |         |         |         |

b- Que peux-tu conclure quand  $x$  tend vers  $-\infty$  ou  $+\infty$  ?

### 1) Propriétés sur les limites :

#### a) Propriété 1

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

#### b) Propriété 2

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{K}{x^n} = 0 \quad (K \in \mathbb{R})$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3} = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{K}{x^n} = 0 \quad (K \in \mathbb{R})$$

#### c) Propriété 3 :

Si  $k$  est un réel non nul alors :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{k}{x} = \infty \quad (\text{le signe de } \infty \text{ dépend du signe du zéro et du signe de } k).$$

### 2) Opération sur les limites

#### a) Somme :

|         |          |                        |           |           |                    |
|---------|----------|------------------------|-----------|-----------|--------------------|
| $f$     | $l$      | $l$                    | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$          |
| $g$     | $l'$     | $+\infty$ ou $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$          |
| $f + g$ | $l + l'$ | $+\infty$ ou $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | Forme indéterminée |

#### b) Produit :

|     |     |            |     |          |
|-----|-----|------------|-----|----------|
| $f$ | $l$ | $l \neq 0$ | $0$ | $\infty$ |
|-----|-----|------------|-----|----------|

|             |              |                           |                    |                           |
|-------------|--------------|---------------------------|--------------------|---------------------------|
| $g$         | $l'$         | $\infty$                  | $\infty$           | $\infty$                  |
| $f \cdot g$ | $l \cdot l'$ | $\infty$ règle des signes | Forme indéterminée | $\infty$ règle des signes |

**c) Quotient:**

|               |                |                                  |                    |          |                           |                    |
|---------------|----------------|----------------------------------|--------------------|----------|---------------------------|--------------------|
| $f$           | $l$            | $l$                              | 0                  | $l$      | $\infty$                  | $\infty$           |
| $g$           | $l' \quad 0$   | $l'=0$                           | 0                  | $\infty$ | $l$                       | $\infty$           |
| $\frac{f}{g}$ | $\frac{l}{l'}$ | +/- $\infty$ à gauche / à droite | Forme indéterminée | 0        | $\infty$ règle des signes | Forme indéterminée |

**NB :**

On remarque ainsi que l'on a quatre (4) formes indéterminées qui sont :

$$-\infty + \infty ; \quad 0 \quad \infty ; \quad \frac{0}{0} ; \quad \frac{\infty}{\infty}.$$

**3) Limite des fonctions polynômes et rationnelles à l'infini.**

**a) Limite d'une fonction polynôme à l'infini**

La limite d'une fonction polynôme en  $+\infty$  ou en  $-\infty$  est égale à la limite de son terme du plus haut degré.

**Exemple :**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - 2x^2 + 3x = \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^2 = -2(-\infty)^2 = -\infty.$

**b) Limite d'une fonction rationnelle à l'infini :**

La limite d'une fonction du rationnelle en  $+\infty$  ou en  $-\infty$  est égale à la limite du quotient des termes du plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

**Exemple :**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x + 4x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1 + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 4x = +\infty$

**N.B :** La propriété sur les limites des fonctions polynômes et des fonctions rationnelles ne peut être utilisée qu'en  $+\infty$  ou en  $-\infty$ .

En aucun cas, elle ne peut être utilisée lorsque  $x$  tend vers un nombre réel.

#### 4) Limite de la composée de deux fonctions :

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions et  $f \circ g$  leur composée définie sur un intervalle  $I$  contenant «  $a$  » où  $a$  est une borne.

Si

$$: \lim_{x \rightarrow a} g(x) = l \quad \text{et} \quad \text{si} \quad \lim_{x \rightarrow l} f(x) = l' \quad \text{alors} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = l' \quad x \rightarrow a$$

#### 5) Limite des fonctions circulaires :

Si  $a$  est un nombre réel non nul, on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{ax \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{ax \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{ax} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{ax \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(ax)}{(ax)^2} = \frac{1}{2}$$

#### 6) Limite à gauche – Limite à droite de $x_0$

##### a) Limite à gauche de $x_0$

On appelle limite à gauche d'un réel  $x_0$  d'une fonction  $f$ , la limite lors qu'elle existe quand  $x$  tend vers  $x_0$  par valeurs inférieures on note :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x).$$

##### b) Limite à droite de $x_0$

On appelle limite à droite d'un réel  $x_0$  en une fonction  $f$ , la limite lors qu'elle existe quand  $x$  tend vers  $x_0$  par valeurs supérieures on note :  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ .

**NB :**

Une fonction admet une limite en un point  $x_0$  si sa limite à gauche est égale à sa limite à droite.

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

### **Exemple**

Calculer la limite des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1}; & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2-4}{x^2-x-2}; & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^3-12x-16}}{x}; & \text{e) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x}{x^2-3x^3+2} & \text{f) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x^2+x+2} \end{array}$$

### **Solution**

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0} \text{ (Forme Indéterminée)}$$

**Levons l'indétermination.**

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2-5}{x^2-x-2}$$

$$x \rightarrow -1^+$$

Puisque la limite est étudiée à droite de -1, alors cherchons le signe du dénominateur  $x^2-x-2$  à droite de -1

$$\text{Posons : } x^2-x-2=0 \Rightarrow x_1 = -1 \text{ ou } x_2 = 2$$

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | $2$ | $+\infty$ |
|-----|-----------|------|-----|-----------|
|     |           |      |     |           |

$$x^2 - x - 2 \quad + \quad 0 \quad - \quad 0 \quad +$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - 5}{x^2 - x - 2} = \frac{-4}{0^-} = +\infty$$

**NB :** Le signe du zéro ( $0^-$ ) provient de l'étude du signe du dénominateur à droite de - 1

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} = \frac{0}{0} \text{ (Forme Indéterminée)}$$

**Levons l'indétermination.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}+1}{\sqrt{x^2+1}+1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1)}{x(\sqrt{x^2+1}+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2+1})^2 - 1^2}{x(\sqrt{x^2+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 1 - 1}{x(\sqrt{x^2+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x(\sqrt{x^2+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{(\sqrt{x^2+1}+1)} = \frac{0}{1} = 0$$

$x \rightarrow$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \int_4^5 \sqrt{x^3 - 12x - 16} = \frac{0}{0} \text{ (forme indéterminée)}$$

**Levons l'indétermination.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_4^5 \sqrt{x^3 - 12x - 16} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} 5}{5} \cdot \int_4^5 \sqrt{x^3 - 12x - 16} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} 5}{2} \cdot \frac{\sin 5x}{5x} = \frac{5}{2}$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-x}{x^2-3x^3+2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x^2 + x + 2} = +\infty - \infty \text{ (forme indéterminée)}$$

**Levons l'indétermination.**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 + x + 2})(x + \sqrt{x^2 + x + 2})}{(x + \sqrt{x^2 + x + 2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - (\sqrt{x^2 + x + 2})^2}{x + \sqrt{x^2 + x + 2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - (x^2 + x + 2)}{x + \sqrt{x^2 + x + 2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x^2 - x - 2}{x + \sqrt{x^2 + x + 2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x-2}{x + \sqrt{x^2 + x + 2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x-2}{x + \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x-2}{x + |x| \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x-2}{x + x \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x-2}{x \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x} =$$

$$-1$$

## 7) Théorème sur les limites

### a- Théorème des gendarmes :

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ .

Si  $f(x)$  Répond à l'inégalité :  $A(x) \leq f(x) \leq B(x)$ .

$$\text{et si } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty} A(x) = l \\ \text{et} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} B(x) = l \end{cases} \text{ alors } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$$

### Exemple

En utilisant le théorème des gendarmes, calculé  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \sin x}{x + 1}$

$$x \rightarrow +\infty$$

### Solution

On sait que :  $-1 \leq \sin x \leq 1$

En ajoutons 2 à chaque membre de l'inégalité, on a :

$$1 \leq 2 + \sin x \leq 3$$

En divisant chaque membre de l'inégalité par  $x+1$ , on a :

$$\frac{1}{x+1} \leq \frac{2 + \sin x}{x+1} \leq \frac{3}{x+1}$$

En appliquant la limite à chaque membre de l'inégalité, on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \sin x}{x+1} \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x+1}$$

$$\text{Or } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = 0 \\ \text{et} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x+1} = 0 \end{cases}$$

Ainsi en appliquant le théorème des Gendarmes, on a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \sin x}{x+1} = 0$

$$x \rightarrow +\infty$$

### b- Théorème de l'Hôpital :

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions continues et dérivables en un point  $x_0$ .

Si  $f(x_0) = g(x_0) = 0$  et  $g'(x_0) \neq 0$ , alors :  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$

### Exemple

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies par :  $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2 - 3x + 2}$  et

$$g(x) = x^2 - 5x + 4$$

a) Etudier la continuité de  $f$  et  $g$  en  $x_0 = 1$

b) Calculer  $g'(1)$  et  $f'(1)$  puis en déduire  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)}$

$x \rightarrow 1$

### Solution

a) Etudions la continuité de  $f$  et  $g$  en  $x_0 = 1$

**- Etude de la continuité de  $f$  en  $x_0 = 1$**

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{x^2 - 3x + 2} = \frac{0}{0} = \text{F.I.}$$

Levons l'indétermination :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x-2} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$$

**- Etude de la continuité de  $g$  en  $x_0 = 1$**

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 5x + 4 = 1 - 5 + 4 = 0$$

Alors  $f(1) = g(1) = 0$  d'autre part  $f'(1) = -1$  et  $g'(1) = -3 \neq 0$

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(1)}{g'(1)} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

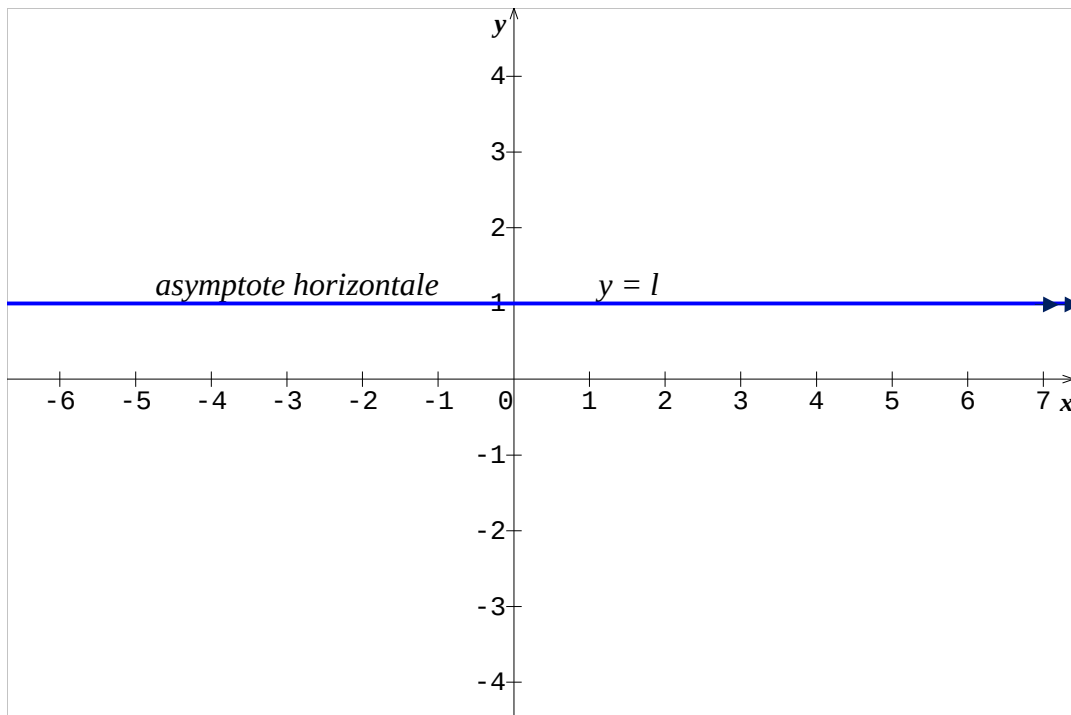
### **6) Interprétation graphique de la limite d'une fonction :**

- Si  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$  ou  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$  (alors la droite d'équation  $y = l$ ) est asymptote

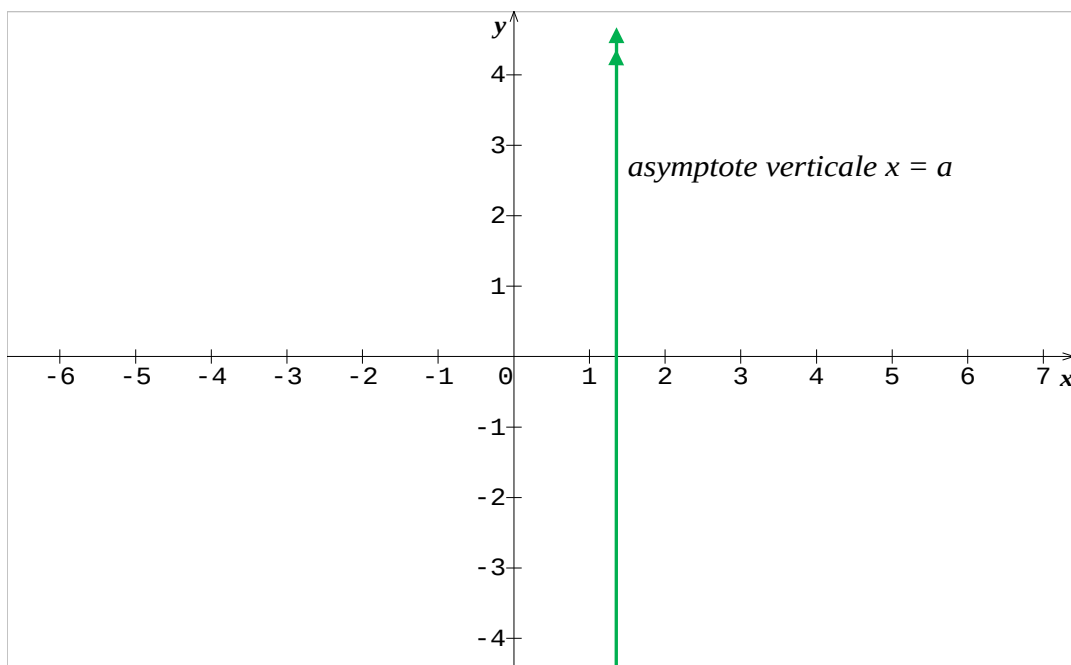
$$x \rightarrow -\infty$$

$$x \rightarrow +\infty$$

**Horizontale** à la courbe représentative de  $f$ .



- Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  ou  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$  (alors la droite d'équation  $x = a$ ) est asymptote **verticale** à la courbe représentative de  $f$ .

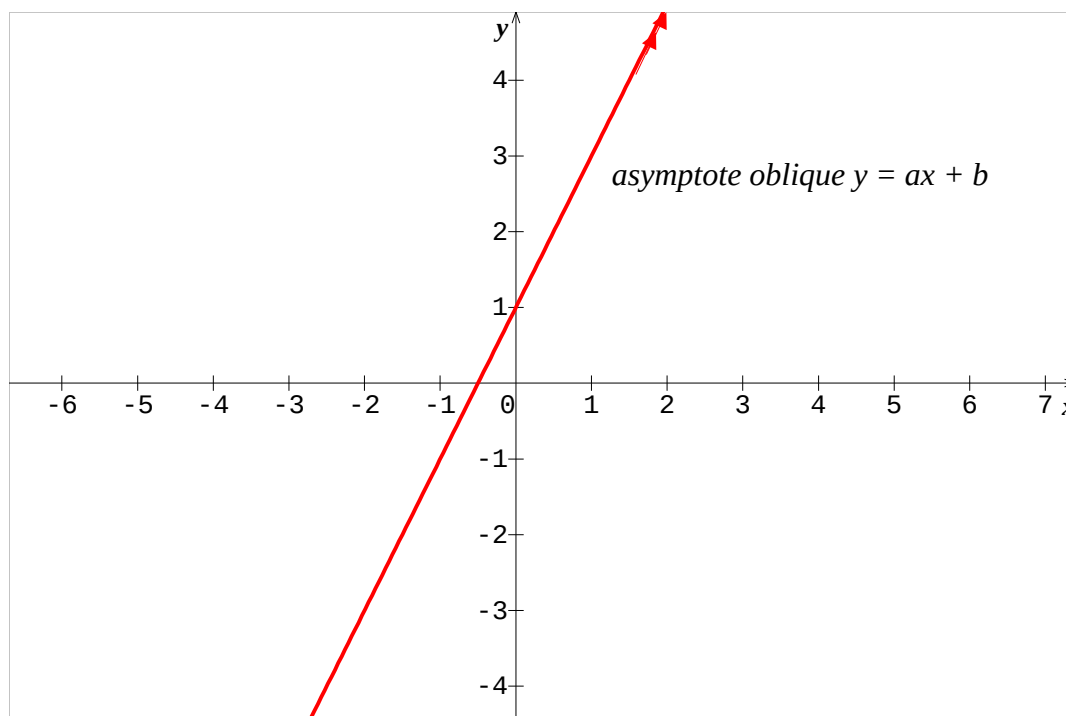


- Si  $\lim [ f(x) - (ax+b) ] = 0$  ou  $\lim [ f(x) - (ax+b) ] = 0$

$x \rightarrow +\infty$

$x \rightarrow -\infty$

(alors la droite d'équation  $y = ax + b$  est asymptote **oblique** à la courbe représentative de  $f$ ).



### III- Dérivation :

#### Objectifs

Ce chapitre vise à :

- consolider les notions abordées en classe de première telles que la détermination du sens de variation d'une fonction et la recherche de tangentes à une courbe en des points donnés ;
- consolider la notion de dérivé et l'étendre à la composée de deux fonctions dérivables ;
- compléter les théorèmes concernant la dérivabilité par les notions de dérivabilité à gauche et de dérivabilité à droite ;
- utiliser des propriétés des fonctions dérivables pour démontrer des inégalités ou établir des encadrements.

#### Savoirs et savoir-faire

| SAVOIRS                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | SAVOIR-FAIRE                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>Dérivées successives ; nouvelle notations.</li> </ul> $\frac{df}{dx} ; \frac{d^2f}{dx^2}$ <ul style="list-style-type: none"> <li>Si une fonction est dérivable sur un intervalle, alors elle continue sur cet intervalle.</li> <li>Dérivée d'une fonction composée (admise) ; application à la dérivation des fonctions de la forme : <math>u^n \ (n \in \mathbb{Z}^*) ; \sqrt{u}</math></li> <li>Existence de la dérivée d'une fonction réciproque (admise), formule de la dérivée de la fonction réciproque.</li> <li>Dérivée des fonctions puissances d'exposants rationnels.</li> <li>Inégalité des accroissements finis (2 formes)</li> <li>nombre dérivé à droite (à gauche) d'une fonction en un point.</li> <li>Demi-tangente</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>Démontrer qu'une fonction composée est dérivable en un point et savoir calculer le nombre dérivé en ce point.</li> <li>Préciser l'ensemble des éléments où la fonction réciproque d'une fonction donnée est dérivable.</li> <li>Déterminer le nombre dérivé de la fonction réciproque en un point <math>x_0</math></li> <li>Utiliser l'inégalité des accroissements finis pour : <ul style="list-style-type: none"> <li>démontrer une inégalité ;</li> <li>établir un encadrement.</li> </ul> </li> <li>Etudier la dérivabilité d'une fonction définie par intervalles en un point de raccordement.</li> <li>Interpréter graphiquement la dérivabilité à droite (resp. à gauche) d'une fonction en un point <math>x_0</math>.</li> </ul> |

### 1) Nombre dérivé en un point $x_0$ :

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant  $x_0$ .

On dit que  $f$  est dérivable en  $x_0$  si et seulement si la quantité  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  admet une limite finie quand  $x$  tend vers  $x_0$ . Cette limite est appelée **nombre dérivé en  $x_0$  et est noté  $f'(x_0)$** . C'est-à-dire :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

**N.B :**  $f$  est dérivable en  $x_0$  est équivalente que la quantité  $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$  admet une limite finie quand  $h$  tend vers zéro ; il suffit de poser  $h = x - x_0$

$f$  est dérivable en  $x_0$  si elle admet un nombre dérivé  $f'(x_0)$

### 2) Lien entre la notion de limite et de continuité :

Toute fonction dérivable en un point  $x_0$  est continue en  $x_0$ .

**N.B** : La réciproque est inexacte.

### 3) Nombre dérivé à gauche – Nombre dérivée à droite

#### a) Nombre dérivé à gauche :

Si  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  existe et est finie, alors on dit que  $f$  est dérivable à gauche en  $x_0$ .

On la note  $f'_g(x_0)$

#### b) Nombre dérivé à droite :

Si  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  Existe et est finie, alors on dit que  $f$  est dérivable à droite en  $x_0$ .

On la note  $f'_d(x_0)$

### Théorème :

si  $f$  est dérivable à gauche et à droite en  $x_0$  et si les deux nombres dérivés sont égaux alors  $f$  est dérivable en  $x_0$  et on a :

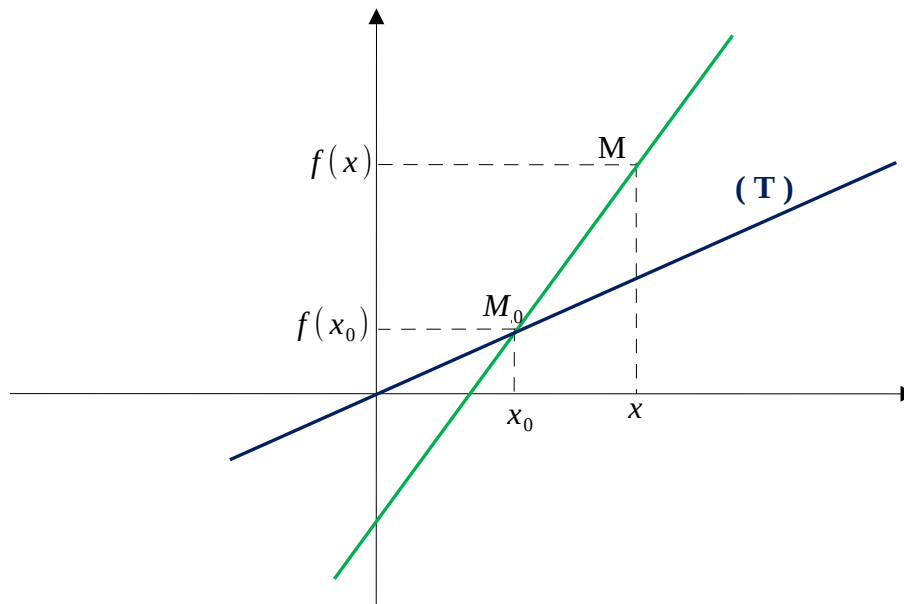
$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

### 4) Interprétation graphique d'un nombre dérivé

Soit  $f$  une fonction numérique d'une variable réelle et  $(C)$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O ; I ; J)$

Soit  $M_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  un point fixé de  $(C)$ .  $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  un point courant de  $(C)$  ; construisons la droite  $(M_0M)$ . Lorsque  $x$  tend vers  $x_0$  la droite  $(M_0M)$  vient occuper une position limite

$(M_0T)$  appelée tangente à la courbe  $(C)$  au point  $M_0\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix}\right)$ ;  $f'(x_0)$  est appelé pente ou coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de  $f$  au point  $M_0\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix}\right)$



a) **Equation de la tangente au point d'abscisse  $x_0$ :**  $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Si le nombre dérivé à gauche et le nombre dérivé à droite existent et sont différents, alors la courbe admet deux demi – tangentes en  $M_0$  de coefficients respectifs les nombres dérivés à gauche et à droite de  $x_0$  et fait un angle en ce point.

Si la courbe  $(C)$ , de la fonction  $f$  admet en un point  $x_0$ , une tangente parallèle à l'axe des abscisses alors  $f'(x_0) = 0$

## 5) Utilisation des dérivées :

Sens de variation d'une fonction.

Soit  $f$  une fonction définie par :  $x \mapsto f(x)$ . On appelle dérivée de  $f$ , la fonction  $f'$  définie par :  $f' : x \mapsto f'(x)$  nombre dérivé de la fonction  $f$  au point  $x$

### Formules sur les dérivées :

#### Dérivées usuelles :

| Fonctions     | Dérivées | Domaines de dérivabilité |
|---------------|----------|--------------------------|
| a (constante) | 0        | $\mathbb{R}$             |

|                           |                                                          |                                                                   |
|---------------------------|----------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|
| $ax$                      | $a$                                                      | $\mathbb{R}$                                                      |
| $ax^n$                    | $nax^{n-1}$                                              | $\mathbb{R}$                                                      |
| $\frac{a}{x^n}$           | $\frac{-nax^{n-1}}{x^{2n}}$                              | $\mathbb{R}^*$                                                    |
| $\sqrt{x}$                | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$                                    | $\mathbb{R}_+^*$                                                  |
| $\sqrt{ax+b}$             | $\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$                                 | $\mathbb{R}_+$                                                    |
| $\cos x$                  | $-\sin x$                                                | $\mathbb{R}$                                                      |
| $\sin x$                  | $\cos x$                                                 | $\mathbb{R}$                                                      |
| $\operatorname{Tgx}$      | $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$         | $\mathbb{R} - \left\{ \frac{k\pi}{2} \right\}$                    |
| $\cos(ax+b)$              | $-a\sin(ax+b)$                                           | $\mathbb{R}$                                                      |
| $\sin(ax+b)$              | $a\cos(ax+b)$                                            | $\mathbb{R}$                                                      |
| $\operatorname{tg}(ax+b)$ | $\frac{a}{\cos^2(ax+b)} = 1 + \operatorname{tg}^2(ax+b)$ | $\mathbb{R} - \{ax+b \mid \frac{k\pi}{2}\}$<br>$k \in \mathbb{Z}$ |

### Opérations sur les dérivées :

| Fonctions                                | Dérivées                          |
|------------------------------------------|-----------------------------------|
| $u + v$                                  | $U' + v'$                         |
| $au \quad (a \in \mathbb{R})$            | $au'$                             |
| $(u)(v)$                                 | $u'v + v'u$                       |
| $\frac{a}{u} \quad (a \in \mathbb{R})$   | $\frac{-au'}{u^2}$                |
| $\frac{u}{v}$                            | $\frac{(u')(v) - (v')(u)}{(v)^2}$ |
| $(u)^n$                                  | $n(u')(u)^{n-1}$                  |
| $\frac{a}{u^n} \quad (a \in \mathbb{R})$ | $\frac{-na u' u^{n-1}}{u^{2n}}$   |
| $\sqrt{u}$                               | $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$            |
| $\cos(u)$                                | $-u'\sin(u)$                      |
| $\sin(u)$                                | $u'\cos(u)$                       |
| $\operatorname{tg}(u)$                   | $\frac{u'}{\cos^2 u}$             |
| $u = (g \circ f)(x)$                     | $u' = f'(x) g'(f(x))$             |

### 6) Dérivée de la réciproque d'une fonction f :

Soit  $f$  une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle  $I$ .

Alors  $f$  réalise une bijection de  $I$  sur  $f(I)$  et admet une bijection  $f^{-1}$  de  $f(I)$  dans  $I$

Ayant même sens de variation que  $f$

Pour calculer  $(f^{-1})'(x_0)$ , on peut procéder comme suite :

- On détermine la solution de l'équation  $f'(x) = 0$
- On calcule  $f''(x)$  et on vérifie que  $f''(x) \neq 0$
- On conclue  $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

## b) Sens de variation d'une fonction.

### Théorème :

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ . On retient que les variations d'une fonction dépendent du signe de sa dérivée. Ainsi :

- Si  $f'(x) < 0$  pour tout  $x \in I$ , alors  $\forall x \in I$ ,  $f$  est strictement décroissante.
- Si  $f'(x) > 0$  pour tout  $x \in I$ , alors  $\forall x \in I$ ,  $f$  est strictement croissante.
- Si  $f'(x) = 0$  pour tout  $x \in I$ , alors  $\forall x \in I$ ,  $f$  est constante ou stationnaire

### N.B :

Les variations d'une fonction peuvent être résumées dans un tableau appelé tableau de variation de  $f$ . Ainsi un tableau de variation comporte les éléments suivants :

- Domaine de définition
- Valeurs pour lesquelles la dérivée s'annule
- Des flèches croissantes et décroissantes montrant les variations de  $f$ .
- Une courbe ( $C_f$ ) admet en un point  $A(x_0; y_0)$  une tangente horizontale ou une tangente parallèle à l'axe des abscisses si et seulement si :  $f'(x_0) = 0$ .
- Une courbe ( $C_f$ ) admet en un point  $A(x_0; y_0)$  une tangente de coefficient directeur  $a$  si et seulement si :  $f'(x_0) = a$ .

## 8) Extremum d'une fonction :

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant  $x_0$ . Si  $f'(x)$  s'annule en changeant de signe en passant par  $x_0$ , alors  $f$  admet un extremum en  $x_0$ .

Si  $f'(x)$  passe du signe négatif au signe positif on dit que  $f$  présente un minimum  
Si  $f'(x)$  passe du signe positif au signe négatif on dit que  $f$  présente un maximum

Ainsi on dit que :  $(C_f)$  admet une tangente horizontale en  $M_0(x_0; f(x_0))$

## Exemple

- 1) Etudier la dérivabilité de la fonction  $f$  au point  $x_0$  donné :

$$\left\{ \begin{aligned} f(x) &= \frac{(x-2)^2}{x^2+x-6} \end{aligned} \right. \text{iiii}$$

2) Calculer la fonction dérivée  $f'(x)$  de la fonction  $f(x)$  :

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 3x - 5}{x^3 - 2}$$

3) Ecrire une équation de la tangente (T) à la courbe (C) de  $f$  aux points  $x_0$  :

$$f(x) = \cos^2\left(\frac{x\pi}{6}\right); \text{ on donne } x_0 = 2$$

4) Dresser le tableau de variation de la fonction suivante :  $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$

### Solution

1) Etudions la dérivabilité de la fonction  $f$  au point  $x_0$  :

$$\left\{ \begin{aligned} f(x) &= \frac{(x-2)^2}{x^2+x-6} \end{aligned} \right. \text{iiii}$$

$f$  est dérivable en  $x_0 = 2$  si  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = l$  avec ( $l \in \mathbb{R}$ )

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{(x-2)^2}{x^2+x-2}}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x^2+x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x-2)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{(x-2)^2(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-1} = 1 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Alors  $f$  est dérivable en  $x_0 = 2$  et son nombre dérivé est  $f'(2) = 1$

2) Calculer la fonction dérivée  $f'(x)$  de la fonction  $f(x) = \frac{-x^2 + 3x - 5}{x^3 - 2}$ .

$$f(x) = \frac{-x^2 + 3x - 5}{x^3 - 2} \quad \left| \begin{array}{l} U(x) = -x^2 + 3x - 5 \Rightarrow U'(x) = -2x + 3 \\ V(x) = x^3 - 2 \Rightarrow V'(x) = 3x^2 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(U'(x))(V(x)) - (V'(x))(U(x))}{(V(x))^2} = \frac{(-2x + 3)(x^3 - 2) - (3x^2)(-x^2 + 3x - 5)}{(x^3 - 2)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{x^4 - 6x^3 + 15x^2 + 4x - 6}{(x^3 - 2)^2}$$

3) Ecrivons une équation de la tangente (T) à la courbe (C) de  $f$  aux points  $x_0$  :

$$f(x) = \cos^2\left(\frac{x\pi}{6}\right); \text{ on donne } x_0 = 2$$

L'équation de la tangente (T) à la courbe (C) de  $f$  aux points  $x_0 = 2$  est :

$$y = f'(2)(x - 2) + f(2)$$

$$U(x) = \cos\left(\frac{x\pi}{6}\right) \Rightarrow \left| \begin{array}{l} U'(x) = -\frac{\pi}{6}\sin\left(\frac{x\pi}{6}\right) \\ f(x) = \cos^2\left(\frac{x\pi}{6}\right) \end{array} \right.$$

$$n=2 \Rightarrow U^{n-1}(x) = \cos\left(\frac{x\pi}{6}\right)$$

$$\Rightarrow f'(x) = n(U'(x))(U^{n-1}(x))$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2 \left[ \left( -\frac{\pi}{6} \sin\left(\frac{x\pi}{6}\right) \right) \left( \cos\left(\frac{x\pi}{6}\right) \right) \right] \Rightarrow f'(2) = -\frac{\pi\sqrt{3}}{12} \text{ et } f(2) = \frac{1}{4}$$

$$\text{D'où : } y = -\frac{\pi\sqrt{3}}{12}(x - 2) + \frac{1}{4} \Rightarrow y = -\frac{\pi\sqrt{3}}{12}x + \frac{2\pi\sqrt{3} + 3}{12}$$

4) Dressons le tableau de variation de la fonction  $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$

$$D_f = \mathbb{R} - \{-1\} = ]-\infty; -1[ \cup ]-1; +\infty[$$

|       |           |      |           |
|-------|-----------|------|-----------|
| $x$   | $-\infty$ | $-1$ | $+\infty$ |
| $x+1$ |           | $-$  | $+$       |

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} \quad \left| \begin{array}{l} U(x) = x^2 + 2x + 2 \Rightarrow U'(x) = 2x + 2 \\ V(x) = x + 1 \Rightarrow V'(x) = 1 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(U'(x))(V(x)) - (V'(x))(U(x))}{(V(x))^2} = \frac{(2x + 2)(x + 1) - (1)(x^2 + 2x + 2)}{(x + 1)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x + 1)^2} \quad \text{or } \forall x \in Df, (x + 1)^2 > 0$$

Alors le signe de  $f'(x)$  dépend donc du signe du numérateur  $x^2 + 2x$ .

$$\text{Posons } x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -2$$

D'où le tableau de variation de  $f$  est le suivant :

|         |           |      |      |     |           |
|---------|-----------|------|------|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $+\infty$ |
| $f(x)$  | +         | -    | -    | +   |           |
| $f'(x)$ | $-\infty$ |      |      | 2   | $+\infty$ |

$$f(-2) = -2 \quad \text{et} \quad f(0) = 2$$

## IV- Etude de fonctions :

### 3) Parité et périodicité d'une fonction :

#### a) Fonction paire :

Une fonction  $f$  est dite paire si et seulement si :

$$\forall x \in Df \text{ et } -x \in Df ; f(-x) = f(x)$$

#### b) Fonction impaire :

Une fonction  $f$  est dite impaire si et seulement si :

$$\forall x \in Df \text{ et } -x \in Df ; f(-x) = -f(x)$$

#### c) Fonction Périodique :

Une fonction  $f$  est dite périodique de période  $T$  s'il existe un nombre réel  $T$  tel que

$$\forall x \in Df \text{ et } x + T \in Df ; f(x + T) = f(x).$$

#### Remarque :

- La fonction  $\cos x$  est paire car  $\cos(-x) = \cos x$
- La fonction  $\sin x$  est impaire car  $\sin(-x) = -\sin x$
- Les fonctions  $\cos(ax + b)$  et  $\sin(ax + b)$  sont périodiques et de période  $T = \frac{2\pi}{|a|}$

### Exemple

Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{1+\cos 3x}{\cos^3 x}$  et (C) sa courbe.

- 1) Déterminer l'ensemble de définition  $D_f$  de  $f$ .
- 2) Etudier la périodicité la parité de  $f$  puis en déduire que  $D_f$  peut se réduire à  $[0 ; \pi]$
- 3) Montrer que  $\forall x \in Df$  on a :  $f'(x) = \frac{3(1-2\cos x)\sin x}{\cos^4 x}$
- 4) Dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $[0 ; \pi]$ .

### Solution

Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{1 + \cos 3x}{\cos^3 x}$  et (C) sa courbe

1) Déterminons l'ensemble de définition  $Df$

$$Df = \left\{ x / x \in \mathbb{R} ; \cos^3 x \neq 0 \right\}$$

$$\cos^3 x \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq \cos \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow Df = \left] -\infty ; -\frac{\pi}{2} \right[ \cup \left] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right[ \cup \left] \frac{\pi}{2} ; +\infty \right[$$

2) Etude de la parité et de la périodicité de  $f$

$$\text{- Parité : } f(-x) = \frac{1 + \cos(-3x)}{\cos^3(-x)} = \frac{1 + \cos 3x}{\cos^3 x} = f(x)$$

Alors  $f$  est paire et admet donc l'axe  $y'Oy$  comme axe de symétrie.

$$\text{- Périodicité : } T_1 = \frac{2\pi}{3} \text{ et } T_2 = \frac{2\pi}{1} = 2\pi \Rightarrow T = T_1 \cap T_2 = 2\pi$$

Alors l'étude peut donc se faire sur le domaine  $\left[ -\frac{T}{2} ; \frac{T}{2} \right]$

$$\Leftrightarrow Df = \left[ -\frac{2\pi}{2} ; \frac{2\pi}{2} \right] \Rightarrow Df = [-\pi ; \pi]$$

Et puisque la fonction  $f$  est paire alors nous pouvons résumer le domaine d'étude à  $[0 ; \pi]$ .

$$D'où  $Df = [0 ; \pi]$$$

$$3) \text{ Montrons que } \forall x \in Df, \text{ on a : } f'(x) = \frac{3(1 - 2\cos x)\sin x}{\cos^4 x}$$

$$f(x) = \frac{1 + \cos 3x}{\cos^3 x} \begin{cases} u = 1 + \cos 3x \Rightarrow u' = -3\sin 3x \\ v = \cos^3 x \Rightarrow v' = -3\sin x \cos^2 x \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{-3\cos^3 x \cdot \sin 3x + 3\sin x \cos^2 x (1 + \cos 3x)}{\cos^6 x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{3\cos^2 x (-\cos x \sin 3x + \sin x + \sin x \cos 3x)}{\cos^6 x}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow f'(x) &= \frac{3(\sin x \cdot \cos 3x - \sin 3x \cos x + \sin x)}{\cos^4 x} \\
\Rightarrow f'(x) &= \frac{3(\sin(x - 3x) + \sin x)}{\cos^4 x} = \frac{3(-2\cos x + 1)\sin x}{\cos^4 x} \\
\Rightarrow f'(x) &= \frac{3(-2\cos x \sin x + \sin x)}{\cos^4 x} = \frac{3(-2\cos x + 1)\sin x}{\cos^4 x} \\
\Rightarrow f'(x) &= \frac{3(1 - 2\cos x)\sin x}{\cos^4 x}
\end{aligned}$$

4) Etude du signe de  $(1 - 2\cos x)$  sur  $D_E$  puis de variations de  $f$ .

$$1 - 2\cos x = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

D'autre par  $\forall x \in [0; \pi]$ ;  $\sin x > 0$  et  $\cos^4 x > 0$   
Donc le signe dépend de  $1 - 2\cos x$

D'où le tableau de variation de  $f$  est le suivant :

| $x$     | 0 | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |   |
|---------|---|-----------------|-----------------|---|
| $f'(x)$ | - | +               | +               |   |
| $f(x)$  | 2 |                 | $+\infty$       | 0 |

$$f(-2) = -2 \quad \text{et} \quad f(0) = 2$$

#### 4) Courbes symétriques :

##### a) Axe de symétrie :

La droite d'équation  $x = a$  est dite **axe de symétrie** pour la courbe (Cf) de  $f$  si :

- $f(2a - x) = f(x)$   
ou
- $f(a + x)$  est paire

- ou
- $f(a + x) = f(a - x)$

**b) Centre de symétrie :**

Le point  $I\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$  est dit centre de symétrie pour la courbe (Cf) de f si

- $f(2a - x) + f(x) = 2b$
- ou
- $f(a + x) - b$  est paire
- ou
- $f(a + x) + f(a - x) = 2b$

**N.B :**

- Toute fonction paire admet l'axe ( $y' \text{ o } y$ ) comme axe de symétrie.
- Toute fonction impaire admet le point  $O\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$  (origine du repère) comme centre de symétrie.

**c) Recherche de centre de symétrie et d'axe de symétrie :**

- **Centre de symétrie :**

Soit  $f$  une fonction rationnelle définie par :  $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{\gamma x + \beta}$  et (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé ( $O ; \vec{i} ; \vec{j}$ ) où :  $a ; b ; c ; \gamma ; \beta$  sont tous des réels avec :  $a \neq 0$  et  $\gamma x + \beta \neq 0$ .

Si  $f$  peut se mettre sous la forme :  $f(x) = a'x + b' + \frac{c'}{\gamma x + \beta}$

Alors le centre de symétrie à la courbe (C) de  $f$  a pour coordonnée :

$$I\left(\begin{array}{l} x_0 = \frac{-\beta}{\gamma} \\ y_0 = a'x_0 + b' \end{array}\right)$$

- **Axe de symétrie :**

Soit  $f$  une fonction polynôme du second degré définie par :  $f(x) = ax^2 + bx + c$  avec ( $a \neq 0$ )

Si  $f$  peut se mettre sous la forme :  $f(x) = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$

Alors l'axe de symétrie de la courbe (C) de  $f$  a pour équation  $x = -\frac{b}{2a}$ .

### **Exemple**

1) Pour chacune des fonctions données, vérifiez si la droite d'équation  $x = a$  est un axe de symétrie pour la courbe (C) de  $f$ .

a)  $f(x) = x^2 + 2x + 3$  et  $a = -1$

b)  $f(x) = 3x^2 - 2x + 3$  et  $a = \frac{1}{2}$

2) Pour chacune des fonctions données, vérifiez si le point  $I \left( \frac{a}{b} \right)$  est un centre de symétrie pour la courbe (C) de  $f$ .

a)  $f(x) = \frac{3x^3 - x^2 + 4}{3x^2 - 12}$  et  $I \left( \frac{0}{-1} \right)$

b)  $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$  et  $I \left( \frac{-1}{0} \right)$

### **Solution**

1) Pour chacune des fonctions données, vérifions si la droite d'équation  $x = a$  est un axe de symétrie pour la courbe (C) de  $f$ .

a)  $f(x) = x^2 + 2x + 3$  et  $a = -1$

$a = -1$  est un axe de symétrie si  $f(2a - x) = f(x)$

$f(2(-1) - x) = f(-2 - x) = (-2 - x)^2 + 2(-2 - x) + 3$

$= (2 + x)^2 + 2(-2 - x) + 3$

$= 4 + 4x + x^2 - 4 - 2x + 3$

$$= x^2 - 2x + 3 = f(x)$$

Puisque  $f(-2 - x) = f(x)$  alors  $a = -1$  est un axe de symétrie pour la courbe (C) de  $f$ .

$$f(x) = 3x^2 - 2x + 3 \quad \text{et} \quad a = \frac{1}{2}$$

$$a = \frac{1}{2} \quad \text{est un axe de symétrie si} \quad f(2a - x) = f(x)$$

$$\begin{aligned} f\left(2\left(\frac{1}{2}\right) - x\right) &= f(1 - x) = 3(1 - x)^2 - 2(1 - x) + 3 \\ &= 3 - 6x + 3x^2 - 2 + 2x + 3 \\ &= 3x^2 - 4x + 4 \neq f(x) \end{aligned}$$

Puisque  $f(1 - x) \neq f(x)$  alors  $a = \frac{1}{2}$  n'est pas un axe de symétrie pour la courbe (C) de  $f$ .

2) Pour chacune des fonctions données, vérifions si le point  $I\left(\frac{a}{b}\right)$  est un centre de symétrie pour la courbe (C) de  $f$ .

$$a) \quad f(x) = \frac{3x^3 - x^2 + 4}{3x^2 - 12} \quad \text{et} \quad I\left(\frac{0}{\frac{-1}{3}}\right)$$

$$\text{Le point } I\left(\frac{0}{\frac{-1}{3}}\right) \text{ est dit centre de symétrie si } f\left(2\left(\frac{0}{\frac{-1}{3}}\right) - x\right) + f(x) = 2\left(\frac{-1}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow f(-x) + f(x) = \left(\frac{-2}{3}\right)$$

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{3(-x)^3 - (-x)^2 + 4}{3(-x)^2 - 12} = \frac{-3x^3 - x^2 + 4}{3x^2 - 12} \\ \Rightarrow f(-x) + f(x) &= \frac{-3x^3 - x^2 + 4}{3x^2 - 12} + \frac{3x^3 - x^2 + 4}{3x^2 - 12} = \frac{-2x^2 + 8}{3x^2 - 12} \neq \frac{-2}{3} \end{aligned}$$

Puisque  $f(-x) + f(x) \neq \frac{-2}{3}$  alors  $I\left(\frac{0}{\frac{-1}{3}}\right)$  n'est pas un centre de symétrie pour la courbe (C) de  $f$ .

$$b) \quad f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} \quad \text{et} \quad I\left(\frac{-1}{0}\right)$$

Le point  $I\left(-\frac{1}{0}\right)$  est dit centre de symétrie si  $f(2(-1) - x) + f(x) = 2(0)$

$$\Leftrightarrow f(-2 - x) + f(x) = 0$$

$$f(-x - 2) = \frac{(-2-x)^2 + 2(-2-x) + 2}{(-2-x) + 1}$$

$$= \frac{4 + 4x + x^2 - 4 - 2x + 2}{-2 - x + 1} = \frac{x^2 + 2x}{-x - 1}$$

$$\Rightarrow f(-x - 2) + f(x) = \frac{x^2 + 2x}{-x - 1} + \frac{x^2 + 2x - 2}{x + 1} = \frac{-x^2 - 2x - 2}{x + 1} + \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} = 0$$

Puisque  $f(-x - 2) + f(x) = 0$  alors  $I\left(-\frac{1}{0}\right)$  est un centre de symétrie pour la courbe (C)

## 5) Maximum - Minimum - Extremum - Point d'inflexion

### a) Minimum :

Soit  $f$  une fonction définie en un point  $x_0$ . S'il existe un intervalle  $I$  centré en  $x_0$  tel que

$\forall x \in I$  on a :  $f(x) \geq f(x_0)$  alors  $f$  présente un minimum en  $x_0$ . Ce minimum est  $m = f(x_0)$ .

### b) Maximum :

$f$  admet un maximum relatif au point  $x_0$ , s'il existe un intervalle  $I$  centré en  $x_0$  tel que  $\forall x \in I$  on a :  $f(x) \leq f(x_0)$ . Le maximum est  $M = f(x_0)$ .

### Théorème :

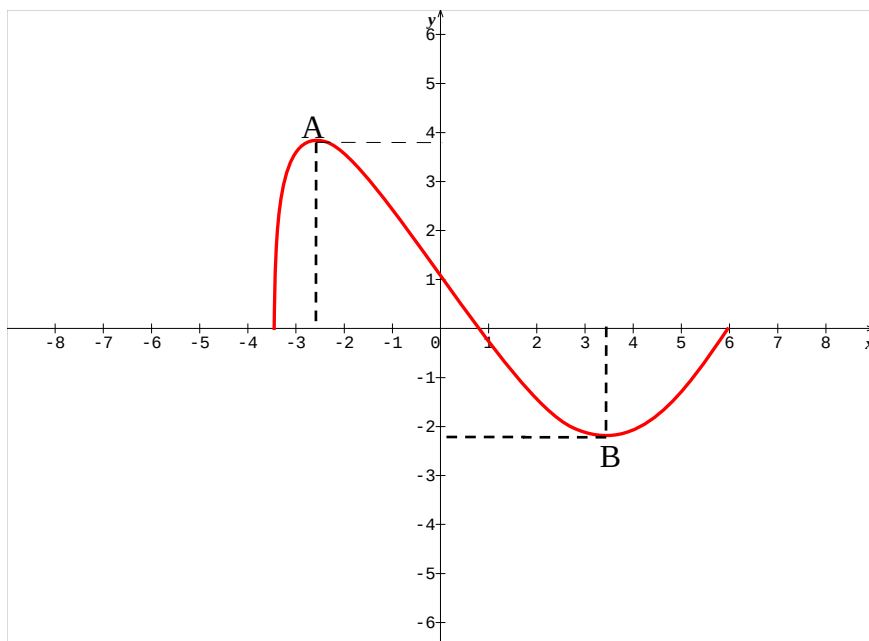
Si une fonction  $f$  est dérivable sur un intervalle  $I$  et si  $f'(x)$  s'annule en  $x_0$  et change de signe en passant par  $x_0$ , on dit alors que  $f$  présente un extremum en  $x_0$ . Cet extremum est égal à  $f(x_0)$ . Il est le minimum si  $f'$  passe du signe négatif au signe positif. Il est le maximum si  $f'$  passe du signe positif au signe négatif.

### NB :

Si  $f$  est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert  $]a; b[$ , tel que la dérivée s'annule en changeant de signe au point  $x_0$ , alors la fonction  $f$  admet un extremum relatif en  $x_0$ .

### c) Extremum :

**Le système (Maximum-Minimum) est appelé Extremum.**



- A représente le maximum relatif,
- B représente le minimum relatif,

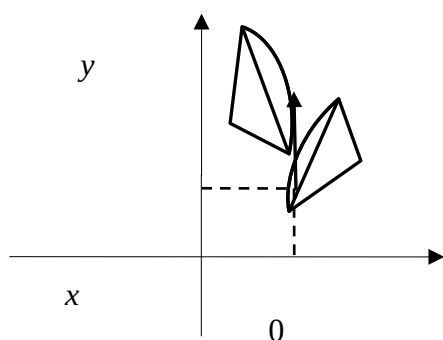
**d) Point d'inflexion :**

Soit  $f$  une fonction définie et dérivable sur un intervalle  $]a; b[$ . On appelle point **d'inflexion**, tout point où la **dérivée seconde  $f''(x)$  s'annule en changeant de signe**.

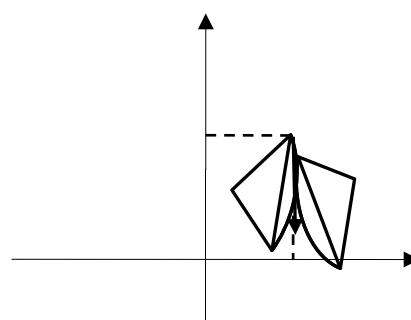
**e) Point de reboursement :**

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = \pm \infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = \pm \infty$$

Alors on dit que  $f$  admet un point de reboursement  $x_0$  à tangente parallèle à l'axe des abscisses ou des ordonnées :



a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$



b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\infty$

## 6) Fonction réciproque

### Bijection :

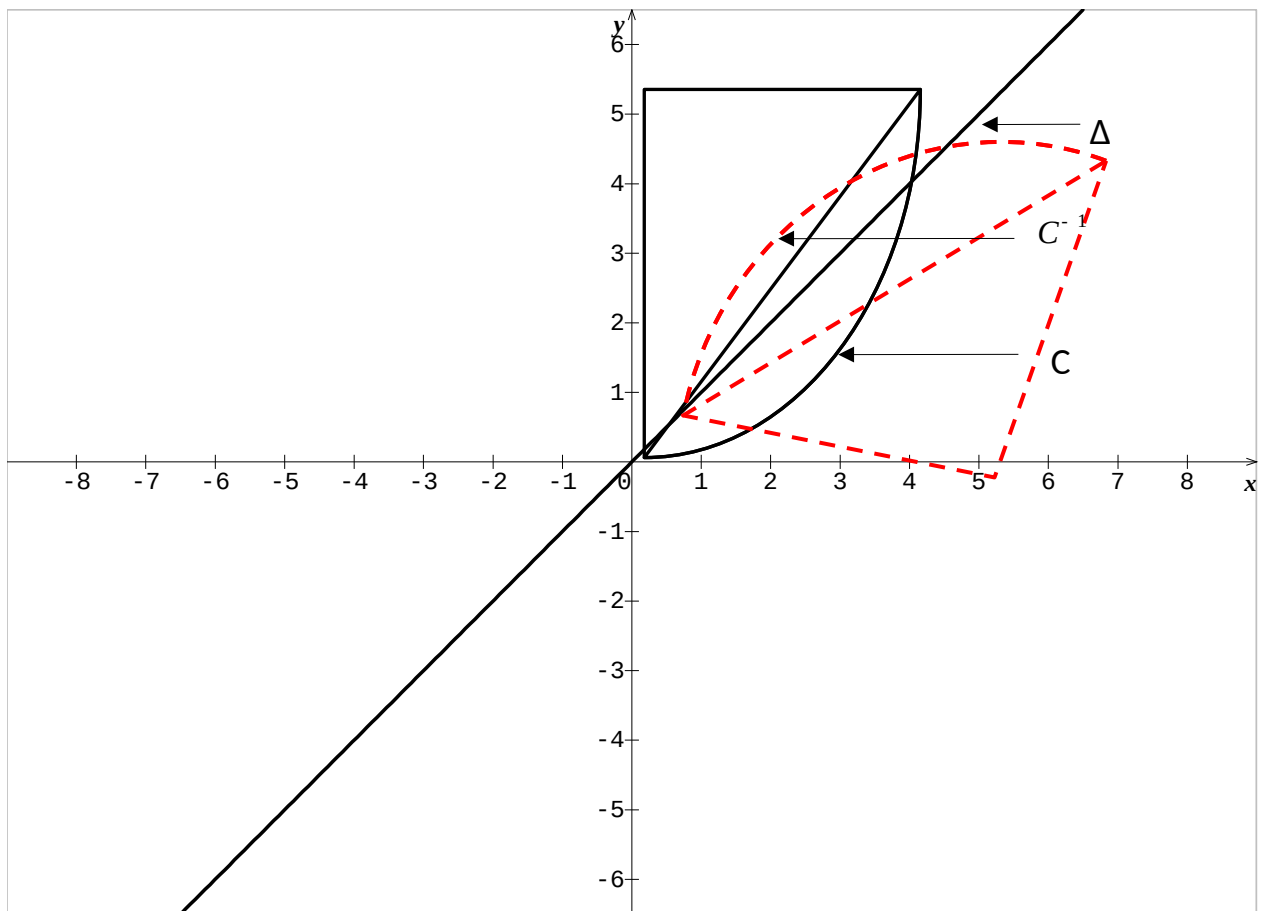
Une fonction  $f$  de  $E$  vers  $F$  est dite bijective si tout élément de l'ensemble d'arrivée  $F$  admet un et un seul antécédent dans l'ensemble de départ  $E$ .

#### - **En Pratique :**

Une application  $f$  est bijective si et seulement si  $\forall y \in F \quad \exists ! x \in E$  on a :  $f(x) = y$

#### - **Graphiquement**

Les courbes représentatives d'une fonction et celle de sa fonction réciproque sont symétriques par rapport à la première bissectrice ( $\Delta$ ) d'équation  $y = x$ .



### Théorème :

Si  $f$  est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle  $I$ , alors  $f$  est une bijection de  $I$  sur  $f(I)$ . et admet une bijection réciproque  $f^{-1}$  de  $f(I)$  sur  $I$  ayant même sens de variation que  $f$

**Les courbes  $C_f$  et  $C_{f^{-1}}$  sont symétriques par rapport à la première bissectrice  $\Delta : y = x$**

Si  $M(x; y) \in C_f$  alors  $N(y; x) \in C_{f^{-1}}$

Si  $x = a$  est asymptote à  $C_f$  alors  $y = a$  devient asymptote pour  $C_f^{-1}$

## 7) Théorème de valeurs intermédiaires :

### L'image d'un intervalle par une fonction continue :

#### Théorème 1 :

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et soit  $D_f$  son ensemble de définition. Soit  $I = [a ; b]$  ou  $I = ]a ; b[$  un intervalle de  $D_f$ . Si  $f$  est continue sur  $I$  alors  $f(I)$  est aussi un intervalle

#### Théorème 2:

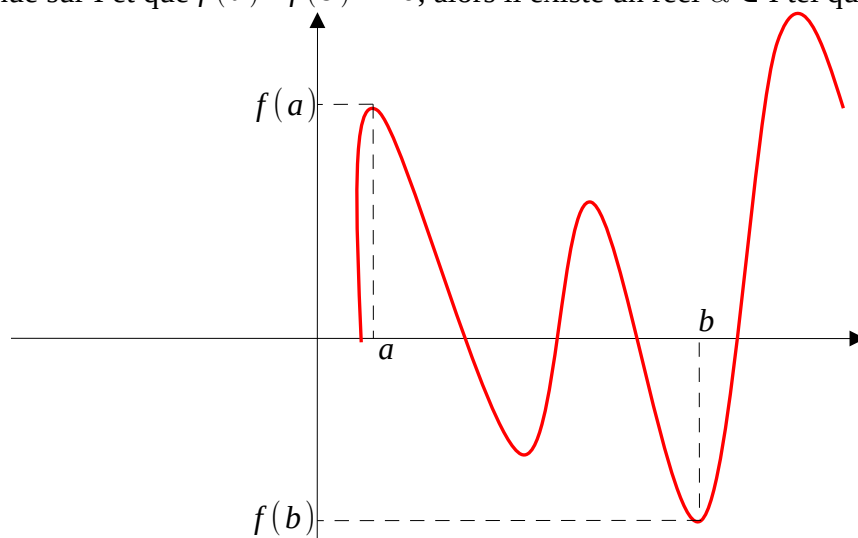
**L'image d'un intervalle fermé par une fonction continue est un intervalle fermé.**

#### 1<sup>ère</sup> forme :

Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et soit  $D_f$  son ensemble de définition. Soit  $I = [a ; b]$  ou  $I = ]a ; b[$  un intervalle de  $D_f$ . Si  $f$  est continue sur  $I$  alors  $f(I)$  est aussi un intervalle.

#### 2<sup>ème</sup> forme :

Si  $f$  est continue sur  $I$  et que  $f(a) - f(b) < 0$ , alors il existe un réel  $\alpha \in I$  tel que  $f(\alpha) = 0$



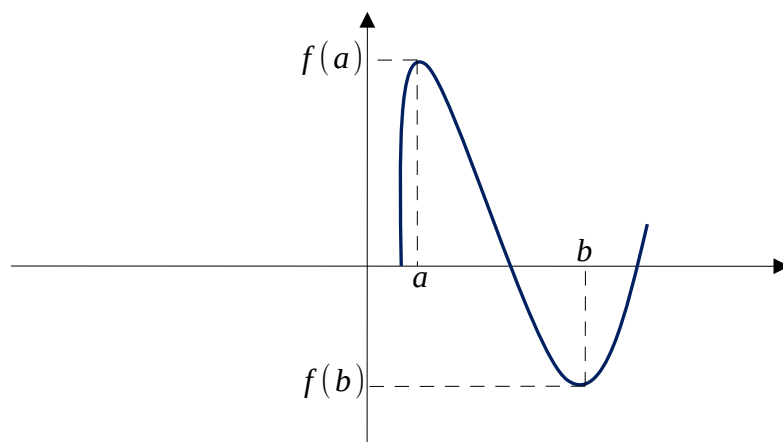
## 8) Théorème relatif aux fonctions continues et strictement monotones

### 1<sup>ère</sup> forme :

Si  $f$  est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle  $[a ; b]$  et si  $f(a)$  et  $f(b)$  sont de signes contraires alors il existe un unique point  $x_0$  élément de  $]a ; b[$  tel que  $f(x_0) = 0$

### 2<sup>ème</sup> forme :

Si  $f$  est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle  $[a ; b]$  et si  $f(a) \times f(b) \leq 0$  alors l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha \in [a ; b]$

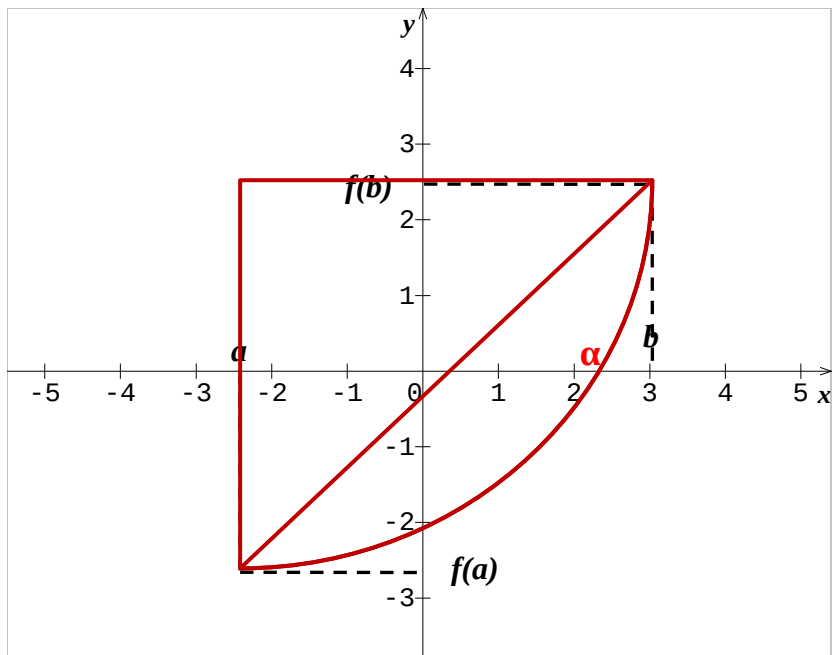


### 8) Approximation d'une solution $\alpha$ de l'équation $g(x)=0$ :

#### a- Méthode de dichotomie :

Soit  $g$  une fonction définie sur un intervalle  $[a ; b]$  tel que  $g(a) \cdot g(b) < 0$ .  
Posons  $a_0 = a$  et  $b_0 = b$ .

- Si  $g$  est strictement croissante sur  $[a ; b]$



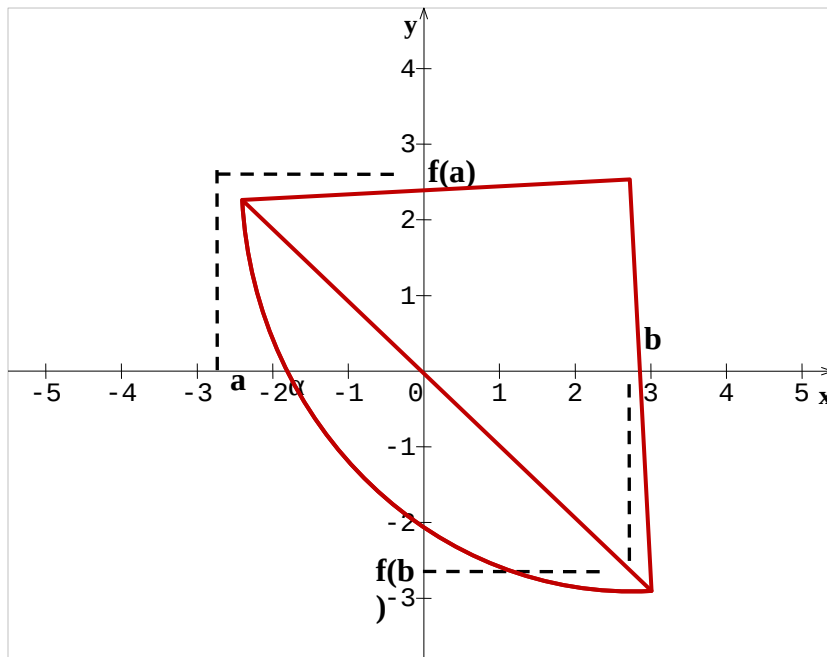
Ainsi on a deux suites numériques de termes généraux  $a_n$  et  $b_n$  tel que  $\alpha \in [a_n ; b_n]$ .

On calcule  $g\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)$ .

- Si  $g\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < 0$  alors  $\alpha \in \left[\frac{a_n + b_n}{2} ; b_n\right]$ .

- Si  $g\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) > 0$  alors  $\alpha \in \left[a_n ; \frac{a_n + b_n}{2}\right]$ .

- Si  $g$  est strictement décroissante sur  $[a ; b]$



Ainsi on a deux suites numériques de termes généraux  $a_n$  et  $b_n$  tel que  $\alpha \in [a_n ; b_n]$ .

On calcule  $g\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)$ .

- Si  $g\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < 0$  alors  $\alpha \in \left[a_n ; \frac{a_n + b_n}{2}\right]$ .

-

- Si  $g\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) > 0$  alors  $\alpha \in \left[\frac{a_n + b_n}{2} ; b_n\right]$ .

### b- Méthode des balayages :

C'est une méthode qui consiste à déterminer une approximation de  $\alpha$  à partir d'un tableau de valeurs où la valeur de  $\alpha$  est obtenue en encadrant la valeur de  $x$  à partir du changement de signe obtenue entre l'antécédent positif et négatif.

| $x$    | $x_1$    | $x_2$    | $x_3$    | $x_4$    | $x_5$    | $x_6$    | $x_7$    | ..... | $x_n$    |
|--------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|-------|----------|
| $f(x)$ | $f(x_1)$ | $f(x_2)$ | $f(x_3)$ | $f(x_4)$ | $f(x_5)$ | $f(x_6)$ | $f(x_7)$ | ..... | $f(x_n)$ |

Si par exemple  $f(x_5) \times f(x_6) < 0$  alors  $\alpha \in [x_5 ; x_6]$  et par conséquent  $\alpha = \frac{x_5 + x_6}{2}$

### Exemple

**A)** Soit  $f(x) = x^3 + 3x - 7$ .

1- Calculer  $f'(x)$ .

2- Etudier le sens de variation de  $f$ .

- 3- Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- 4- Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  telle que  $\alpha \in ]1; 2[$ .
- 5- Déterminer une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-2}$  près.

**B)** Soit  $f(x) = \sqrt{x+2}$ .

- 1- Déterminer l'ensemble de définition  $Df$  de  $f$ .
- 2- Montrer que  $f$  réalise une bijection de l'intervalle  $[-2; +\infty[$  sur un intervalle  $J$  que l'on déterminera.

**C)** Soit  $f(x) = \cos x$  une fonction définie sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

- 1- Etudier les variations de  $f$  sur l'intervalle  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$
- 2- Trouver une valeur approchée à  $10^{-2}$  près de la solution  $\alpha$  de l'équation  $f(x) = x$

### Solution

**A)** Soit  $f(x) = x^3 + 3x - 7$ .

1- Calculons  $f'(x)$ .

$$Df = \mathbb{R}$$

$$f(x) = x^3 + 3x - 7 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 3$$

2- Etudions le sens de variation de  $f$ .

$\forall x \in Df, f'(x) > 0$ . D'où  $\forall x \in Df, f$  est strictement croissante.

3- Dressons le tableau de variation de  $f$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 + 3x - 7 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = (-\infty)^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 + 3x - 7 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = (+\infty)^3 = +\infty$$

|         |           |          |            |
|---------|-----------|----------|------------|
| $x$     | $-\infty$ | $\alpha$ | $+\infty$  |
| $f'(x)$ |           | +        |            |
| $f(x)$  |           | 0        | + $\infty$ |

4- Montrons que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  telle que  $\alpha \in ]1; 2[$   
D'après le tableau de variation,  $f$  est définie, continue et strictement croissante de  
 $] - \infty ; + \infty [$  vers  $] - \infty ; + \infty [$  alors l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  
 $\alpha$  tel que  $f(\alpha) = 0$ .

De plus :  $\begin{cases} f(1) = -4 \\ f(2) = 7 \end{cases} \Rightarrow f(1) \cdot f(2) < 0$

1- Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires  $\alpha \in ]1; 2[$

2- Déterminer une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-2}$  près.

Pour cela utilisons la méthode des balayages

| $x$    | 1,1   | 1,2   | 1,3   | 1,4   | 1,5  | 1,6 | 1,7 | 1,8 | 1,9 |
|--------|-------|-------|-------|-------|------|-----|-----|-----|-----|
| $f(x)$ | -2,36 | -1,67 | -0,90 | -0,05 | 0,87 | ?   | ?   | ?   | ?   |

Ainsi d'après le tableau, l'image par  $f$  des différentes valeurs de  $x$  commences à changer de signe à partir des valeurs de  $x$  comprises entre 1,4 et 1,5.

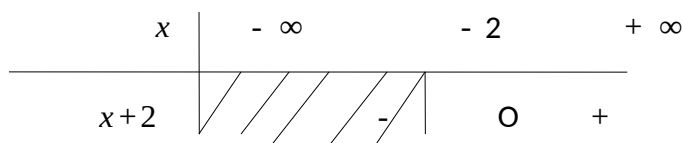
Alors :  $\alpha = \frac{1,4 + 1,5}{2} = 1,45$

**B) Soit  $f(x) = \sqrt{x+2}$ .**

3- Déterminons l'ensemble de définition  $D_f$  de  $f$ .

$D_f = \{x / x \in \mathbb{R} ; x+2 \geq 0\}$

$x+2 \geq 0$ . Posons  $x+2 = 0 \Rightarrow x = -2$



$\Rightarrow D_f = [-2 ; +\infty[$

4- Montrer que  $f$  réalise une bijection de l'intervalle  $[-2 ; +\infty[$  sur un intervalle  $J$  que l'on déterminera.

Pour cela, dressons le tableau de variation de  $f$  :

$f(-2) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

$f(x) = \sqrt{x+2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} \Rightarrow f'(x) > 0$

D'où le tableau de variation de  $f$  est le suivant :

|         |                                                                                    |           |
|---------|------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| $x$     | -2                                                                                 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | +                                                                                  |           |
| $f(x)$  |  |           |

D'après le tableau de variation,  $f$  est définie, continue et strictement croissante de  $] - 2 ; + \infty [$  vers  $] 0 ; + \infty [$  alors  $f$  réalise une bijection de  $] - 2 ; + \infty [$  vers l'intervalle  $J = ] 0 ; + \infty [$

### 8) Théorème de l'inégalité des accroissements finis

Soit  $f$  une fonction définie et dérivable sur un intervalle  $I$ . Soit  $a$  et  $b$  deux réels appartenant à  $I$  tel que ( $a < b$ ).

-Si  $m$  et  $M$  sont deux réels tel que  $m \leq f'(x) \leq M$ , alors on a :

$$(b - a) m \leq f(b) - f(a) \leq (b - a) M.$$

-Si  $f$  est dérivable sur  $I$ , alors il existe un réel  $k$  appartenant à  $I$  tel que  $|f'(x)| \leq k$ .

Ainsi par conséquent  $\forall a \in I$  et  $b \in I$ , on a :  $|f(x) - f(a)| \leq k |x - a|$ .

**(qui est le théorème de l'inégalité des accroissements finis).**

### Exemple

Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{x^2 - x - 5}{x - 3}$

1) Montrer que  $\forall x \in [4 ; 5]$ , on a  $|f'(x)| \leq \frac{3}{4}$

2) En déduire que  $\forall x \in [4 ; 5]$ , on a :  $\left| f(x) - \frac{15}{2} \right| \leq \frac{3}{4} |x - 5|$

### Solution

Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{x^2 - x - 5}{x - 3}$

1) Montrons que  $\forall x \in [4; 5]$ , on a :  $|f'(x)| \leq \frac{3}{4}$

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 5}{x - 3} \quad \left| \quad \begin{array}{l} U(x) = x^2 - x - 5 \Rightarrow U'(x) = 2x - 1 \\ V(x) = x - 3 \Rightarrow V'(x) = 1 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(U'(x))(V(x)) - (V'(x))(U(x))}{(V(x))^2} = \frac{(2x - 1)(x - 3) - (1)(x^2 - x - 5)}{(x - 3)^2} =$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{x^2 - 6x + 8}{(x - 3)^2}$$

$$\text{Or } x \in [4; 5] \Leftrightarrow 4 \leq x \leq 5$$

**En appliquant la fonction dérivée  $f'$  à l'inégalité, on a :**

$$\text{Or } f'(4) = 0 \quad \text{et} \quad f'(5) = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow 0 \leq f'(x) \leq \frac{3}{4}$$

**En appliquant la valeur absolue à l'inégalité, on a :**

$$\Rightarrow 0 \leq |f'(x)| \leq \left| \frac{3}{4} \right|$$

$$\Rightarrow 0 \leq |f'(x)| \leq \frac{3}{4}$$

$$\text{D'où } \forall x \in [4; 5], |f'(x)| \leq \frac{3}{4}$$

$$2) \text{ En déduisons que } \forall x \in [4; 5], \text{ on a : } \left| f(x) - \frac{15}{2} \right| \leq \frac{3}{4} |x - 5|$$

D'après la question 1), on a :

$$\forall x \in [4; 5], \left| f'(x) \right| \leq \frac{3}{4}$$

Or si  $\left| f'(x) \right| \leq k$ , on a : d'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis

$$\left| f(x) - f(a) \right| \leq k |x - a|$$

Ainsi puisque  $\left| f'(x) \right| \leq \frac{3}{4}$ , alors d'après le théorème de l'inégalité des accroissements

finis on a :  $\left| f(x) - f(5) \right| \leq \frac{3}{4} |x - 5|$ . Avec  $k = \frac{3}{4}$  et  $a = 5$

$$\text{Or } f(5) = \frac{15}{2}$$

$$\Rightarrow \left| f(x) - \frac{15}{2} \right| \leq \frac{3}{4} |x - 5|$$

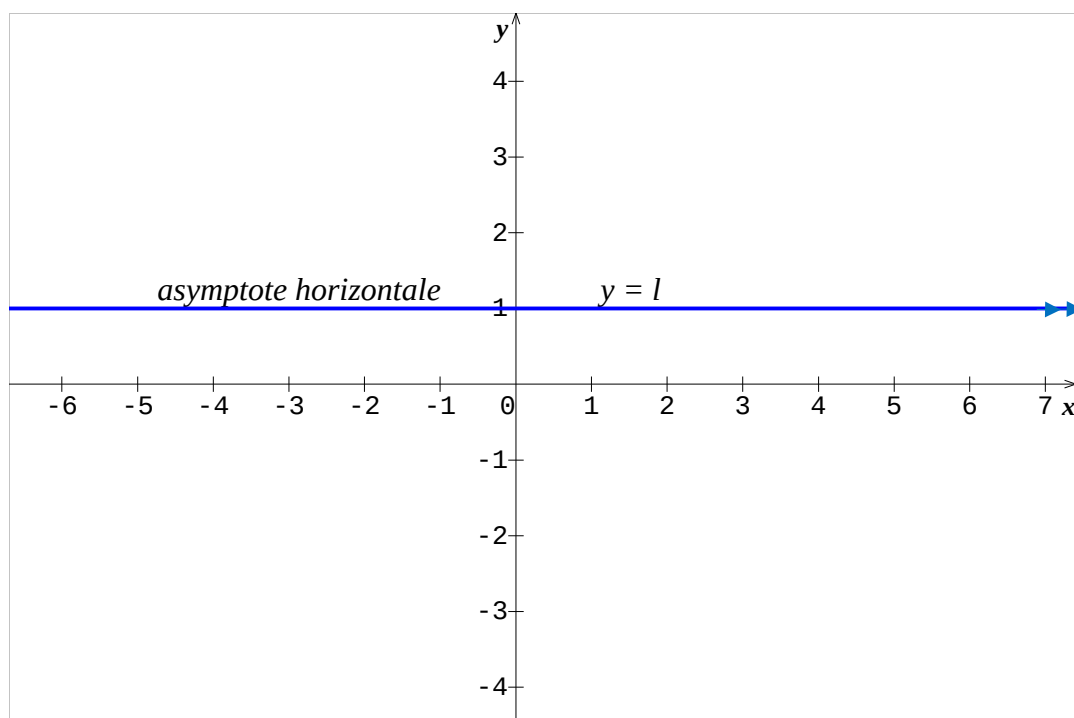
D'où  $\forall x \in [4; 5]$ , on a :  $\left| f(x) - \frac{15}{2} \right| \leq \frac{3}{4} |x - 5|$

## 9) Etude des branches infinies :

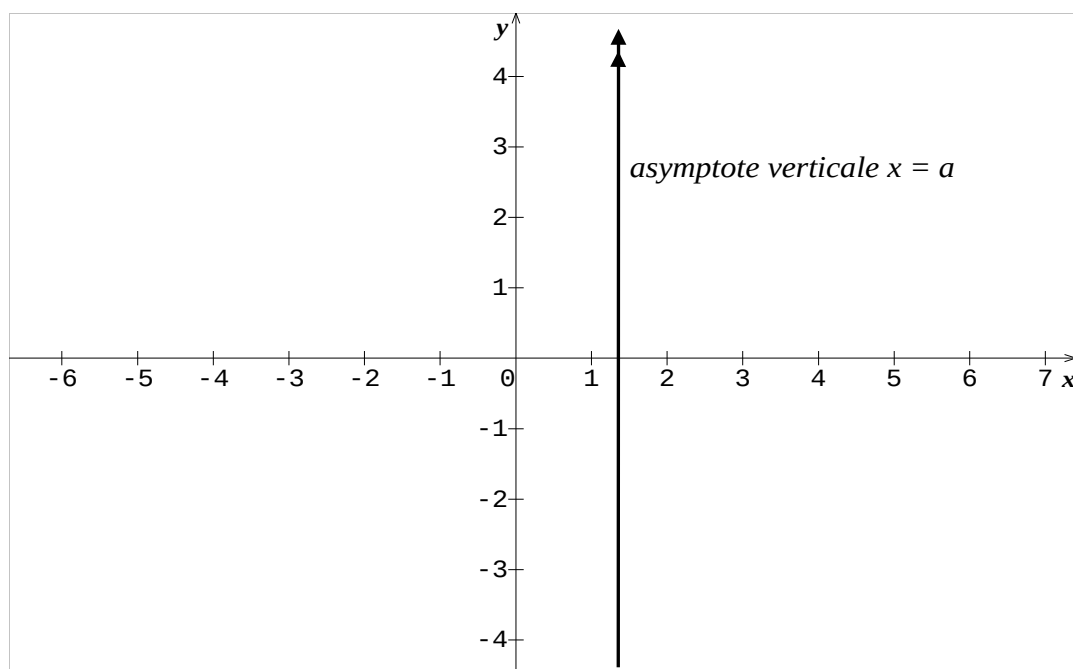
### Notion d'asymptotes :

- Si  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$  ou  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$  (alors la droite d'équation  $y = l$ )

est asymptote **horizontale** à la courbe représentative de  $f$ .



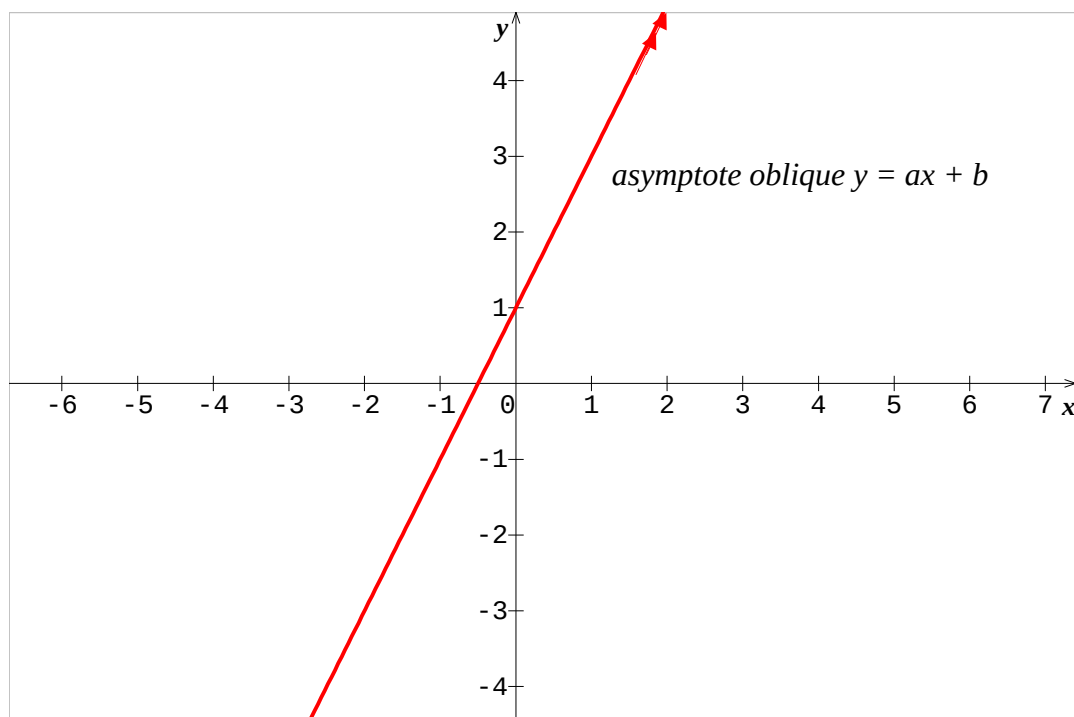
- Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  ou  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$  (alors la droite d'équation  $x = a$ )  
est asymptote **verticale** à la combe représentative de  $f$ .



•

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$$

(Alors la droite d'équation  $y = ax + b$  est asymptote **oblique** à la courbe représentative de  $f$ ).



**Recherche d'asymptote oblique :**

---

Il est évident de dire que si :  $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \pm \infty$ , alors on a une possibilité d'asymptote oblique.

$$x \rightarrow \pm \infty$$

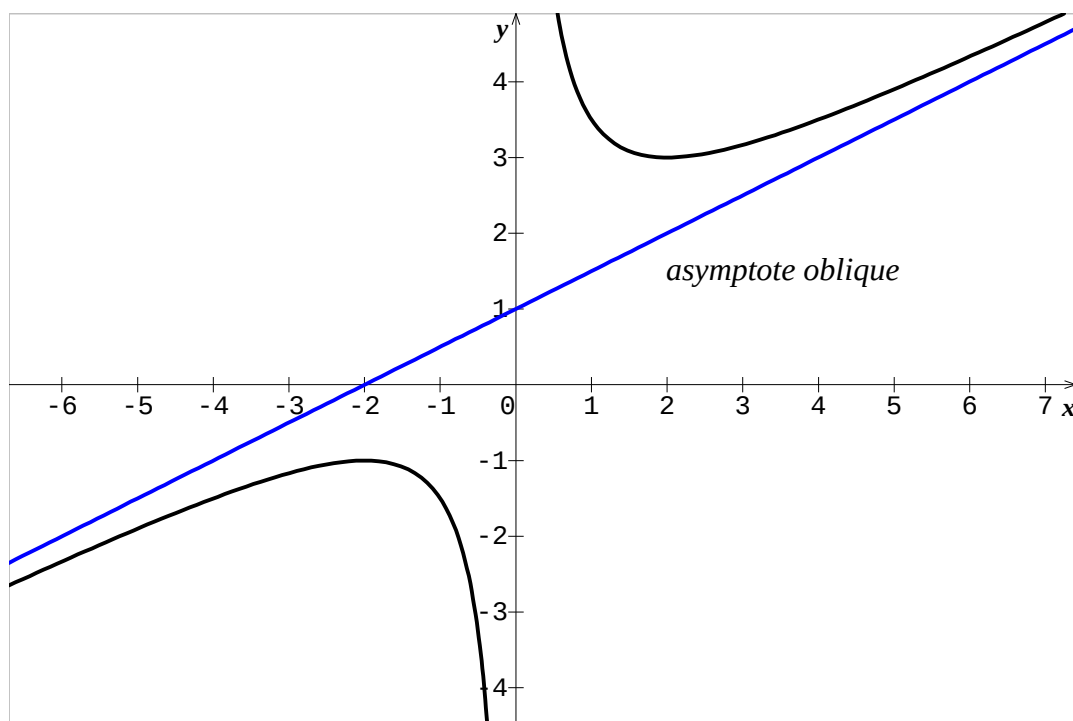
Ainsi pour chercher l'asymptote oblique, on procède comme suite :

- Si  $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x} = a$

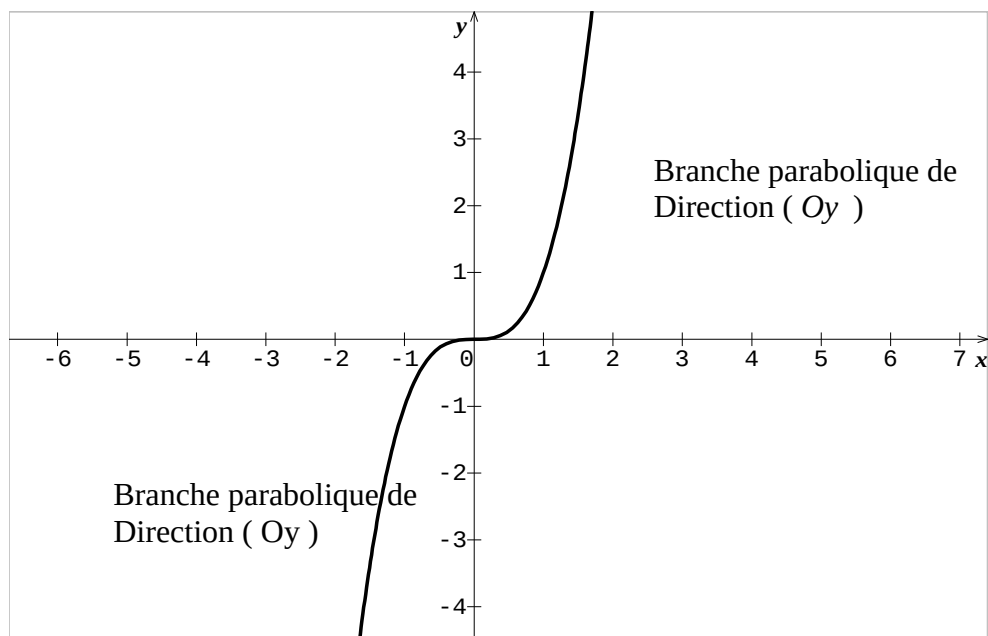
alors la droite d'équation  $y = ax + b$  est

Asymptote oblique à la courbe (C) de  $f$ .

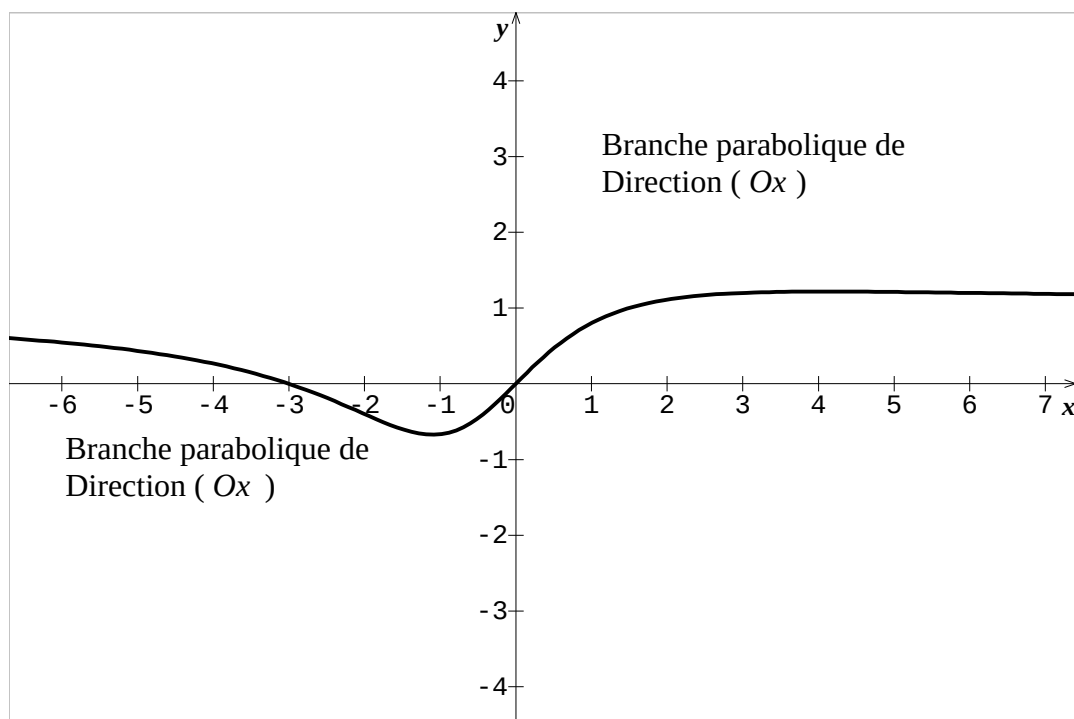
et  $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) - ax = b$



- Si  $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x} = \pm \infty$  alors la courbe (C) de  $f$  admet l'axe ( $y'Oy$ ) comme branche parabolique.



- Si  $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$  alors la courbe (C) de  $f$  admet l'axe ( $x'Ox$ ) comme branche parabolique.



### **N.B :**

Si  $f$  est une fonction rationnelle dont le degré du numérateur est supérieur au degré du dénominateur d'une seule unité, alors on peut écrire  $f(x)$  sous la forme :

$$f(x) = Q(x) + \frac{R}{D(x)} \text{ ( en effectuant une division euclidienne ) .}$$

$Q(x) = y$  est le quotient et est aussi appelé Asymptote oblique.

$D(x)$  = est le diviseur

$R$  = est le reste.

### **Cas Particulier d'asymptote**

**Toutes fonctions de la forme :**

$$f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c} \text{ ou } f(x) = \sqrt{|ax^2 + bx + c|} ; \text{ ( avec } a \neq 0 \text{ et } a > 0)$$

**Admet deux asymptotes :**

- L'une en  $-\infty$  d'équation :  $y = -\sqrt{a} \left( x + \frac{b}{a} \right)$

- L'une en  $+\infty$  d'équation :  $y = \sqrt{a} \left( x + \frac{b}{a} \right)$

### **10) Position relative d'une courbe (Cf) et de son asymptote oblique.**

Pour déterminer la position relative d'une courbe (Cf) et de son asymptote oblique ( $\Delta$ ), on étudie le signe de :  $f(x) - y$ . Ainsi :

- Si  $f(x) - y < 0$ , alors la courbe (Cf) est en dessous de la droite ( $\Delta$ ).
- Si  $f(x) - y > 0$ , alors la courbe (Cf) est au dessus de la droite ( $\Delta$ ).
- Si  $f(x) - y = 0$ , alors la courbe (Cf) et la droite ( $\Delta$ ) sont confondues.

### **Exemple**

1- On donne  $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$

a) Démontrer que la droite ( $\Delta$ ) :  $y = x + 2$  est asymptote oblique à la courbe (Cf) de  $f$  en  $+\infty$ .

b) Etudier la position de la courbe (Cf) et ( $\Delta$ ).

2- On donne  $f(x) = \frac{2x-4}{x-3}$

- Déterminer l'ensemble de définition  $Df$  de  $f$ .
- Calculer les limites de  $f$  aux bornes de  $Df$ .
- En déduire l'équation des asymptotes à la courbe  $(Cf)$ .

### Solution

1- On donne  $f(x) = \frac{x^2-3}{x-2}$

- a) Démontrons que la droite  $(\Delta) : y = x + 2$  est asymptote oblique à la courbe  $(Cf)$  de  $f$  en  $+\infty$ .

la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = x + 2$  est asymptote oblique à la courbe  $(Cf)$  de  $f$  en  $+\infty$  si :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 2)] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-3}{x-2} - (x + 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2-3) - (x+2)(x-2)}{x-2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 2)] = 0$

Alors la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = x + 2$  est asymptote oblique à la courbe  $(Cf)$  de  $f$  en  $+\infty$

- b) Etudions la position de la courbe  $(Cf)$  et de la droite  $(\Delta)$ .

Pour cela étudions le signe de  $f(x) - y$ .

$$\text{Posons } f(x) - y = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x-2} = 0 \Rightarrow x-2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

D'où le tableau de signe est le suivant :

|  |     |           |     |           |
|--|-----|-----------|-----|-----------|
|  | $x$ | $-\infty$ | $2$ | $+\infty$ |
|  |     |           |     |           |

|            |                          |                          |   |
|------------|--------------------------|--------------------------|---|
| $x-2$      | -                        | O                        | + |
| $f(x) - y$ | $(\Delta) \setminus (C)$ | $(C) \setminus (\Delta)$ |   |

Alors  $\forall x \in ]-\infty ; 2[ ; f(x) - y < 0 \Rightarrow$

$\forall x \in ]-\infty ; 2[ ;$  la courbe (C) est en dessous de la droite ( $\Delta$ ).

Et

$\forall x \in ]2 ; +\infty[ ; f(x) - y > 0 \Rightarrow$

$\forall x \in ]2 ; +\infty[ ;$  la courbe (C) est au dessus de la droite ( $\Delta$ ).

2- On donne  $f(x) = \frac{2x-4}{x-3}$

a) Déterminer l'ensemble de définition  $D_f$  de  $f$ .

$$D_f = \{x/x \in \mathbb{R} ; x-3 \neq 0\} \Rightarrow D_f = D_f = \mathbb{R} - \{3\} = ]-\infty ; 3[ \cup ]3 ; +\infty[$$

b) Calculons les limites aux bornes de  $D_f$

|       |     |           |   |   |  |           |
|-------|-----|-----------|---|---|--|-----------|
|       | $x$ | $-\infty$ |   | 3 |  | $+\infty$ |
| $x-3$ |     | -         | O | + |  |           |

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-4}{x-3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-4}{x-3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

$$\begin{array}{ccc} x \rightarrow +\infty & x \rightarrow +\infty & x \rightarrow +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x - 4}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2}{0^-} = -\infty \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x - 4}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2}{0^+} = +\infty \end{array}$$

c) En déduisons les asymptotes à la courbe (C) de  $f$ .

$$\text{Puisque } \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 \\ \text{et} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \end{array} \right. \quad \text{Alors la droite d'équation } x = 2 \text{ est asymptote verticale à } (Cf).$$

$$\text{Puisque } \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty \\ \text{et} \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty \end{array} \right. \quad \text{Alors la droite d'équation } y = 3 \text{ est asymptote horizontale à } (Cf).$$

Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 2)] = 0$  Alors la droite d'équation  $y = 3$  est asymptote oblique à  $(Cf)$ .

# 11) Intersection de la courbe avec les axes du repère :

## a) Intersection de la courbe avec l'axe des abscisses (ox)

Pour trouver le ou les points d'intersection de la courbe  $(Cf)$  avec l'axe des abscisses, on résout l'équation  $f(x) = 0$ . Ainsi la courbe passe par les solutions de l'équation  $f(x) = 0$  sur l'axe  $(ox)$ .

## b) Intersection de la courbe avec l'axe des ordonnées (oy)

Pour trouver le ou les points d'intersection de la courbe  $(C_f)$  avec l'axe des ordonnées, on calcule l'ordonnée  $y = f(o)$ . Ainsi la courbe passe par  $y = f(o)$  sur l'axe des (oy).

## 12) Plan d'étude d'une fonction :

Pour étudier une fonction  $f$  et représenter graphiquement sa courbe  $(C_f)$  dans le repère on adopte le plan suivant :

- On donne le domaine de définition ou ensemble de définition noté  $D_f$
- On calcule les limites aux bornes de  $D_f$
- On étudie la parité et la périodicité de  $f$
- On étudie la continuité de  $f$
- On étudie le sens de variation de  $f$  qui consiste à calculer la dérivée et à étudier son signe
- On dresse le tableau de variation qui est le résumé de toutes les études précédentes
- On peut chercher les points d'intersections éventuels avec les axes de coordonnées

## Exemple

Etudier et représenter la courbe (C) de la fonction  $f$  dans chacun des cas suivants :

1)  $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$

2) Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{1 + \cos 3x}{\cos^4 x}$  et (C) sa courbe.

a) Déterminer l'ensemble de définition  $D_f$  de  $f$ .

b) Etudier la parité et la périodicité de  $f$ . En déduire qu'il suffit d'étudier la fonction  $f$  sur un nouvel ensemble d'étude  $D_E$

c) Montrer que  $\forall x \in D_f$  on a :  $f'(x) = \frac{3(1 - 2\cos x)\sin x}{\cos^4 x}$

d) Etudier le signe de  $(1 - 2\cos x)$  sur  $D_E$  puis en déduire les variations de  $f$  sur  $D_E$ .

e) Tracer la courbe (C).

## Solution

1) Etudions et représentons la courbe (C) de la fonction  $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$

$$D_f = \mathbb{R} - \{-1\} = ]-\infty; -1[ \cup ]-1; +\infty[$$

|       |           |      |           |
|-------|-----------|------|-----------|
| $x$   | $-\infty$ | $-1$ | $+\infty$ |
| $x+1$ | -         | O    | +         |

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} \quad \left| \begin{array}{l} U(x) = x^2 + 2x + 2 \Rightarrow U'(x) = 2x + 2 \\ V(x) = x + 1 \Rightarrow V'(x) = 1 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(U'(x))(V(x)) - (V'(x))(U(x))}{(V(x))^2} = \frac{(2x + 2)(x + 1) - (1)(x^2 + 2x + 2)}{(x + 1)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x + 1)^2} \quad \text{or } \forall x \in Df, (x + 1)^2 > 0 \text{ alors le signe de } f'(x) \text{ dépend}$$

donc du signe du numérateur  $x^2 + 2x$ .

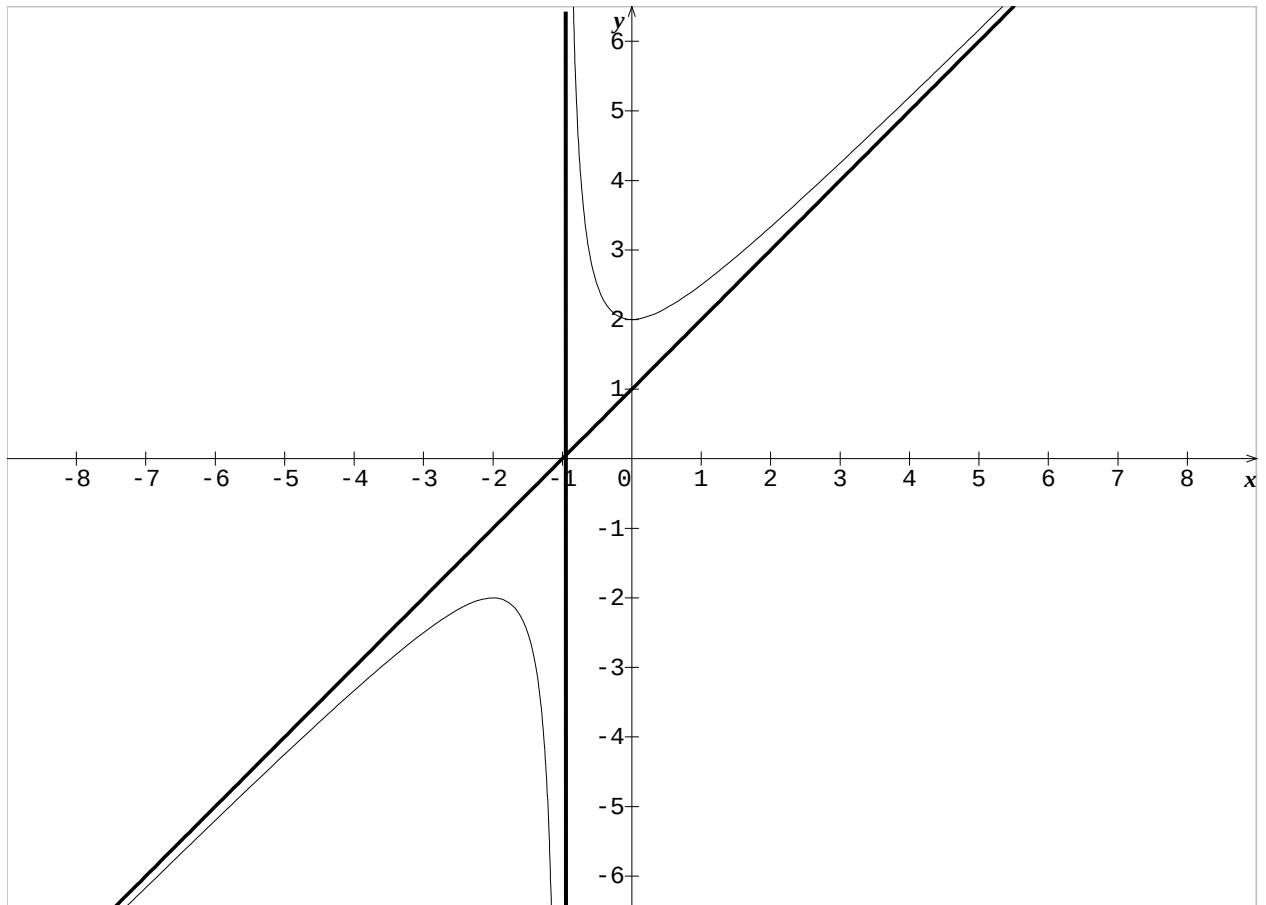
Posons  $x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x = 0$  ou  $x = -2$   
D'où le tableau de variation de  $f$  est le suivant :

|         |           |      |           |     |           |
|---------|-----------|------|-----------|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-2$ | $-1$      | $0$ | $+\infty$ |
| $f(x)$  | $+$       |      | $-$       | $-$ | $+$       |
| $f'(x)$ | $-\infty$ |      | $-\infty$ | $2$ |           |

$x = -1$  est asymptote verticale à  $(C)$ .

$y = x + 1$  est asymptote oblique à  $(C)$  car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 1)] = 0$ .

Ainsi on a la représentation suivante :



Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{1 + \cos 3x}{\cos^3 x}$  et (C) sa courbe

a) Déterminons l'ensemble de définition  $D_f$

$$D_f = \{x/x \in \mathbb{R}; \cos^3 x \neq 0\}$$

$$\cos^3 x \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq \cos \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou}$$

$$x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\Rightarrow D_f = \left] -\infty; -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right[ \cup \left] \frac{\pi}{2} + 2k\pi; +\infty \right[$$

b) Etude de la parité et de la périodicité de  $f$

$$\text{- Partie : } f(-x) = \frac{1 + \cos(-3x)}{\cos^3(-x)} = \frac{1 + \cos 3x}{\cos^3 x} = f(x)$$

Alors  $f$  est paire et admet donc l'axe  $y'Oy$  comme axe de symétrie.

$$\text{- Périodicité : } T_1 = \frac{2\pi}{3} \text{ et } T_2 = \frac{2\pi}{1} \Rightarrow T = T_1 \cap T_2 = 2\pi$$

Alors l'étude peut donc se faire sur le domaine  $\left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right]$

$$\Leftrightarrow D_E = \left[-\frac{2\pi}{2}; \frac{2\pi}{2}\right] \Rightarrow D_E = [-\pi; \pi]$$

Et puisque la fonction est paire alors nous pouvons résumer le domaine d'étude à  $[0; \pi]$   
D'où  $D_E = D \cap [0; \pi]$

$$\text{c) Montrons que } \forall x \in D_f, \text{ on a : } f'(x) = \frac{3(1 - 2\cos x)\sin x}{\cos^4 x}$$

$$f(x) = \frac{1 + \cos 3x}{\cos^3 x} \begin{cases} u = 1 + \cos 3x \Rightarrow u' = -3\sin 3x \\ v = \cos^3 x \Rightarrow v' = -3\sin x \cos^2 x \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{-3\cos^3 x \cdot \sin 3x + 3\sin x \cos^2 x (1 + \cos 3x)}{\cos^6 x}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow f'(x) &= \frac{3\cos^2 x (-\cos x \sin 3x + \sin x + \sin x \cos 3x)}{\cos^6 x} \\
\Rightarrow f'(x) &= \frac{3(\sin x \cdot \cos 3x - \sin 3x \cos x + \sin x)}{\cos^4 x} \\
\Rightarrow f'(x) &= \frac{3(\sin(x - 3x) + \sin x)}{\cos^4 x} = \frac{3(-2\cos x + 1)\sin x}{\cos^4 x} \\
\Rightarrow f'(x) &= \frac{3(-2\cos x \sin x + \sin x)}{\cos^4 x} = \frac{3(-2\cos x + 1)\sin x}{\cos^4 x} \\
\Rightarrow f'(x) &= \frac{3(1 - 2\cos x)\sin x}{\cos^4 x}
\end{aligned}$$

d) Etude du signe de  $(1 - 2\cos x)$  sur  $D_E$  puis de variations de  $f$ .

$$1 - 2\cos x = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

D'autre par  $\forall x \in [0; \pi]$  on a :  $\sin x > 0$  et  $\cos^4 x > 0$   
Donc le signe dépend de  $1 - 2\cos x$

D'où le tableau de variation de  $f$  est le suivant :

| $x$     | 0 | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |   |
|---------|---|-----------------|-----------------|---|
| $f'(x)$ | - | +               | +               |   |
| $f(x)$  | 2 |                 | $+\infty$       | 0 |

Détermination des coordonnées des points d'intersections de la courbe (C) avec l'axe des abscisses puis construction de la courbe (C) de  $f$ .

$$- (C) \cap (ox) \Rightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \cos 3x = 0 \Leftrightarrow \cos 3x = -1$$

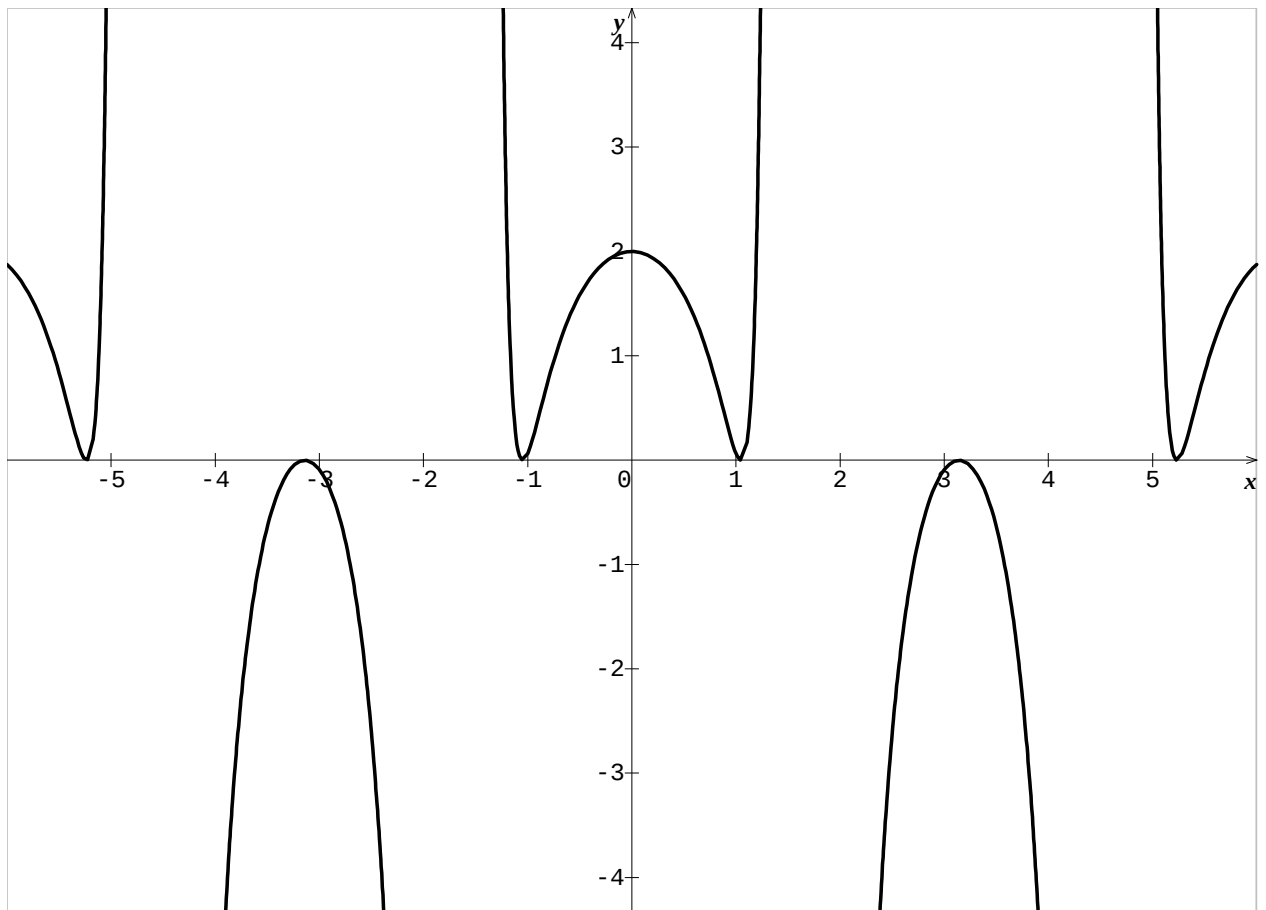
$$\Leftrightarrow \cos 3x = \cos \pi \Leftrightarrow 3x = \pi \text{ ou } 3x = -\pi \Rightarrow$$

$$\text{Donc (C) coupe l'axe (ox) en } -\frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{\pi}{3}$$

$$- (C) \cap (oy) \Rightarrow y = 2$$

Donc (C) coupe l'axe oy en 2

Ainsi on a la représentation suivante :



## EXERCICES

### Limites

#### Limites en un point $x_0$

1

Calculer les limites suivantes aux points  $x_0$  donnés :

$$\begin{array}{llll}
 \text{a- } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3 - 8}{x - 2}; & \text{b- } \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}; & \text{c- } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x + 5}{x^2 - x - 2}; & \text{d- } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} \\
 \text{e- } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}; & \text{f- } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x^3 + x^2 - x - 1}; & \text{g- } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} + 1}{x + \sqrt{x}}
 \end{array}$$

**2** Calculer les limites suivantes aux points  $x_0$  donnés :

$$\begin{array}{llll}
 \text{a- } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x}; & \text{b- } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x}{1 - \sin x}; & \text{c- } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x}; & \text{d- } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin 3x}{1 - 2\cos x} \\
 \text{e- } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\pi - x}; & \text{f- } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\tan x}; & \text{g- } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{3x - \pi}; & \text{h- } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 4x - \sin 2x}{5x} \\
 \text{i- } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x^2)\sin x - x}{x^3}; & \text{j- } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x^3}
 \end{array}$$

**3** On se propose d'étudier la limite en  $\frac{\pi}{2}$  de la fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{x - \frac{\pi}{2}} \quad \text{pour } x \neq \frac{\pi}{2}.$$

1) Vérifier que l'on ait en présence d'une forme indéterminée.

En considérant l'accroissement moyen de la fonction Cosinus en  $\frac{\pi}{2}$ , déterminer la limite ci-dessus.

2) Par une méthode analogue, étudier les limites des fonctions en  $x_0$  dans les cas suivants :

$$\text{a- } g(x) = \frac{\sqrt{1 + x} - 1}{x} \quad \text{en } x_0 = 0; \quad \text{b- } h(x) = \frac{\tan(x) - 1}{x - \frac{\pi}{4}} \quad \text{en } x_0 = \frac{\pi}{4}$$

## Limites à l'infinie

4 Calculer les limites suivantes à l'infinie :

$$\begin{aligned}
 & \text{a- } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-8}{x+1-x^2} ; \quad \text{b- } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x}-1}{x+2} ; \quad \text{c- } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2+2}{5x^2-x} ; \quad \text{d- } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} \\
 & \text{e- } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x+3}{\sqrt{4x^2+x}-5} ; \quad \text{f- } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} ; \quad \text{g- } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-|x|}{2x-2} \\
 & \text{h- } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1-x+\sqrt{x^2+x+1} ; \quad \text{i- } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2+\sin x}{x+1} \text{ (théorème des gendarmes)}
 \end{aligned}$$

## Limites et asymptotes

5 Calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition de chacune des fonctions ci-dessous (on donnera ci-possible les éventuelles asymptotes ou possibilité d'asymptotes)

$$\begin{aligned}
 & \text{a- } f(x) = \frac{x^2+5}{-x+2} ; \text{b- } f(x) = \frac{-x^2+5}{x^2+5x-6} ; \text{c- } f(x) = \frac{2x^2+x+1}{-x} ; \text{d- } f(x) = \frac{x^2}{x^3+1} \\
 & \text{e- } f(x) = \sqrt{3x^2-2x-1} ; \text{f- } f(x) = \frac{\sqrt{-x+2}}{-x^2+2x-1} ; \text{g- } f(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}
 \end{aligned}$$

6 Soit la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \sqrt{x^2+x+1} - x$ .

On note  $(C_f)$  sa courbe dans le repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

a- Etudier les limites de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ . La courbe  $(C_f)$  admet-elle une asymptote horizontale ?

b- Démontrer que la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = -2x - \frac{1}{2}$  est asymptote à  $(C_f)$  en  $-\infty$ .

7 Soit la fonction  $f$  définie par :  $g(x) = ax + b - \sqrt{x^2+1}$ .

On note  $(C_g)$  sa courbe dans le repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

a- Etudier la limite de  $g$  en  $-\infty$ . (On discutera suivant les valeurs de  $a$ ).

- b- Déterminer les réels  $a$  et  $b$  pour que la droite (D) d'équation  $y = 2x + 2$  soit asymptote à la courbe représentative de  $f$  en  $-\infty$ .

# Continuités

## Continuité en un point $x_0$

- 8** Etudier la continuité des fonctions suivantes aux points  $x_0$  donnés :

$$\text{a- } \begin{cases} f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2 + x - 6} \\ f(2) = 0 \end{cases} \text{ et } x_0 = 2 \quad ; \quad \text{b- } \begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x - 1|} \\ f(1) = 2 \end{cases} \text{ et } x_0 = 1$$

$$\text{c- } \begin{cases} f(x) = x^2 - x + 1 & \text{si } x \in [0 ; 1] \\ f(x) = \frac{2x - 1}{x} & \text{si } x \in ]1 ; 3] \end{cases} \text{ et } x_0 = 1 \quad \text{d-}$$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{3 - \sqrt{2x + 5}}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ f(2) = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{e- } \begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{2\cos x} - 1}{2\cos 2x + 1} & \text{si } x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right] - \left\{\frac{\pi}{3}\right\} \\ f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4} & \text{et } x_0 = 1 \end{cases}$$

$$\text{f- } \begin{cases} f(x) = -x^2 - 2x + 5 & \text{si } x \in ]-\infty ; 1] \\ f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x + 3} & x \in [1 ; 3] \\ f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x + 3} & x \in [3 ; +\infty[ \end{cases}$$

## Continuité et condition de faisabilité

- 9** Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$\begin{cases} f(x) = \frac{3 - \sqrt{2x + 5}}{x - 2} & \text{si } x \in \mathbb{R} - \{2\} \\ f(2) = a \end{cases}$$

Déterminer la valeur de  $a$  pour que  $f$  soit continue en  $x_0 = 2$

**10** Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + ax & \text{si } x \in ]-\infty ; -1[ \\ f(x) = 2x - 1 & \text{si } x \in ]-1 ; 1[ \\ f(x) = b(x^2 - 1) & \text{si } x \in ]1 ; +\infty[ \end{cases}$$

- Déterminer  $a$  pour que  $f$  soit continue au point  $x_0 = -1$
- Pouvez – vous déterminer la valeur de  $b$  pour que  $f$  soit continue au point  $x_0 = 1$  ?

## Prolongement par continuité

**11** Dans chacun des cas suivants, préciser l'ensemble de définition de la fonction  $f$  et déterminer (s'il existe) le prolongement par continuité de cette fonction en  $x_0$ .

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \\ x_0 = 0 \end{cases} ; \quad \text{b) } \begin{cases} f(x) = \frac{\tan x}{x} \\ x_0 = 0 \end{cases} ;$$

**12** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies respectivement par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{1 + \sqrt{x+1}}$$

- Déterminer les ensembles de définitions  $Df$  et  $Dg$  respectivement des fonctions  $f$  et  $g$ .
- Vérifier que la fonction  $g$  est le prolongement par continuité de la fonction  $f$  en  $x_0 = 0$ .

**13** On considère la fonction  $g$  de la variable réelle  $x$  définie par  $g(x) = \frac{\sqrt{2x} - 2}{x - 2}$

- Déterminer son ensemble de définition  $Dg$ .
- Montrer que  $g$  admet en 2 un prolongement par continuité que l'on notera par  $h$ .
- Montrer que  $h$  est dérivable en 2 puis donner l'équation de la tangente à la courbe(  $C$  ) de  $h$  au point d'abscisse 2.

# Dérivabilité

## Dérivabilité en un point $x_0$

**14** Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes aux points  $x_0$  donnés :

$$a- \begin{cases} f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2 + x - 6} & \text{et } x_0 = 2 \\ f(2) = 0 \end{cases} ; \quad b- \begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x - 1|} & \text{et } x_0 = 1 \\ f(1) = 2 \end{cases}$$

$$c- \begin{cases} f(x) = x^2 - x + 1 & \text{si } x \in [0 ; 1] \\ f(x) = \frac{2x - 1}{x} & \text{si } x \in ]1 ; 3] \end{cases} \quad \text{et } x_0 = 1 \quad d-$$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{3 - \sqrt{2x + 5}}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ f(2) = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$e- \begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{2\cos x} - 1}{2\cos 2x + 1} & \text{si } x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right] - \left\{\frac{\pi}{3}\right\} \\ f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4} & \text{et } x_0 = 1 \end{cases}$$

$$f- \begin{cases} f(x) = -x^2 - 2x + 5 & \text{si } x \in ]-\infty ; 1] \\ f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x + 3} & \text{si } x \in [1 ; 3] \\ f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x + 3} & \text{si } x \in [3 ; +\infty[ \end{cases}$$

## Dérivabilité et condition de faisabilité

**1** Déterminer les réels  $a$ , et  $b$  pour que  $f$  soit continue et dérivable aux points  $x_0$  donnés :

$$a- \begin{cases} f(x) = 2x^2 + ax - 3 & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = \frac{2x + b}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad b-$$

$$\begin{cases} f(x) = 2ax^2 - x + b & \text{si } x \leq -2 \\ f(x) = \frac{3b}{x + 3} & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

$$c- \begin{cases} f(x) = ax^2 - 3x + 4 & \text{si } x \leq -2 \\ f(x) = \frac{x + b}{x + 3} & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

Soit  $f$  la fonction de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par :

$$c- \begin{cases} f(x) = \frac{x(x+1)}{(x+2)^2} & \text{si } x \geq -1 \\ f(x) = 2x + a & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

Pour quelle valeur de  $a$  la fonction  $f$  est-elle continue au point  $-1$  ?  
 Pour cette valeur, étudier la dérivabilité de la fonction  $f$  au point  $-1$ .

## Application de la dérivée

**16** Déterminer une équation de la tangente en  $M_0(x_0 ; f(x_0))$  à la courbe (C) de  $f$  dans les cas suivants :

a)  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 3$  et  $x_0 = -2$  ; b)  $f(x) = \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$  et  $x_0 = 0$

c)  $f(x) = \tan x$  et  $x_0 = 3$  ; d)  $f(x) = \frac{\tan x}{x}$  et  $x_0 = 0$

**17** Déterminer la fonction dérivée  $f'$  de la fonction  $f$  dans chacun des cas suivants :

a)  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 3$  ; b)  $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$  ; c)  $f(x) = (-x^2 + 2x)^3$

d)  $f(x) = \sqrt{2x^3 - 4x^2 + 1}$  ; e)  $f(x) = (1 - 3x^2)(-x^2 + 1)$  ; f)  $f(x) = \cos^3 x$

g)  $f(x) = (x-1)\sqrt{x^3 - x^2}$  ; h)  $f(x) = \sin(3x - 1)^4$  ; i)  $f(x) = \sin^4(3x - 1)$

**18** Soit la fonction numérique  $f$  définie par :

$$\begin{cases} f(x) = -x^2 - 2x + 5 & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- 1) Prouver que  $f$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$
- 2) a) Dresser le tableau de signe du trinôme  $x^2 - 2x - 3$  en y plaçant le réel 1

- b) En déduire pour tout  $x \geq 1$  une écriture de  $f(x)$  sous le symbole de la valeur absolue.
- 3) a) Etudier la dérivabilité de  $f$  au point  $x_0 = 3$ . Que dira-t-on pour la dérivabilité de  $f$  au point 3 ?  
 b) Donner une équation de la tangente à gauche et à droite de 1. Que peut-on conclure quant à la dérivabilité de  $f$  en 1 ?
- 4) a) Etudier le signe de  $f'$  sur chacun des intervalles sur lequel  $f$  est dérivable.  
 b) Préciser les ordonnées de chaque extremum de  $f$ .
- 5) Dresser le tableau de variation de la fonction  $f$ .

# Etudes de fonctions

## Analyse et interprétation d'un tableau de variation.

19

Analyser puis interpréter chacun des tableaux de variations suivants afin de préciser :

- a- les domaines de définition.
- b- les limites aux bornes du domaine de définition tout en mettant en évidence les éventuelles asymptotes et possibilités d'asymptotes.
- c- Donner l'allure de la courbe ( $C_f$ ) dans chaque cas.

1)  $f$  est la fonction donnée par son tableau de variation ci-dessous :

| $x$     | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---------|-----------|-----------|
| $f'(x)$ |           | +         |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $+\infty$ |

**De plus :**

- La courbe ( $C_f$ ) admet l'origine du repère comme centre de symétrie.
- La courbe ( $C_f$ ) admet l'axe ( $y'Oy$ ) comme branche parabolique.

2)  $g$  est la fonction donnée par son tableau de variation ci-dessous :

| $x$     | $-\infty$ | -1           | 2            | $+\infty$  |           |
|---------|-----------|--------------|--------------|------------|-----------|
| $g'(x)$ | -         | 0            | +            | 0          | -         |
| $g(x)$  | $+\infty$ | $\downarrow$ | $\nearrow 1$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

**De plus :** La courbe ( Cg ) admet l'axe ( y'Oy ) comme branche parabolique.

**3)** h est la fonction donnée par son tableau de variation ci-dessous :

|         |                |           |               |             |           |
|---------|----------------|-----------|---------------|-------------|-----------|
| x       | $-\infty$      | -2        | 0             | 2           | $+\infty$ |
| $h'(x)$ | +              |           | + 0 -         |             | -         |
| $h(x)$  | -1 ↗ $+\infty$ | $-\infty$ | 0 ↗ $+\infty$ | $-\infty$ ↘ | 3 ↘       |

**4)** p est la fonction donnée par son tableau de variation ci-dessous :

|         |           |           |               |     |           |
|---------|-----------|-----------|---------------|-----|-----------|
| X       | $-\infty$ | -2        | 0             | 1   | $+\infty$ |
| $p'(x)$ |           | - 0       |               |     |           |
| $p(x)$  | 2 ↘ 0     | $+\infty$ | $+\infty$ ↘ 1 | 2 ↗ |           |

**20**

Dresser le tableau de variation de la fonction numérique donnée partant de ses renseignements fournis dans les cas suivants :

**1) Pour f :**

- f est dérivable sur  $\mathbb{R}$  telle que l'équation  $f'(x) = 0$  admet les solutions  $x = -1$  et  $x = \frac{3}{2}$
- f n'est croissante qu'entre les zéros de sa dérivée f' et les points  $E_1\left(\frac{3}{2}; 4\right)$  et  $E_2\left(-1; -\frac{5}{2}\right)$  sont ses extremums
- les droites  $y = -2$  et  $y = 3$  sont ses asymptotes respectives en  $-\infty$  et  $+\infty$

**2) Pour g :**

- $g$  est définie sur  $]-\infty ; 0] \cup \left[\frac{5}{2} ; +\infty\right[$  et admet des demi tangentes verticales aux points d'abscisses 0 et  $\frac{5}{2}$
- $g$  est strictement décroissante sur son ensemble de dérivabilité.
- la droite  $y = -x$  est à la fois asymptote oblique en  $-\infty$  et  $+\infty$
- les points de coordonnées  $(0 ; -3)$  et  $\left(\frac{5}{2} ; 1\right)$  sont sur la courbe de  $g$ .

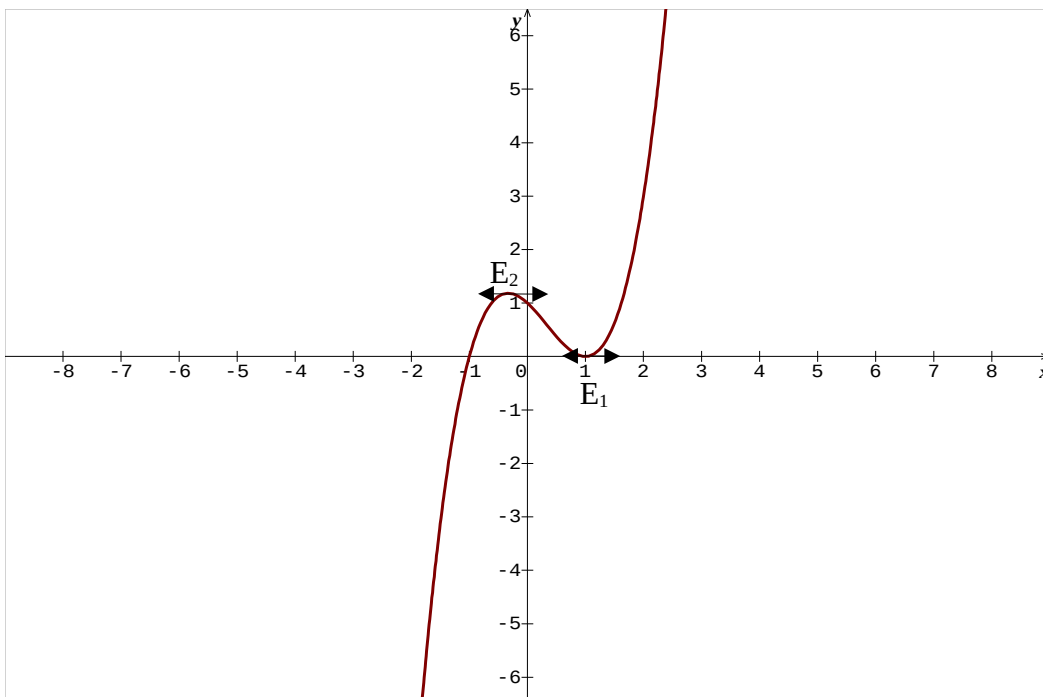
### 3) Pour $h$ :

- $h$  est dérivable sur  $\mathbb{R} - \{0 ; 2\}$  et continue sur  $\mathbb{R}$ .
- le point de coordonnées  $(0,3 ; 0,4)$  est l'extremum maximum absolue de la courbe  $(C_h)$  et  $h$  est croissante sur  $[0 ; 0,3] \cup [2 ; +\infty[$
- les droites d'équations  $y = -1$  et  $y = -2x + 1$  sont asymptotes de  $(C_h)$  respectivement en  $-\infty$  et  $+\infty$
- les points de coordonnées  $(0 ; 0)$  ;  $(1 ; 0)$  ; et  $(2 ; -2)$  ; appartiennent à  $(C_h)$

## Analyse et interprétation d'un graphique.

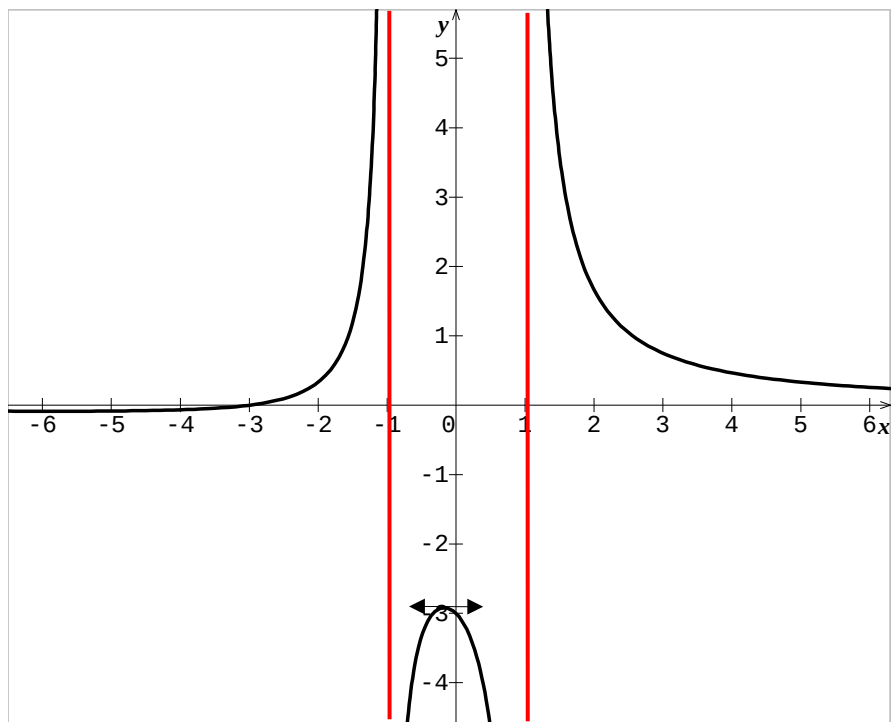
- 21** a- Analyser chacune des courbes représentatives données dans un repère orthonormé du plan afin d'établir son tableau de variation.
- b- Déterminer les réels  $a$  ;  $b$  ;  $c$ ..... en utilisant le graphique.

1)  $f$  est la fonction dont la courbe est donnée ci-dessous par :  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

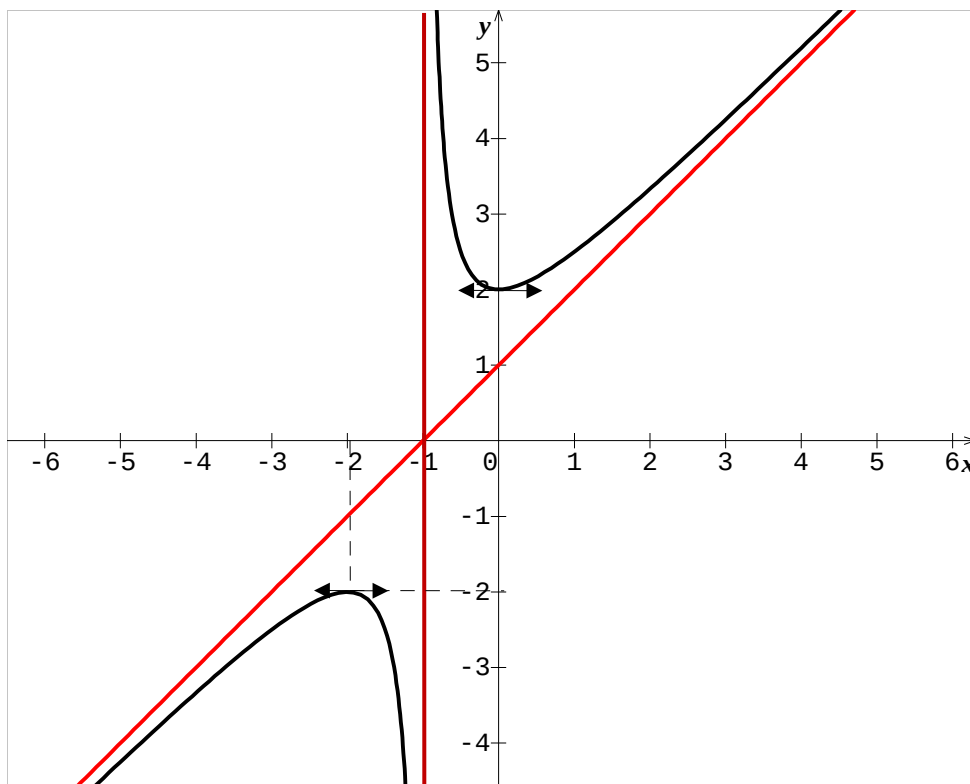


**De plus :**  $E_1(1 ; 0)$  et  $E_2\left(-\frac{1}{3} ; \frac{32}{27}\right)$  sont les sommets de la courbe (Cf)

2) La fonction donnée est  $g$  telle que :  $g(x) = \frac{ax + b}{cx^2 + d}$



3) La fonction donnée est  $h$  telle que :  $h(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$



## Fonctions d'initialisations.

22

Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$

Soit  $C_f$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

- 1) Déterminer l'ensemble de définition  $D_f$ .
- 2) Calculer les limites aux bornes de  $D_f$ .
- 3) Déterminer les réels  $a$ ;  $b$  et  $c$  tel que  $f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 1}$
- 4) a- Montrer que la droite  $(D)$  d'équation  $y = ax + b$  est asymptote à la courbe  $C_f$ .  
b- Déterminer la position de la courbe  $C_f$  et de la droite  $(D)$ .
- 5) Montrer que le point  $I\left(-1; 1\right)$  est centre de symétrie pour la courbe  $C_f$ .
- 6) Déterminer une équation de la tangente à la courbe  $C_f$  au point d'abscisse  $-2$
- 7) Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction  $f$  au point d'abscisse nul.
- 8) Calculer la dérivée  $f'$  de la fonction  $f$  puis dresser le tableau de variation de  $f$ .
- 9) Construire la courbe  $C_f$  et la droite  $(D)$  dans le même repère.

23

Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + cx + d}$

Soit  $C_f$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

- 1) Déterminer les réels  $a$  ;  $b$  ;  $c$  et  $d$  tel que :
  - a- La courbe  $Cf$  admet comme asymptote les droites  $x = 2$  et  $x = -1$ .
  - b- La courbe  $Cf$  passe par le point  $A\left(\frac{1}{-2}\right)$  et admet en ce point une tangente de coefficient directeur  $-5$ .
- 2) Etudier la fonction  $f$  puis représenter sa courbe  $Cf$  dans le repère.

**24**

Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{cx^2 + dx - 2}$

Soit  $Cf$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ .

- 1) Déterminer les réels  $a$  ;  $b$  ;  $c$  et  $d$  tel que :
  - a- La courbe  $Cf$  admet comme asymptote les droites  $x = 2$ .
  - b- La courbe  $Cf$  n'admet pas d'asymptote parallèle à l'axe  $(Ox)$ .
  - c- La courbe  $Cf$  passe par le point  $A\left(\frac{1}{-1}\right)$  et admet en ce point une tangente de coefficient directeur  $2$ .
- 2) Etudier la fonction  $f$  puis représenter sa courbe  $Cf$  dans le repère.

**25**

Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{x^3 + ax^2 + bx + c}{mx^2 + nx + p}$

Soit  $Cf$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ .

- 1) Déterminer les réels  $a$  ;  $b$  ;  $c$  ;  $m$  ;  $n$  et  $p$  tel que :
  - a- La courbe  $Cf$  admet comme asymptote les droites  $x = 2$  et  $x = -1$ .
  - b- La courbe  $Cf$  passe par le point  $A\left(\frac{0}{3}\right)$  et admet en ce point une tangente de coefficient directeur  $-3$ .
- 2) Etudier la fonction  $f$  puis représenter sa courbe  $Cf$  dans le repère.

Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{x^3 - 9x}{2(x^2 - 1)}$

Soit  $Cf$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ .

- 1) Etudier les variations de  $f$ .
- 2) Préciser les asymptotes à la courbe  $Cf$ .
- 3) Soit  $\Delta$  l'asymptote non parallèle aux axes de coordonnées, déterminer la position de  $Cf$  par rapport à  $\Delta$  dans l'intervalle  $]-1 ; 1[$ .

4) Construire  $C_f$ .

**27** Soit la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{2x}$

Soit  $C_f$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

- 1) Etudier et construire la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .
- 2) Montrer que le point d'intersection des asymptotes est un centre de symétrie de  $(C_f)$
- 3) Discuter graphiquement suivant les valeurs de  $m$  l'existence et le signe des racines de l'équation :  $x^2 + 2(1 - m)x + 4 = 0$
- 4) Montrer que la restriction  $h$  de  $f$  à l'intervalle  $I = [2; +\infty[$  est une bijection de  $I$  sur un intervalle  $J$  que l'on précisera. Construire la courbe représentative de la fonction réciproque  $h^{-1}$  de  $h$  dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ . puis calculer  $(h^{-1})'\left(\frac{7}{2}\right)$ .

## Fonctions dans les cas pratiques.

**28** Une entreprise fabrique et commercialise chaque mois  $x$  objets dont le coût total de production, exprimé en milliers de francs est donnée par  $C(x) = \frac{x^2}{2} + 5x + 200$  avec  $x \in [5; 60]$ .

On admet que toute la production est vendue chaque mois. On rappelle que le coût moyen unitaire de fabrication d'un objet est donné par  $C_m(x) = \frac{C(x)}{x}$ .

- 1) Calculer  $C'_m(x)$  puis en déduire le tableau de variation de  $C_m(x)$ .
- 2) Pour quel nombre d'objets le coût moyen unitaire est il minimum ?

**29** La production exprimée en tonne d'une entreprise sur les cinq dernières années est donnée par la fonction suivante  $t \rightarrow f(t) = -\frac{t^2}{2} + 2t + 36$  où  $t$  s'exprime en années.

- 1) Calculer la dérivée  $f'(t)$  de la fonction  $f(t)$  puis en déduire les variations et le tableau de variation de  $f$ . Donner une interprétation commerciale en utilisant le tableau.
- 2) Tracer la courbe  $(C_f)$  de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .
- 3) La production totale sur les cinq années est donnée par  $\int_0^5 f(t) dt$ .

Calculer la production totale.

**30** Une entreprise produit du décapant liquide. Une étude a permis de modéliser le coût moyen de production par  $f(x) = 0,5x + \frac{8}{x}$  où  $x > 0$ .

Le coût moyen  $f(x)$  est exprimé en milliers de francs CFA et la quantité produite  $x$  en hectolitres.

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i} ; \vec{j})$  d'unité graphique 1cm.

- 1) Etudier les variations de cette fonction dans l'intervalle  $[0 ; + \infty [$ .
- 2) Etudier la position de la courbe (C) par rapport à la droite (D) d'équation  $y = 0,5x$ .
- 3) Pour combien d'hectolitres le coût de production est il minimum ?
- 4) Déterminer les coûts de production pour 4 hectolitres ; 8 hectolitres et 16 hectolitres.
- 5) Construire la courbe (C) et la droite (D) dans le même repère.

**31** Une entreprise fabrique des objets. On estime que le bénéfice, en centaine d'euros, réalisé par la production et la vente de  $x$  centaines d'objets est :  $B(x) = 3x^3 + 33x - 54$  où  $1 \leq x \leq 10$

- 1) a- Calculer  $B'(x)$ . En déduire le tableau de variations de  $B$  sur  $[1 ; 10]$ .  
b - Quel est le nombre d'objets à produire, et à vendre, pour réaliser un bénéfice maximum ? Préciser la valeur de ce bénéfice.
- 2) a- Résoudre l'équation  $B(x) = 0$ . En déduire les points morts de la production.  
b-Résoudre l'inéquation  $B(x) \geq 0$ . En déduire la marge de bénéfice de la production.

**32** On note  $f(x)$  la population ( en milliers ) d'une ville fondée en 1960, où  $x$  désigne la durée écoulée depuis le début de l'année 1960, exprimée en années.

On donne  $f(x) = \frac{60x + 40}{x + 10}$  où  $x \in [0 ; + \infty [$ .

- 1) Déterminer les réels  $a$  et  $b$  tels que  $f(x) = a + \frac{b}{x + 10}$  pour  $x \in [0 ; + \infty [$ .
- 2) a- Calculer la dérivée  $f'(x)$  de la fonction  $f(x)$ .  
b- Justifier que la population est croissante.
- 3) a- Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :  $f(x) = 52$ .  
b- En déduire à partir de quelle année la population de cette ville sera supérieur à 52.000 habitants.
- 4) a- Quelle est la limite de  $f$  en  $+\infty$  ?  
b- En déduire une interprétation quant à la population de cette ville ;
- 5) Tracer la courbe (Cf) de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ .  
Echelle : 1 cm  $\rightarrow$  10 ans sur l'axe des abscisses  
1 cm  $\rightarrow$  10.000 habitants sur l'axe des ordonnées.

**33** Une entreprise produit d'un certain nombre  $x$  de crayons de couleur par jour où : ( $x$  exprimé en millier).

Lorsque la quantité  $x$  est comprise entre 3 et 10, on admet que le coût de production journalier, exprimé en euro est donné par :  $C(x) = x^3 - 48x + 600$

L'entreprise vend chaque millier de crayons à 99 euros.

- 1) En supposant que toute la production du jour est vendue, déterminer la recette journalière en fonction de  $x$  que l'on notera  $R(x)$ .
  - 2) Montrer que la bénéfice  $B(x)$ , exprimé en euro, est donnée par :  
 $B(x) = -x^3 + 147x - 600$  avec  $x \in [3 ; 10]$ . (On rappelle que  $R(x) - C(x) = B(x)$ ).
  - 3) Calculer  $B'(x)$  où désigne la fonction dérivée de  $B$ .
  - 4) Etudier le signe de  $B'(x)$  sur l'intervalle  $[3 ; 10]$ .
- Dresser le tableau de variation de la fonction  $B$ .

- 5) En déduire le nombre de milliers de crayons à produire quotidiennement pour obtenir un bénéfice maximal. Quel est alors ce bénéfice maximal ?
- 6) a- Montrer qu'il existe  $\alpha \in ] 3 ; 7[$  et  $\beta \in ] 7 ; 10[$  tel que  $B(\alpha) = B(\beta) = 0$ .  
 b- Calculer  $B(4)$ ;  $B(8)$ ;  $B(5)$ ;  $B(9)$  puis en déduire les valeurs entières minimale et maximale à l'extérieur desquelles  $(x) < 0$ .
- 7) Quelles sont les productions qui assurent à l'entreprise un bénéfice positif ?

**34**

Dans le Périgord, un producteur de truffes noires cultive, ramasse et conditionne de 1 à 45kg de truffes par semaine durant la période de production de la truffe. Chaque kilo de truffes est vendu 950 FCFA.

On désigne par  $f(x)$  le coût moyen, en euro par kg, pour  $x$  kg de truffes traités en une semaine.

On estime que la fonction  $f$  est définie sur  $[ 1 ; 45]$  par :  $f(x) = x^2 - 60x + 1250$ .

- 1) Justifier que le coût de production total  $C(x)$  pour  $x$  kg de truffes est donné, en FCFA, par :  $C(x) = x^3 - 60x^2 + 1250x$ .
- 2) Exprimer le bénéfice  $B(x)$ , en euro, réaliser par ce producteur pour  $x$  kg de truffes conditionnés et vendus.
- 3) a) Calculer  $B'(x)$  et en déduire le tableau de variations de  $B$  sur  $[ 1 ; 45]$ .  
 b) Pour quelles quantité de truffes de bénéfice du producteur est-il maximal ? Arrondir le résultat à 100g près. Quel est alors ce bénéfice maximal, à 100 FCFA près ?

**35**

Une entreprise fabrique entre 1000 et 4000 chats en porcelaine par mois. Ils sont tous identiques. On estime que le coût total de fabrication de  $x$  milliers de bibelots, en millier d'euros, est, pour  $1 \leq x \leq 4$  ;  $C(x) = 2x - 14\sqrt{x}$

1) Montrer que, pour tout réel  $x$  de  $[ 1 ; 4]$ , on a :  $C'(x) = \frac{4\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x}}$

2) a- Résoudre l'inéquation  $4\sqrt{x} - 1 \geq 0$

b- En déduire le sens de variation du coût total  $C$  sur l'intervalle  $[ 1 ; 4]$ .  
 Interpréter économiquement.

**36**

Le coût, en euro, de  $x$  repas préparés dans un restaurant peut s'écrire :

$$C(x) = 0,1x^2 - x + 640 \text{ avec } x \in [ 40 ; 160].$$

On note  $C_m(x)$  le coût moyen de  $x$  repas, en euro par repas.

- 1) Justifier que  $C$  est croissante sur  $[ 40 ; 160]$ .
- 2) a- Calculer le coût moyen de 40 repas, puis de 100 repas.  
 b- Exprimer le coût moyen  $C_m(x)$  par repas en fonction du nombre  $x$  de repas préparés.
- 3) a- Etudier le sens de variation du coût moyen  $C_m$   
 b- Quel est le nombre de repas à servir pour que le coût moyen par repas soit minimal ?

**37**

La société EDM désire mesurer la satisfaction de ces consommateurs par une « fonction de satisfaction »  $f$ , dont la valeur se situe dans l'intervalle  $[ 0 ; 100]$ . Si la satisfaction vaut 0, les consommateurs ne sont pas satisfaits et quant elle vaut 100 les consommateurs sont pleinement satisfaits : on parle alors de « satisfaction ».

On définit la fonction « envie »  $v$  comme étant la dérivée de la fonction  $f$  tel que  $v = f'$ .

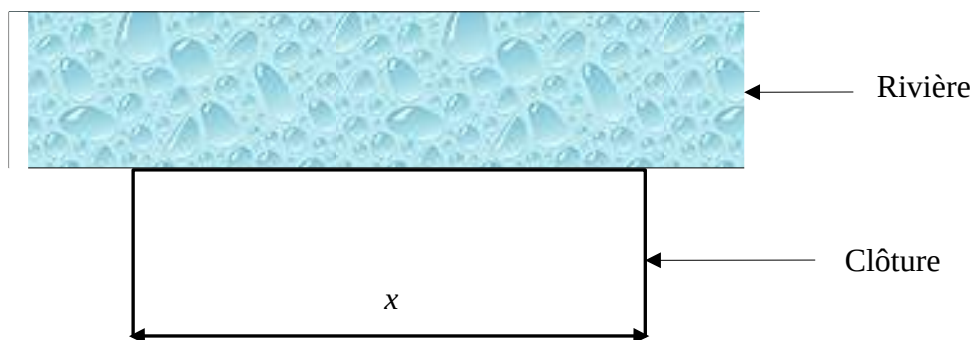
On dit qu'il y a « envie » lorsque  $v$  est positive. Sinon on dit qu'il y a « rejet ». Ainsi l'EDM propose différents types de formules pour la consommation de l'électricité et décide d'étudier la satisfaction de ses clients concernant la durée en jours d'une consommation.

La fonction de satisfaction  $f$  est définie sur l'intervalle  $[1; 21]$  par :  
 $f(t) = 0,02t^3 - 1,4t^2 + 22t + 640$  où  $t$  est la durée en jour de la consommation.

- 1) Calculer  $f'(t)$ , puis en étudier le signe sur  $[0; 21]$ .
- 2) Dresser le tableau de variations de  $f$  sur  $[0; 21]$ .
- 3) Quelle doit être la durée, en jour, de la consommation pour qu'il y ait saturation ?
- 4) Sur quel(s) intervalle(s) y a-t-il envie ? rejet ?

**38**

On veut construire le long d'une rivière un enclos rectangulaire d'aire  $200 \text{ m}^2$ .  
 Soit  $x$  la dimension exprimée en mètres du côté parallèle au cours d'eau.  
 On désigne par  $f(x)$  la longueur totale, exprimée en mètres de clôture nécessaire à la réalisation de l'enclos.



- 1) Exprimer  $f(x)$  en fonction de  $x$ .
- 2) On suppose que  $f(x) = x + \frac{400}{x}$  où  $x > 0$ 
  - a- Etudier les variations de  $f$  sur l'intervalle  $[5; 50]$ .
  - b- Pour quelle valeur de  $x$  la longueur de la clôture est-elle minimale ?
  - c- En déduire ce minimal.
  - d- Tracer la courbe (Cf) de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  et sur l'intervalle  $[5; 50]$ .
- 3) On dispose de  $50 \text{ m}$  de clôture. Quelle sont les dimensions des enclos que l'on peut construire en utilisant toute la clôture ?

**39**

On considère, dans le plan  $(P)$  rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ , le cercle  $(\Gamma)$  de centre  $O$  et de rayon  $1$ .  
 Soit  $A$  le point de coordonnées  $(1; 0)$  et  $A'$  le point de coordonnées  $(-1; 0)$ .

- 1) Pour tout point H du segment  $[AA']$ , distinct de A et A', on mène la perpendiculaire  $(\Delta)$  à la droite  $(AA')$ . La droite  $(\Delta)$  coupe le cercle  $(\Gamma)$  en M et M'.  
On pose  $\overline{OH} = x$ . Calculer en fonction de x l'aire du triangle  $AMM'$ .
- 2) Soit  $f$  la fonction définie sur  $]-1 ; 1[$  par  $f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}$ .
  - a- Etudier les variations de f.
  - b- Montrer que le triangle  $AMM'$  d'aire maximale est équilatéral.

## Fonctions circulaires.

40

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$  par :  $f(x) = \frac{\sin 3x}{\cos^3 x}$

Soit  $C_f$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ .

- 1) Déterminer  $Df$
- 2) Etudier la périodicité et la parité de  $f$  puis en déduire un intervalle d'étude  $D_E$ .
- 3) Etudier les limites aux bornes de  $D_E$ .
- 4) Montrer que  $\forall x \in Df, f'(x) = \frac{3 \cos 2x}{\cos^4 x}$  puis dresser le tableau de variation de  $f$ .
- 5) Tracer  $(C_f)$ .

41

Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{1 + \cos 3x}{\cos^3 x}$

Soit  $C_f$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ .

- 1) Déterminer l'ensemble de définition  $Df$ .
- 2) Etudier la périodicité et la parité de  $f$  puis en déduire un intervalle d'étude  $D_E$ .
- 3) Montrer que  $\forall x \in Df, f'(x) = \frac{3(1 - 2 \cos x) \sin x}{\cos^4 x}$
- 4) Etudier le signe de  $(1 - 2 \cos x)$  sur  $D_E$  puis en déduire les variations de  $f$  sur  $D_E$ .
- 5) Déterminer les coordonnées des points d'intersections de la courbe  $(C)$  avec l'axe des abscisses.
- 6) Tracer la courbe  $C_f$ .

42

On considère la fonction numérique  $g$  définie par :  $g(x) = \sin 2x \cos x$ .

Soit  $C_g$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ .

- 1) a- Prouver que la verticale  $x = \frac{\pi}{2}$  est un axe de symétrie pour la courbe  $C_g$  et étudier la parité de  $g$ .

b- Justifier que l'on peut étudier  $g$  sur  $D_E = \left[ 0 ; \frac{\pi}{2} \right]$  puis décrire les étapes à suivre pour avoir la courbe  $Cg$  sur  $\mathbb{R}$ .

2) a- Déterminer  $g'(x)$  et justifier que son signe est celui de  $3\cos^4 x - 2$  pour tout  $x \in D_E$

b- En admettant que  $\cos(0,45) = 0,9$  et que  $\cos(2,69) = -0,9$  et en exploitant les résultats obtenus en 1), établir le tableau de variation de  $g$  sur  $D_E$

3) a- Tracer  $(Cg)$  sur  $\left[ 0 ; \frac{\pi}{2} \right]$

b- En déduire le tracer de  $(Cg)$  sur  $\left[ -\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right]$ .

**43** **Partie A :** On considère la fonction numérique  $h$  de variable réelle  $u$  définie sur  $[-1 ; 1]$  par :  $h(u) = 2u^3 + 8u^2 - 4$ .

1) Déterminer l'arrondi d'ordre zéro de  $h(-0,79)$  et de  $h(0,66)$ .

2) Etablir le tableau de variation de  $h$  et donner les signes de  $h(u)$  pour  $u \in [-1 ; 1]$ .

**Partie B :** On donne la fonction numérique  $g$  telle que  $g(x) = \frac{\sin 2x}{\cos x + 2}$ .

Soit  $Cg$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ .

1) Déterminer l'ensemble de définition  $Dg$ .

2) En étudiant la périodicité et la parité de  $g$  puis montrer que l'on peut étudier  $g$  sur un nouvel ensemble d'étude  $DE = [0 ; \pi]$  d'amplitude  $2\pi$ .

3) Déterminer  $g'(x)$  et prouver  $g'(x)$  dépend en signe et en racine de :  $2\cos^3 x + 8\cos^2 x - 4$  pour tout  $x \in D_E$

4) En admettant que  $\cos(0,85) = 0,66$  et que  $\cos(2,49) = -0,79$ , établir le tableau de variation de  $g$  sur  $D_E$ .

5) a- Tracer  $Cg$  sur  $D_E$ .

b- En déduire le tracer de  $Cg$  sur  $\mathbb{R}$ .

**44** **Partie A :**

1) Déterminer l'arrondi d'ordre quatre de  $\sin(-0,1396)$ .

2) A l'aide d'un changement de variable convenable, résoudre dans  $\left[ -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right]$

l'inéquation

$$-2\sin^2 x - 8\sin x - 1 \leq 0.$$

**Partie B :**

On considère la fonction numérique  $f$  définie par :  $f(x) = \frac{\cos 2x}{\sin x + 2}$ .

Soit  $Cf$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ .

- 1) Quel est le domaine de définition  $D_f$  de  $f$ ?
- 2) Prouver que les droites  $x = \frac{\pi}{2}$  et  $x = -\frac{\pi}{2}$  sont des axes de symétrie pour  $C_f$ .
- 3) Après avoir étudié la périodicité de  $f$ , justifier que l'on peut étudier  $f$  sur  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  puis donner le processus à suivre pour compléter l'étude de  $f$  sur  $[-\pi; \pi]$ .
- 4) (On rappelle que  $\sin 2x = 2\cos x \sin x$  et que  $\cos 2x = 1 - \sin^2 x$ )
  - a- Déterminer  $f'(x)$  pour tout  $x \in D_E$  puis établir que  $f'(x)$  dépend en signe et en racine de  $-2\sin^2 x - 8\sin x - 1$
  - b- Comment sont les tangentes à  $C_f$  aux points d'abscisses  $x = \frac{\pi}{2}$  et  $x = -\frac{\pi}{2}$ ?
- 5) Déterminer l'arrondi d'ordre quatre de  $f(-0,1396)$  puis dresser le tableau de variation de  $f$  sur l'ensemble  $D_E$ .
- 6) Tracer  $C_f$  sur  $D_E$  en mettant en évidence les points d'intersection de  $C_f$  avec les axes de coordonnées.  
En déduire le tracé de  $C_f$  sur  $[-\pi; \pi]$ .

## Fonctions paramétriques.

**45** Soit  $f_m$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f_m(x) = (2m - 1)x^4 - (m + 4)x^2 - m + 5$ .  
Où  $x$  est la variable et  $m$  est un paramètre réel.  
Soit  $(C_m)$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

- 1) Montrer que toutes les courbes  $(C_m)$  passent par deux points fixes dont on déterminera les coordonnées.
- 2) Etudier les fonctions  $f_0$  et  $f_1$  puis représenter leur courbe respectives  $(C_0)$  et  $(C_1)$ .

**46** Soit  $f_m$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f_m(x) = \frac{x^2 + 3x + 4m}{x^2 + (5m + 1)x + 3}$ .  
Où  $x$  est la variable et  $m$  est un paramètre réel.  
Soit  $(C_m)$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

- 1) Montrer que toutes les courbes  $(C_m)$  passent par trois points fixes dont on déterminera les coordonnées.
- 2) Déterminer  $m$  pour que le point d'intersection  $I$  de  $(C_m)$  et l'asymptote parallèle à  $(x'ox)$  ait pour abscisse  $\frac{3}{2}$ .
- 3) Etudier les fonctions  $f_0$  et  $f_1$  puis représenter leur courbe respectives courbe  $(C_0)$  et  $(C_1)$ .

**47** Soit  $f_m$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f_m(x) = \frac{x^2 - mx}{x^2 - 1}$ .

Où  $x$  est la variable et  $m$  est un paramètre réel.

Soit  $(C_m)$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

- 1) Donner le tableau de variation de la fonction  $f_m$  suivant les valeurs de  $m$ .  
(On distinguera les cas où  $m \neq 1$  et  $m \geq 0$ ).
- 2) Comparer  $f_m(x)$  et  $f_{-m}(-x)$  puis donner la position relative des courbes  $(C_m)$  et  $(C_{-m})$ .
- 3) Quelle sont les coordonnées des points de  $(C_m)$  à tangentes parallèles à  $(ox)$  quand ceux-ci existent ?
- 4) Montrer que ces points sont sur une même courbe fixe.
- 5) Etudier les fonctions  $f_0$  et  $f_1$  puis représenter leur courbe respectives  $(C_0)$  et  $(C_1)$ .

## Fonctions auxiliaires.

48

**Partie A :** On considère le polynôme  $P$  définie :  $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$

- 1) Donner le tableau de variation de  $P$ .
- 2) Démontrer que l'équation  $P(x) = 0$  a une solution unique  $\alpha$  dans l'intervalle  $]1,6; 1,7[$ .
- 3) Donner le signe de  $P(x)$  dans l'intervalle  $]-1; +\infty[$ .

**Partie B :** On considère la fonction  $f : ]-1; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{1-x}{1+x^3}$$

Soit  $C_f$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

- 1) a) Justifier la dérivabilité de  $f$  sur  $]-1; +\infty[$ .  
b) Calculer  $f'(x)$  puis établir que  $f'(x) = \frac{P(x)}{(1+x^3)^2}$
- 2) Donner le tableau de variation de  $f$ .
- 3) Déterminer les équations des asymptotes à la courbe  $C_f$  de  $f$ .
- 4) Placer  $\alpha$  puis tracer  $C_f$ .
- 5) Soit  $g$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $[2; +\infty[$ .  
Montrer que  $g$  réalise une bijection de  $[2; +\infty[$  sur un intervalle  $J$  que l'on précisera.
- 6) On désignera  $g^{-1}$  sa bijection réciproque.
  - a) Donner le tableau de variation de  $g^{-1}$
  - b) Tracer la courbe  $C_{g^{-1}}$  de  $g^{-1}$

49

**Partie A :** On donne la fonction  $g$  définie par  $g(x) = x^3 - 3x - 4$

- 1) Etudier les variations de  $g$  et dresser son tableau de variation.
- 2) Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  et que  $2,19 < \alpha < 2,20$
- 3) En déduire le signe de  $g(x)$  sur  $\mathbb{R}$

**Partie B :** On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R} - [-1 ; 1]$  par  $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$

Soit  $C_f$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ .

- 1) Calculer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition  $D_f$ .
- 2) Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R} - [-1 ; 1]$ , on a :  $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$
- 3) Etudier le signe de  $f'(x)$  et en déduire les variations de  $f$  puis son tableau de variation de la fonction  $f$ .
- 4) Montrer que la droite (D) d'équation  $y = x + 2$  est une asymptote oblique à la courbe  $C_f$ . Etudier la position de  $C_f$  et (D).
- 5) Tracer  $C_f$ .

**50**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$  par :  $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$

Soit  $C_f$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ .

**Partie A :**

Soit la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = x^3 - 3x - 4$

- 1) Etudier la fonction  $g$  (limites et sens de variation)
- 2) Montrer qu'il existe un réel  $\alpha$  unique tel que  $g(\alpha) = 0$ , puis déterminer une valeur approchée à  $10^{-2}$  près du réel  $\alpha$ .
- 3) Etudier le signe de  $g$  sur  $\mathbb{R}$

**Partie B :**

- 1) Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition  $D_f$ .

Montrer que  $\forall x \in D_f$  on a :  $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$  puis déduire le tableau de variation de  $f$ .

- 2) a) Montrer que  $\forall x \in D_f ; f(x) = x + 2 + \frac{x + 2}{x^2 - 1}$

b) En déduire que (C) admet une asymptote oblique (D) en  $-\infty$  et  $+\infty$ .

c) Etudier la position de (C) par rapport à (D).

- 3) Tracer la courbe (C) et la droite (D).

**Partie C :**

- 1) Déterminer l'abscisse des points de la courbe (C) où la tangente est parallèle à la droite d'équation  $y = x + 2$ .
- 2) Déterminer une équation de chacune de ces tangentes et les représenter.
- 3) En déduire graphiquement, suivant les valeurs de  $m$ , le nombre de solution de l'équation  $f(x) = m + x$ .

**51**

1) Soit la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = 2x - \sqrt{x^2 + 1}$

- a) Etudier les variations de la fonction  $g$ .
- b) Montrer que  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  que l'on déterminera.
- c) En déduire le signe de  $g$  sur  $\mathbb{R}$

2) Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 2\sqrt{x^2 + 1} - x$ .

Soit  $C_f$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

On note (D) et (D') les droites d'équations respectives :  $y = -3x$  et  $y = x$ .

- a) Etudier les limites de  $f$  en  $+\infty$  et  $-\infty$
- b) Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{x^2 + 1}}$  ;
- c) En déduire le tableau de variation de  $f$ .
- d) Déterminer la limite en  $-\infty$  de  $f(x) - (-3x)$ . Quelle conséquence graphique peut-on déduire de ce résultat ?
- e) Montrer la droite (D') est asymptote à la courbe (C) en  $+\infty$
- f) Etudier la position de (C) par rapport aux deux droites (D) et (D').
- g) Tracer la courbe (C), les droites (D) et (D').

**52**

On considère la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \frac{x}{1 - x^3}$

Soit  $C_f$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

### **Partie A :**

Soit la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = 2x^3 + 1$

- 1) Etudier la fonction  $g$  (limites et sens de variation)

- 2) Résoudre dans  $\mathbb{R}$ , l'équation  $g(x) = 0$ , puis en déduire l'arrondi d'ordre 2 de l'abscisse  $x_0$  du point d'intersection I de la courbe de  $g$  avec l'axe des abscisses.
- 3) En déduire le signe de  $g(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .

### **Partie B :**

- 1) Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition  $Df$  puis donner une interprétation géométrique des résultats obtenus.
- 2) a- Prouver que le signe de la fonction dérivée  $f'$  de  $f$  dépend en signe et en racine de la fonction  $g$  étudiée dans la **partie A**.  
 b- Déterminer  $g(x_0)$  où  $x_0$  est l'abscisse  $x_0$  du point d'intersection I de la courbe de  $g$  avec l'axe des abscisses obtenu dans la **partie A 2)**.  
 c- Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- 3) tracer la courbe ( $C_f$ ) dans le repère orthonormé ( $O ; \vec{i} ; \vec{j}$ ).
- 4) Déterminer graphiquement le nombre et le signe des solutions de l'équation paramétrique :  $(E_m) : mx^3 + x - m = 0$  où  $m$  est un paramètre réel.

## **Fonction irrationnelle –fonction avec valeur absolue.**

Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$   
 Soit  $C_f$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé ( $O ; \vec{i} ; \vec{j}$ ).

- 1) Donner l'ensemble de définition  $Df$  de  $f$ .
- 2) Etudier les variations de  $f$ , puis tracer avec soins sa courbe représentative dans un repère orthonormé. On donne :  $\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \approx -0,6$  et  $f\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) = -0,3$

**54** Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = -x + \sqrt{x^2 + 8}$

Soit  $C_f$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé ( $O ; \vec{i} ; \vec{j}$ ).

- 1) a) Démontrer que  $\forall x \in \mathbb{R}$ , on a :  $x - \sqrt{x^2 + 8} < 0$   
 b) Etudier les limites de  $f$  aux bornes de  $Df$ . En déduire que la courbe (C) de  $f$  admet une asymptote horizontale dont on précisera une équation.  
 c) Démontrer que la droite (D) d'équation  $y = -2x$  est asymptote à (C) en  $-\infty$
- 2) a) Calculer  $f'(x)$ . Puis en déduire de 1) a) le sens et le tableau de variation de  $f$ .

b) Tracer (C) et (D) dans un repère orthonormé (unité graphique : 2 cm)

Soit la fonction définie par :  $f(x) = \frac{|x^2+x|+1}{|x|+1}$

Soit  $C_f$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

- 1) Déterminer le domaine de définition de  $f$  et écrire  $f(x)$  sans les symboles "valeur absolue"
- 2) Etudier la dérivabilité de  $f$  en  $-1$  et en  $0$ , puis interpréter géométriquement les résultats
- 3) Etudier les variations de  $f$
- 4) Montrer que les droites d'équations  $y = -x - 2$  et  $y = x$  sont asymptotes à la courbe (C) et  $f$
- 5) Tracer (C)

56

Soit la fonction numérique  $f$  définie par  $f(x) = \sqrt{|x^2-2x-3|}$

Soit  $C_f$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de  $f$
- 2) Ecrire  $f(x)$  sans valeur absolue
- 3) Etudier la dérivabilité de  $f$  en  $x_0 = -1$  et en  $x_0 = 3$  puis interpréter graphiquement vos résultats.
- 4) Montrer que la courbe (C) de  $f$  admet une asymptote oblique ( $\Delta$ ) au voisinage de  $-\infty$  et une asymptote oblique (D) au voisinage de  $+\infty$ .
- 5) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (C) avec ( $\Delta$ ) et (D)
- 6) Etudier le sens de variation de  $f$  puis dresser son tableau de variation
- 7) Tracer dans un repère orthonormé la courbe (C) de  $f$ .

Soit la fonction  $f$  définie de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = |x| \sqrt{\frac{x}{x-1}}$

Soit  $C_f$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

- 1) Déterminer l'ensemble de définition  $D_f$  de  $f$
- 2) a) Etudier la dérivabilité de  $f$  au point  $x = 0$ , en déduire l'ensemble de dérivabilité de  $f$ .  
 b) Calculer  $f'(x)$  pour  $x$  élément des intervalles de dérivabilité.  
 c) Calculer les limites de  $f(x)$  aux bornes de  $D_f$  et préciser les équations des asymptotes à la courbe (C) de  $f$ .  
 d) Dresser le tableau de variation de  $f$
- 3) Soit  $g$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $I = ]-\infty, 0]$ 
  - a) Montrer que  $g$  réalise une bijection de  $I$  sur un intervalle  $J$  à déterminer. On désigne par  $g^{-1}$  la bijection réciproque de  $g$  et  $(C_{g^{-1}})$  sa courbe.
  - b) Calculer  $f(0)$ ,  $f(-1)$ ,  $f(2)$ ,  $f(3)$
  - c) Construire dans le même repère orthonormé les courbes (C) et  $(C_{g^{-1}})$
  - d) Calculer  $(g^{-1})' \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} \right)$

58

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \sqrt{|x^2 - 6x + 5|}$

Soit  $C_f$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

- 1) Etudier suivant les valeurs de  $x$ , le signe du polynôme et l'expression de  $f(x)$  sans le symbole "valeur absolue".
- 2) Etudier la continuité et la dérivabilité de  $f$ , en particulier en 1 et en 5. La courbe admet-elle des tangentes en ces points ?
- 3) Etudier les variations de  $f$ .
- 4) Démontrer que la droite d'équation  $x = 3$  est axe de symétrie pour la courbe (C).
- 5) Démontrer que les droites d'équations  $y = x - 3$  et  $y = -x + 3$  sont asymptotes à la courbe (C).
- 6) Déterminer les coordonnées des points A et B d'intersection de la courbe (C) avec ses deux asymptotes, A étant le point dont l'abscisse est supérieure à 3.
- 7) Soit I le point de coordonnées  $(3; 0)$ . Démontrer que  $\forall x \in [1; 5]$  le point M de coordonnées  $(x, f(x))$  est à une distance constante du point I. En déduire la nature géométrique de la courbe (C), lorsque  $1 \leq x \leq 5$ .
- 8) Tracer (C) et ces asymptotes. Faire figurer les points A et B.

## Perfectionnement.

59

La fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  est donnée par une partie de son tableau de variation.

On sait de plus que la droite d'équation  $x = 2$  est axe de symétrie pour la courbe C de  $f$ .

| $x$       |                                                                      |
|-----------|----------------------------------------------------------------------|
| $-\infty$ | $\begin{array}{c} \text{O} \quad 2 \quad - \\ - \quad 4 \end{array}$ |
| $f'(x)$   | $\begin{array}{c} 1 \\ +\infty \end{array}$                          |
| $f(x)$    | $\begin{array}{c} \nearrow -\infty \\ \searrow 3 \end{array}$        |

- 1) Tracer la courbe C de  $f$
- 2) Compléter le tableau de variation de  $f$

3) On suppose que  $f(x)$  est de la forme  $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 + \beta x + \alpha}$

a- Déterminer les réels  $a$  ;  $b$  ;  $c$  ; et  $\alpha$

b- Montrer que la restriction  $g$  de  $f$  à  $I = ]2; 4[$  réalise une bijection de I sur un intervalle J à préciser.

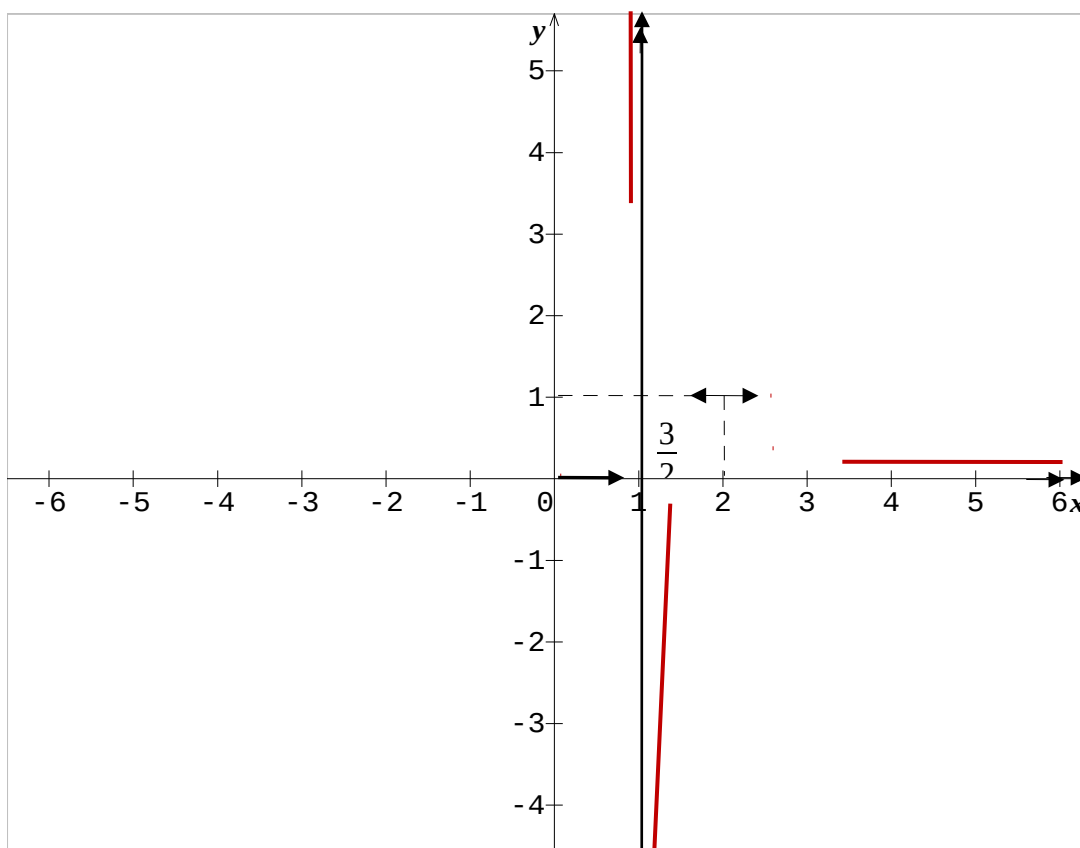
c- Donner l'équation de la tangente à la courbe C' de  $g^{-1}$  au point d'abscisse 1

d- Tracer C'

e- Discuter graphiquement suivant les valeurs du paramètre  $m$ , du nombre et des signes des solutions de l'équation  $(3-m)x^2 - (12 - 4m)x + 8 = 0$

60

On donne la figure ci-dessous qui représente une partie de la courbe d'une fonction  $g$ .



- 1) Compléter la courbe de la fonction  $g$  sachant que  $g$  est impaire.
- 2) Donner les équations des asymptotes à  $(C_g)$
- 3) Quel est le domaine de définition de  $g$  sous forme de réunion d'intervalles  
Donner les limites de  $g$  aux bornes de  $D_g$ .
- 4) Dresser le tableau de variation de  $g$ .

61

Soit  $f$  la fonction numérique définie par  $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x + d}$  où  $a, b, c, d$  sont des réels et  $(C_f)$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

- 1) Trouver les réels  $a$  ;  $b$  ;  $c$  et  $d$  sachant que la droite d'équation  $x = 3$  est asymptote et  $(C_f)$  passe par les points  $A(2 ; 3)$  ,  $B(4 ; 7)$  et admet au point d'abscisse 2 une tangente horizontale.
- 2) Dans la suite du problème on prendra  $a = 1$  ;  $b = -1$  ;  $c = -5$  et  $d = -3$

a- Etudier la fonction  $f$

b- Etudier la position de  $(C_f)$  par rapport à son asymptote oblique

c- Montrer que la restriction  $g$  de  $f$  à l'intervalle  $[4 ; +\infty[$  réalise une bijection de  $[4 ; +\infty[$  sur un intervalle  $J$  que l'on précisera.

d- Calculer  $g(5)$  ;  $g(6)$  ;  $(g^{-1})\left(\frac{15}{2}\right)$

3) Montrer que  $(C_f)$  admet un centre de symétrie que l'on déterminera

4) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet exactement deux solutions  $\alpha$  et  $\beta$

5) a- Montrer que  $\forall x \in [4, 5] \text{ on a } |f'(x)| \leq \frac{3}{4}$

b- En déduire que  $|f(x) - \frac{15}{2}| \leq \frac{3}{4}|x - 5|$

6) Tracer (Cf) dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  ainsi que (Cg<sup>-1</sup>) la courbe de g<sup>-1</sup>

62

**Partie A :** Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $Df = ]1 ; +\infty[$  par :  $f(x) =$

$$\frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$$

1) Montrer que la dérivée de  $f$  garde un signe constant sur  $Df$ .

2) Etudier les variations de  $f$  (limite et sens de variation)

3) En déduire que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique dans l'intervalle  $]1 ; 2[$

**Partie B :** On se propose de résoudre l'équation  $f(x) = 0$  dans  $]1 ; 2[$ .

1) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$ , a même ensemble de solution que l'équation  $1 + \frac{1}{\sqrt{x}} = x$

2) On appelle  $g$  la fonction définie sur  $]0 ; +\infty[$  par :  $g(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$  soit  $\alpha$  la solution de l'équation  $f(x) = 0$  (On a donc  $g(\alpha) = \alpha$  et  $1 \leq \alpha \leq 2$ )

a) Montrer que si  $x$  est élément de  $]1 ; 2[$  alors  $g(x)$  est aussi élément de  $]1 ; 2[$ .

b) Justifier la dérivabilité de  $g$  sur  $]0 ; +\infty[$  Calculer la dérivée de  $g$  puis montrer que

$$\text{pour tout } x \in [1, 2] \text{ on a : } |g'(x)| \leq \frac{1}{2}$$

c) En déduire que pour tout  $x$  de  $[1, 2]$ , on a  $|g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$

63

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  par  $f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x-1)^2}$  et soit (C) sa courbe représentative dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1) Etudier la fonction  $f$  (limites, variations).

2) a- Déterminer les réels  $a ; b ; c ; d$  tel que  $\forall x \neq 1$  on a :  $f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{(x-1)^2}$

b- En déduire que la droite (D) d'équation  $y = x - 2$  est asymptote à (C)

c- Préciser la position de la courbe (C) et la droite (D) et les coordonnées du point commune I à la courbe (C) et (D).

3) Tracer (C) et (D)

4) a- Déterminer l'abscisse du point J de la courbe (C) où la tangente est parallèle (D) ; puis l'équation de cette tangente. Tracer cette tangente (T).

b- En déduire graphiquement suivant les valeurs de  $m$ , le nombre de solution de l'équation  $f(x) = x + m$ .

- 5) On se propose de retrouver par calcul le résultat trouvé en 4)
- a) Montrer que les abscisses des points d'intersection de (C) et de la droite d'équation  $y = x + m$  sont les solutions de l'équation :
- (E) :  $(m + 2)x^2 + (-2m - 7)x + m + 4 = 0$
- b) Trouver suivant les valeurs de  $m$ , le nombre de solution de l'équation (E).
- c) Pour quelles valeurs de  $m$  la courbe (C) et la droite d'équation  $y = x + m$  ont-elles deux points communs M et N ?
- d) Dans ce cas, calculer en fonction de  $m$ , l'abscisse du milieu I de [M N].
- e) Montrer que lorsque  $m$  varie, le point I appartient à la courbe (C') d'équation :
- $$y = x + \frac{7-4x}{2x-2}$$

**64**

Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{1}{x+1}$  et (C) sa courbe.

1) a- Démontrer que la courbe représentative de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  est au dessus de sa tangente en tout point.

b- En déduire que  $\forall \alpha \in [0 ; +\infty[$ , on a :  $\frac{1}{1+\alpha} \geq 1 - \alpha$  (1)

2) Soit la fonction  $g$  définie sur  $[0, +\infty[$ , par  $g(x) = \sqrt{x+1}$  et soit  $a$  un réel strictement positif.

3) Déterminer la dérivée première et seconde de  $g$  sur  $[0 ; +\infty[$

4) Vérifier que  $\forall x \in [0 ; a[$  on a :  $\frac{1}{2\sqrt{1+a}} \leq g'(x) \leq \frac{1}{2}$

5) En utilisant le théorème de l'inégalité des accroissements finis à la fonction  $g$  sur

l'intervalle  $[0 ; a]$ , démontré que  $1 + \frac{a}{2\sqrt{1+a}} \leq \sqrt{1+a} \leq 1 + \frac{a}{2}$  (2)

6) a) Déduire des relations (1) et (2) que :

$\forall \alpha \in [0 ; +\infty[$ , on a :  $1 + \frac{a}{2} - \frac{a^2}{4} \leq \sqrt{1+a} \leq 1 + \frac{a}{2}$

b) Etablir alors l'inégalité suivante :  $1,0475 \leq \sqrt{1,1} \leq 1,05$

c) En déduire une valeur approchée de  $\sqrt{1,1}$  tout en précisant la marge d'incertitude.

7) Etudier la fonction  $f$  puis tracer la courbe (C).

# Suites

## Objectifs

### Ce thème vise à :

- étudier le comportement global d'une suite numérique (majoration, minoration, convergence, variations) ;
- mettre en œuvre le raisonnement par récurrence ;
- donner des outils pour traiter des problèmes d'approximation.

## Savoirs et savoir-faire

| SAVOIRS                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | SAVOIR-FAIRE                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>• Suites monotones</li> <li>• Suites majorées, minorées, bornées</li> <li>• Suites convergentes : <ul style="list-style-type: none"> <li>- Notion de convergence.</li> <li>- Unicité de la limite (admise)</li> <li>- Toute suite croissante et majorée converge</li> <li>- Toute suite décroissante et minorée converge.</li> <li>- Si <math>f</math> est une fonction numérique telle que <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x) = l</math> alors la suite définie par <math>u_n = f(n)</math> converge vers <math>l</math>.</li> </ul> </li> <li>• si <math>(u_n)</math> est une suite convergeant vers <math>a</math> et <math>f</math> une fonction continue en <math>a</math> alors la suite <math>v_n = f(u_n)</math> converge vers <math>f(a)</math>.</li> <li>• Convergence des suites géométriques (suites du type <math>(a^n)</math>).</li> <li>• Suites divergentes</li> <li>• Convergence des suites géométriques et des suites du type <math>n^\alpha</math></li> <li>• Suites divergentes</li> <li>• Théorèmes de comparaison :<br/>Soient les suites <math>(v_n)</math> et <math>(u_n)</math> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) Si à partir d'un certain rang, <math>v_n \leq u_n</math> et si <math>(v_n)</math> tend vers <math>+\infty</math>, alors <math>(u_n)</math> tend vers <math>+\infty</math>.</li> <li>2) Si à partir d'un certain rang, <math>v_n \leq u_n</math> et si <math>(u_n)</math> tend vers <math>-\infty</math>, alors <math>(v_n)</math> tend</li> </ol> </li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Démontrer qu'une suite est monotone : <ul style="list-style-type: none"> <li>- Par comparaison de deux termes généraux consécutifs ;</li> <li>- Par l'étude des variations d'une fonction ;</li> <li>- Par un raisonnement par récurrence.</li> </ul> </li> <li>• Démontrer qu'une suite est majorée et/ou minorée : <ul style="list-style-type: none"> <li>- Par un calcul direct ;</li> <li>- Par l'étude des variations d'une fonction ;</li> <li>- Par un raisonnement par récurrence.</li> </ul> </li> <li>• Démontrer qu'une suite est convergente ou divergente par : <ul style="list-style-type: none"> <li>- L'étude du comportement d'une fonction ;</li> <li>- L'utilisation des opérations sur les limites ;</li> <li>- L'utilisation des théorèmes de comparaison.</li> </ul> </li> <li>• conjecturer à partir d'une représentation graphique et comportement d'une suite récurrente.</li> </ul> |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |  |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| <p>vers <math>-\infty</math>.</p> <p>3) Si à partir d'un certain rang,<br/> <math> v_n - l  \leq u_n</math> et si <math>(u_n)</math> tend vers 0, alors <math>(v_n)</math> tend vers <math>l</math>.</p> <p>4) Si à partir d'un certain rang,<br/> <math>v_n \leq u_n \leq w_n</math> et si <math>(v_n)</math> et <math>(w_n)</math> tend vers <math>l</math>, alors <math>(u_n)</math> tend vers <math>l</math>.</p> <p>5) Si à partir d'un certain rang <math>v_n \leq u_n</math> et <math>(u_n)</math> tend vers <math>l</math> et <math>(v_n)</math> tend vers <math>l'</math> alors <math>l' \leq l</math>.</p> <p>•suites <math>(a^n)</math> et <math>(n^\alpha)</math>. Croissance comparée<br/> Limites et comportements asymptotiques comparés<br/> des suites <math>(\ln n)</math> ; <math>(a^n)</math>, <math>a &gt; 0</math> et <math>(n^\alpha)</math>, <math>\alpha &gt; 0</math>.</p> <p>Suites récurrentes définies par une relation du type :<br/> <math>u_{n+1} = f(u_n)</math>.<br/> Soit <math>(u_n)</math> une suite définie par <math>u_{n+1} = f(u_n)</math>.<br/> Si <math>(u_n)</math> converge vers <math>l</math> et si <math>f</math> est continue en <math>l</math> alors<br/> <math>f(l) = l</math>.</p> |  |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|

## I- Généralité :

### 1) Définition :

On appelle suite numérique toute fonction définie de  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ . On note

$$U : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \\ n \rightarrow U(n) = u_n$$

### Exemple :

Soit une suite  $u_n$  définie par :  $u_n = \in$ . Calculer :  $u_0 ; u_1 ; u_2 ; u_3 ; u_4$

$$u_0 = \mathcal{E} ; u_1 = 1 ; u_2 = \vec{u}_0 ; u_3 = \phi ; u_4 = \phi$$

### 2) Mode de définition d'une suite :

- Une suite peut être définie par 1 formule explicite c'est-à-dire :  $u_n$  en fonction de  $n$   
 $u_n = f(n)$ .

**Exemple :**  $u_n = n + 3 ; v_n = \frac{2n - 4}{n + 1} ; w_n = 4n^2 - 3n + 1$

- Une suite peut être définie par son 1<sup>er</sup> terme et une formule de récurrence, c'est-à-dire  $u_{n+1}$  s'exprime en fonction de  $u_n$ .

**Exemple :** soit la suite :  $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n + 4 \end{cases}$ . Calculer :  $u_1 ; u_2 ; u_3 ; u_4$

### Solution :

Pour  $n = 0, u_1 = \frac{3}{2}u_0 + 4 = \frac{3}{2}(2) + 4 = 7$

Pour  $n = 1, u_2 = \frac{3}{2}u_1 + 4 = \frac{29}{2}$

Pour  $n = 2, u_3 = \frac{3}{2}u_2 + 4 = \frac{103}{4}$

Pour  $n = 3, u_4 = \frac{3}{2}u_3 + 4 = \frac{341}{8}$

$u_0$  est le 1<sup>er</sup> terme de la suite et  $u_n$  est le terme général.

## 2) Sens de variation d'une suite

- Si  $u_{n+1} - u_n \geq 0 ; \forall n \in \mathbb{N}$  alors  $u_n$  est croissante
- Si  $u_{n+1} - u_n \leq 0 ; \forall n \in \mathbb{N}$  alors  $u_n$  est décroissante
- Si  $u_{n+1} - u_n = 0 ; \forall n \in \mathbb{N}$  alors  $u_n$  est constante

### Exemple :

Etudier le sens de variation de chacune des suites :

$$u_n = \frac{2n + 3}{n + 2} ; v_n = -\frac{3}{2}n + 4$$

### Solution :

$$u_n = \frac{2n + 3}{n + 2} \Rightarrow u_{n+1} = \frac{2(n + 1) + 3}{(n + 1) + 2} = \frac{2n + 5}{n + 3}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2n + 5}{n + 3} - \frac{2n + 3}{n + 2} = \frac{1}{(n + 3)(n + 2)} > 0$$

D'où  $u_n$  est croissante

$$v_n = -\frac{3}{2}n + 4 \Rightarrow v_{n+1} = -\frac{3}{2}(n + 1) + 4 = -\frac{3}{2}n + \frac{5}{2}$$

$$v_{n+1} - v_n = \left(-\frac{3}{2}n + \frac{5}{2}\right) - \left(-\frac{3}{2}n + 4\right) = -\frac{3}{2} < 0$$

$$v_{n+1} - v_n = -\frac{3}{2} < 0 \quad \text{D'où } v_n \text{ est décroissante}$$

## 3) Représentation des termes d'une suite :

Pour représenter les termes d'une suite  $u_n$  sur l'axe de abscisses, on trace la 1<sup>ère</sup> bissectrice (D) d'équation  $y = x$ . Puis on trace la fonction associée à la suite  $u_n$  en posant  $u_n = x$  et  $u_{n+1} = f(x)$ . On détermine les termes de la suite sur l'axe des abscisses par projection.

### Exemple

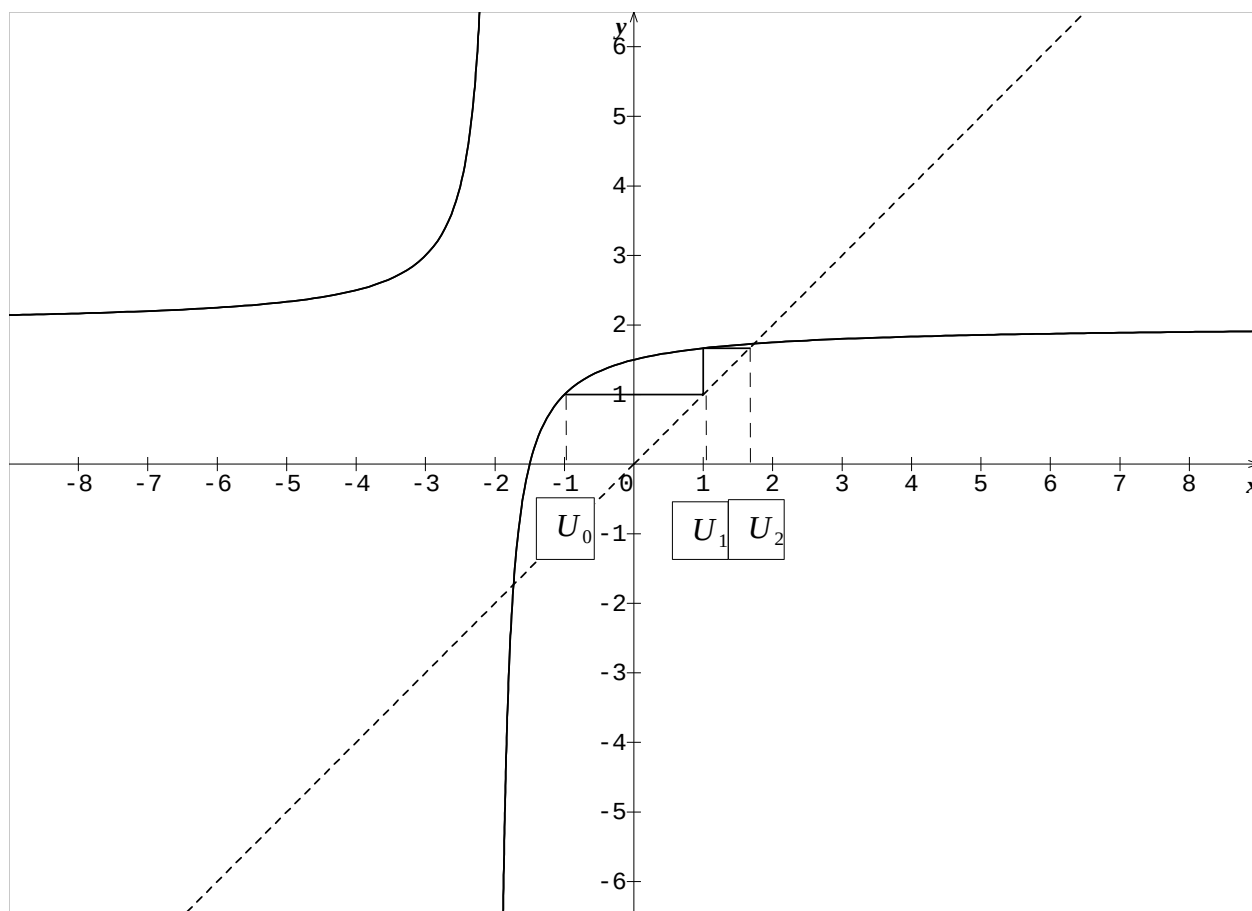
$$\text{Soit } (u_n) \text{ définie Par : } \begin{cases} U_0 = -1 \\ U_{n+1} = \frac{3 + 2U_n}{2 + U_n} \end{cases}$$

Représenter sur l'axe  $(ox)$  les 3 premiers termes de la suite  $u_n$ .

**Solution**

Désignons par  $f$  la fonction définie sur  $] -2 ; +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{3 + 2x}{2 + x}$

En suivant les règles de constructions ci-dessous , on a la représentation suivante :



## II- Relations entre les limites :

**Théorème 1** : (Théorème des gendarmes).

Considérons les trois suites  $u_n$  ;  $v_n$  et  $w_n$  ( $n > n_0$ )

Tel que :  $u_n \leq v_n \leq w_n$

$u_n$  et  $w_n$  Si converge vers la même limite  $l$  ; alors  $v_n$  converge vers  $l$ .

**Preuve** :

A partir de la relation donnée entre les suites on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} v_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} w_n$$

$$\Leftrightarrow l \leq \lim_{n \rightarrow \infty} v_n \leq l$$

Alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = l$

## III- Suites Arithmétiques

1) Activité :

Au 1<sup>er</sup> Janvier 2012, le prix d'un kilo de sucre est de 550 f CFA.

Sachant que le prix du kilo subit une augmentation de 50 f CFA au 1<sup>er</sup> Janvier de chaque année, quel serait le prix du kilo de sucre au 1<sup>er</sup> Janvier 2013 ? Au 1<sup>er</sup> Janvier 2014 ?

On désigne par  $P_n$  le prix du kilo du sucre au 1<sup>er</sup> Janvier + n.

Calculer  $P_1$  ;  $P_2$  ;  $P_3$  et  $P_n$ .

Calculer  $P_{n+1} - P_n$ .

### Solution

Soit  $P_0$  le prix d'un kilo de sucre au 1<sup>er</sup> Janvier 2012 tel que  $P_0 = 550$ .

Calculons le prix d'un kilo de sucre :

- **Au 1<sup>er</sup> Janvier 2013** , le prix d'un kilo de sucre serait  $P_1 = P_0 + 50 = 550 + 50 = 600$ .
- **Au 1<sup>er</sup> Janvier 2014** , le prix d'un kilo de sucre serait  $P_2 = P_1 + 50 = 600 + 50 = 650$ .

Soit  $P_n$  le prix d'un kilo de sucre au 1<sup>er</sup> Janvier + n.

Calculons :  $P_1$  ;  $P_2$  ;  $P_3$  et  $P_n$

- $P_0 = 550$ .
- $P_1 = P_0 + 50 = 550 + 50 = 600$ .
- $P_2 = P_1 + 50 = 600 + 50 = 650$ .
- $P_3 = P_2 + 50 = 650 + 50 = 700$ .
- $P_n = P_0 + 50n = 550 + 50n$ .

Calculons  $P_{n+1} - P_n$

$$P_n = 550 + 50n \quad \Rightarrow P_{n+1} = 550 + 50(n + 1) = 550 + 50 + 50n = 600 + 50n$$

$$\Rightarrow P_{n+1} - P_n = (600 + 50n) - (550 + 50n) = 600 + 50n - 550 - 50n = 50$$

**Alors on a : une suite arithmétique de raison  $r = 50$ .**

## 2) Définition :

Une suite  $U_n$  est dite arithmétique si et seulement si :  $\vec{U_{n+1}} - \vec{U_n} = \vec{r}$  ;  $U_{n+1} - U_n = r$ .

$r$  est appelé la raison de la suite  $U_n$ .

**Exemple :**

Soit une suite  $U_n$  définie par :  $U_n = \frac{\vec{IH} \times \vec{IJ} - k}{2}$ .  
 Démontrer que  $U_n$  est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le 1<sup>er</sup> terme  $U_0$ .

**Solution :**

$$U_n =$$

$$3\sqrt{3}-2+i(3+2\sqrt{3}) \Rightarrow \text{d'où } U_n \text{ est une suite arithmétique de raison } r = \frac{1}{2} \text{ et de 1}^{\text{er}} \text{ terme } U_0 = 4$$

**3) Expression du terme général :**

Soit  $U_n$  une suite de 1<sup>er</sup> de terme  $U_0$  et de raison  $r$ .

$$U_1 - U_0 = r$$

$$U_2 - U_1 = r$$

$$U_3 - U_2 = r$$

$$\vdots$$

$$\tau$$

$$\|\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC}\|$$

D'une façon générale si  $U_p$  est le 1<sup>er</sup> terme l'expression du terme général est :

$$U_n = U_p + (n-p)r$$

**Exemple :**

$$\tau$$

Soit la suite réel définie par

- Démontrer que  $U_n$  est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le 1<sup>er</sup> terme.
- Exprimer  $U_n$  en fonction de  $n$ .

**Solution :**

$$a) U_{n+1} = U_n - 3 \Rightarrow U_{n+1} - U_n = -3$$

D'où  $U_n$  est une suite arithmétique de raison  $r = -3$  et de 1<sup>er</sup> terme  $U_0 = -1$ .

$$U_n = U_0 + nr = -1 + n(-3) = \boxed{U_n = -3n - 1}$$

**4) Termes équidistants d'une suite :**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite arithmétique  $p$  un entier naturel tel que  $p \leq n$  les termes  $u_p$  et  $u_{n-p}$  sont des termes équidistants des termes extrêmes  $u_0$  et  $u_n$  car il ya  $p$  termes avant le terme  $u_p$  et  $p$  termes après le terme  $u_{n-p}$  on a :

### 5) Somme des termes équidistants d'une suite arithmétique

Soit  $p$  un entier naturel tel que  $p \leq n$

Les termes  $u_p$  et  $u_{n-p}$  sont des termes équidistants des termes extrêmes

$$u_p + u_{n-p} = (u_0 + p r) + (u_0 + (n-p) r) = u_0 + (u_0 + n r) \text{ d'où}$$

$u_p + u_{n-p} = u_0 + u_n$  d'où le théorème

**Théorème :** la somme de deux termes équidistants d'une suite arithmétique est égale à la somme des termes extrêmes

### 6) Propriétés :

En application du théorème on a :

**P<sub>1</sub> :** Trois nombres **a, b, c** forment une progression arithmétique si :

$$2b = a + c.$$

**Preuve :**

Soit  $a, b$  et  $c$  trois réels

$$b = a + r$$

$$c = b + r$$

$$a + c = a + b + r = 2a + 2r = 2(a + r). \text{ Alors : } a + c = 2b$$

**P<sub>2</sub> :** Trois nombres **a, b, c** forment une progression arithmétique de raison  $r$  si :

$$b = a + r \text{ et } c = a + 2r.$$

**P<sub>3</sub> :** Quatre nombres **a, b, c, d** forment une progression arithmétique de raison  $r$  si :

$$3b - d = 2d$$

**P<sub>4</sub> :** soit  $U_n$  une suite arithmétique de 1<sup>er</sup> terme  $U_0$ . La somme de 2 termes équidistants est toujours à la somme des extrêmes

$$U_0, U_1, U_2, \dots, U_{n-2}, U_{n-1}, U_n$$

$U_1$  et  $U_{n-1}$  sont équidistants

$$U_0 + U_n = U_p + U_{n-p}$$

### Exercices d'application

Trouver 3 nombres consécutifs  $a, b$  et  $c$  d'une suite en progression arithmétique sachant que

$$\begin{cases} a + b + c = 3 \\ 3a - 6b + c = 6 \end{cases}$$

**Solution :**

Trouvons 3 nombres consécutifs  $a$  ;  $b$  et  $c$  d'une suite en progression arithmétique sachant que  $\begin{cases} a+b+c=3 \\ 3a-6b+c=6 \end{cases}$

On sait que pour une progression arithmétique de 3 termes  $a$  ;  $b$  ;  $c$  , on a :  $a + c = 2b$   
Ainsi l'équation dévient :

$$\begin{cases} 2b + b = 3 \\ 3a - 6b + c = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3b = 3 \\ 3a - 6b + c = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ 3a - 6b + c = 6 \end{cases}$$

$$\text{D'autre part } a + b + c = 3 \Rightarrow a + 1 + c = 3 \Rightarrow a + c = 2$$

$$\begin{cases} a+c=2 \\ 3a-6+c=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+c=2 \\ 3a+c=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a-c=-2 \\ 3a+c=12 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2a = 10 \Rightarrow a = 5 \text{ et } c = -3$$

D'où les nombres  $a$  ;  $b$  et  $c$  sont tels que  $a = 5$  ;  $b = 1$  et  $c = -3$

## **7) Sens de variation d'une suite arithmétique**

Soit  $U_n$  une suite arithmétique de raison  $r$ . On a :

$U_{n+1} - U_n = r$  d'où :

- Si  $r > 0$  alors  $U_n$  est croissante

- Si  $r < 0$  alors  $U_n$  est décroissante
- Si  $r = 0$  alors  $U_n$  est constante

### 7) Somme des termes d'une suite arithmétique :

Soit  $U_n$  une suite arithmétique de 1<sup>er</sup> terme  $U_0$  et de raison  $r$ .

$$S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_{n-2} + U_{n-1} + U_n$$

$$S_n = U_n + U_{n-1} + U_{n-2} + \dots + U_2 + U_1 + U_0$$

$$2S_n = (U_0 + U_n) + (U_1 + U_{n-1}) + (U_2 + U_{n-2}) + \dots + (U_n + U_0)$$

$$2S_n = (U_0 + U_n) + (U_0 + U_n) + (U_0 + U_n) + \dots + (U_0 + U_n)$$

$$\Rightarrow 2S_n = (n + 1) (U_0 + U_n)$$

$$\boxed{S_n = \frac{n+1}{2} (\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC})} = \frac{n+1}{2} (\vec{MA} - \vec{MB}) \quad \Leftrightarrow \quad S_n = \frac{n+1}{2} (3\sqrt{3} - 2 + (3+2\sqrt{3}) - (-3-1) - (\sqrt{3}-1) + (1-4\sqrt{3}) + (-4-\sqrt{3})) \quad (1^{\text{er}} \text{ terme} + \text{dernier terme})$$

$$\text{ou } \boxed{S_n = \frac{n+1}{2} (3\sqrt{3} - 2 + 3 + 2\sqrt{3} + \sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} + 1 - 4\sqrt{3} - 4 - \sqrt{3}) = 0}$$

**Remarque :** une suite arithmétique est toujours divergente

## IV- Suites géométriques

### Situation problème

Le premier Janvier 1999, la population d'une commune rurale était de 3000 habitants.

On admet que cette population diminue de 4 % chaque année.

Calcule la population de cette commune :

a) Au 1<sup>er</sup> Janvier 2005 ;

b) Au 1<sup>er</sup> Janvier 2006

c) Au 1<sup>er</sup> Janvier  
2012

### Solution

Soit  $U_n$  la population de cette commune au 1<sup>er</sup> Janvier de l'année  $n$ .

Soit  $U_1 = 3000$  la population initiale de cette commune.

On a :

$$U_1 = 3000 .$$

$$U_2 = U_1 - 4\%U_1 \Rightarrow U_2 = U_1(1 - 4\%) = U_1\left(1 - \frac{4}{100}\right) = U_1(0,96)$$

$$U_3 = U_2(0,96)$$

$$\begin{array}{cc} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{array}$$

$$U_{n+1} = U_n(0,96)$$

$$\Rightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} = 0,96.$$

**Alors on a : une suite géométrique de raison  $q = 0,96$ .**

$$\text{D'où son expression est : } U_n = U_1(q)^{n-1} = 3000(0,96)^{n-1}$$

Déterminons ainsi la population :

- **Au 1<sup>er</sup> Janvier 2005**

$$\text{On sait que : } U_n = 3000(0,96)^{n-1} \text{ et } n = 2005 - 1999 = 6$$

$$\text{D'où la population au 1<sup>er</sup> Janvier 2005 est : } U_6 = 3000(0,96)^{6-1} = 3000(0,96)^5$$

$$=> U_6 = 2446,11 \approx 2446$$

Ainsi la population au 1<sup>er</sup> Janvier 2005 est : 2244 habitants.

**- Au 1<sup>er</sup> Janvier 2006**

On sait que :  $U_n = 3000(0,96)^{n-1}$  et  $n = 2006 - 1999 = 7$

D'où la population au 1<sup>er</sup> Janvier 2006 est :  $U_7 = 3000(0,96)^{7-1} = 3000(0,96)^6$

$$=> U_7 = 2348,27 \approx 2348$$

Ainsi la population au 1<sup>er</sup> Janvier 2006 est : 2348 habitants.

**- Au 1<sup>er</sup> Janvier 2012**

On sait que :  $U_n = 3000(0,96)^{n-1}$  et  $n = 2012 - 1999 = 13$

D'où la population au 1<sup>er</sup> Janvier 2005 est :  $U_{13} = 3000(0,96)^{13-1} = 3000(0,96)^{12}$

$$=> U_{13} = 1838,12 \approx 1838$$

Ainsi la population au 1<sup>er</sup> Janvier 20012 est : 1838 habitants.

**2) Définition :**  $U_n$  est une suite géométrique si et seulement si :  $\rho_1(M) = \vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}$  ou  $U_{n+1} = qU_n$ .  
 $q$  est un réel fixé appelé la raison de la suite géométrique.

### Exemple :

1, 2, 4, 8, 16, 32, .....  $2^n$  sont les termes d'une suite géométrique de raison  $q = 2$  et de 1<sup>er</sup> terme  $U_0 = 1$   
 L'expression de terme général est  $U_n = 2^n$

### 1) Expression du terme générale

Soit  $U_n$  une suite géométrique de raison  $q$  et de 1<sup>er</sup> terme  $U_0$

$$U_1 = qU_0$$

$$U_2 = qU_1$$

$$U_3 = qU_2$$

$$U_4 = qU_3$$



$$U_n = qU_{n-1}$$

Multiplions membre à membre les termes de l'égalité.

$$U_1 \times U_2 \times U_3 \times U_4 \times \dots \times U_n = (qU_0) (qU_1) (qU_2) \dots (qU_{n-1})$$

$U_n = q^n \times U_0$  ou d'une manière générale  $U_n = U_p \cdot q^{n-p}$  (après simplification des facteurs semblables dans les deux membres)

Où  $U_p$  désigne le 1<sup>er</sup> terme.

### Produit des termes équidistants des termes extrêmes d'une suite géométrique :

**Théorème :** Le produit de deux termes équidistants des termes extrêmes est égal au produit des termes extrêmes c'est-à-dire  $U_p \times U_{n-p} = U_0 \times U_n$

### Propriétés :

**$P_1$  :** Trois nombres **a, b, c** forment une progression géométrique si :

$$b^2 = ac. \text{ (en application du théorème précédent)}$$

**P<sub>2</sub>**: Trois nombres **a, b, c** forment une progression géométrique de raison q si :

$$\mathbf{b = qa \text{ et } c = q^2a.}$$

**P<sub>3</sub>**: Quatre nombres **a, b, c, d** forment une progression géométrique de raison q si :

$$\mathbf{b = qa \quad ; \quad c = q^2a \quad \text{et} \quad d = q^3a}$$

### **Exercice d'application :**

Trouver 3 nombres consécutifs a ; b et c d'une suite en progression géométrique sachant que

$$\begin{cases} a \cdot b \cdot c = 8 \\ a + b = -1 \\ c - a = 1 \end{cases}$$

On sait que pour une progression géométrique de 3 termes a ; b ; c , on a :  $a \times c = b^2$   
Ainsi l'équation dévient :

$$\begin{aligned} \begin{cases} (a \cdot c) \cdot b = 8 \\ a + b = -1 \\ c - a = 1 \end{cases} & \Rightarrow \begin{cases} (b^2) \cdot b = 8 \\ a + b = -1 \\ c - a = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^3 = 8 \\ a + b = -1 \\ c - a = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a + b = -1 \\ c - a = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = -4 \\ c - a = 1 \end{cases} \\ & \Rightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = -4 \\ c = -3 \end{cases} \end{aligned}$$

D'où les nombres a ; b et c sont tels que  $a = -4$  ;  $b = 3$  et  $c = -3$

#### **4)Sens de variation d'une suite géométrique :**

Soit Un suite géométrique de raison et de 1<sup>er</sup> terme U<sub>0</sub> :

- **1<sup>er</sup> cas**  $U_0 > 0$  : si

- $q > 1 \Rightarrow U_n$  est croissante
- $0 < q < 1 \Rightarrow U_n$  est décroissante
- $q = 1$  alors  $U_n$  constante

- **2<sup>ème</sup> Cas**  $U_0 < 0$  : si

- $q > 1 \Rightarrow U_n$  est croissante
- $0 < q < 1 \Rightarrow U_n$  est décroissante
- $q = 1 \Rightarrow U_n$  est constante

#### 8) Convergence d'une suite géométrique :

La limite d'une suite étant la limite de son terme général une suite géométrique est convergente

si  $-1 < q \leq 1$

La suite est divergente si  $q \in ]-\infty; -1[ \cup ]1; +\infty[$

#### 6) Somme des termes d'une suite géométrique :

Soit  $U_n$  une suite géométrique de raison  $q$  et de 1<sup>er</sup> terme  $U_0$

$$S_n = U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n \quad (1)$$

$$qS_n = qU_0 + qU_1 + qU_2 + qU_3 + \dots + qU_n \quad (2)$$

**En effectuant la différence des équations (1) et (2), on a :**

$$S_n - qS_n = U_0 - qU_n \text{ or } U_n = U_0 \times q^n$$

$$S_n (1 - q) = U_0 - q(q^n \times U_0)$$

$$S_n (1 - q) = U_0 (1 - q^{n+1})$$

$$\boxed{S_n} = \frac{\|\vec{MO}\|}{1 - q} = \frac{\| -2\vec{AB} + \vec{AC} \|}{1 - q}$$

$$S_n = \left( \ell \right) = \left( M \in (\ell) / \|\vec{MO}\| = \frac{\| -2\vec{AB} + \vec{AC} \|}{1 - q} \right)$$

D'une manière générale si  $U_p$  est le 1<sup>er</sup> terme alors l'expression de la somme est :

$$\| -2\vec{AB} + \vec{AC} \|_{\text{Avec } (q \neq 1)}$$

### 1) Cas d'une suite géométrique :

Soit  $U_n$  une suite géométrique de raison  $q$

- Si  $|\vec{OC}| = |q| < 1$  alors  $U_n$  converge vers 0
- Si  $|\vec{OC}| = |q| > 1$  alors  $U_n$  est divergente
- Si  $|\vec{OC}| = |q| = 1$  alors  $U_n$  converge vers  $U_0$



## V- Suites économiques :

### 1) Les intérêts :

L'intérêt est la rémunération d'un placement pendant une période donnée, ( c'est-à-dire entre un temps  $T_1$  et un temps  $T_2$  ).

Ainsi les intérêts sont classés en deux catégories: (**intérêts simples et intérêts composés** ).

#### NB :

- L'intérêt simple est utilisé pour des placements à court et moyen terme.
- L'intérêt composé est utilisé pour des placements à long terme.

#### a- Intérêts simples :

Un placement est fait à intérêt simple, lorsque, à des époques fixées d'avance celui qui prête ou place son argent en touche les intérêts de façon que le capital placé reste le même jusqu'à l'époque du remboursement.

#### Sa formule est :

$$I = \frac{C \cdot t \cdot n}{P} = \frac{(\text{Capital placé}) \cdot (\text{Taux d'intérêt}) \cdot (\text{Durée du placement})}{\text{Période}}$$

#### NB :

- Si :  $n$  est en **jours**, alors la **période**  $P = 36.000$ .
- Si :  $n$  est en **mois**, alors la **période**  $P = 1.200$ .
- Si :  $n$  est en **année**, alors la **période**  $P = 100$ .

#### b- Intérêts composés :

Un placement est fait à intérêt composé, lorsque, à la fin de chaque unité de temps, l'intérêt est ajouté au capital pour produire un intérêt à son tour, pendant l'unité de temps suivante.

#### Sa formule est :

$$I_n = C_0 \left[ (1 + i)^n - 1 \right] = (\text{Capital initial}) \left[ (1 + \text{taux d'intérêt})^{\text{Durée}} - 1 \right]$$

#### NB :

- 1 an = 2 semestres = 4 trimestres = 12 mois.

➤ 1 semestre = 2 trimestres = 6 mois =  $\frac{1}{2}$  an.

➤ 1 trimestre =  $\frac{1}{2}$  semestre = 3 mois =  $\frac{1}{4}$  an.

➤ 1 bi - an = 4 semestres = 8 trimestres = 24 mois = 2 ans.

c- Valeurs acquises :

$$C_n = C_0 (1 + i)^n = (\text{Capital initial}) (1 + \text{Taux d'intérêt})^{\text{Durée}}$$

**NB :**

Le taux d'intérêt s'exprime toujours en pourcentage ( % )

2) Taux de décroissance -Taux d'accroissement d'une population :

a-Notion de population et d'individu :

l'ensemble sur le quel porte une étude statistique est appelé **population** et un élément de cet ensemble est l'**individu**.

**NB :**

Dans une étude statistique, les mots : population et individu peuvent désignés des **êtres**, des **objets animés** ou **inanimés**.

b-Taux de décroissance d'une population :

**Définition :**

Soit ( **en %** ) est le taux de décroissance d'une population et **U<sub>P</sub>** la population initiale à l'année n, alors le taux de décroissance de cette population représente une progression géométrique de premier terme **U<sub>P</sub>** et de raison **q = 1 - t**.

Ainsi le taux de décroissance d'une population à l'année n est donné par l'expression :

$$U_n = U_P (1 - t)^{n-P} \quad \text{ou} \quad U_n = U_P (q)^{n-P} \quad \text{avec } q = 1 - t.$$

**NB :**

Si la population initiale est **U<sub>P</sub>** à l'année **n<sub>1</sub>**, alors la population à l'année **n<sub>2</sub>** est :

$$U_{n_2-n_1} = U_P (1 - t)^{(n_2-n_1)-P} \quad \text{ou} \quad U_{n_2-n_1} = U_P (q)^{(n_2-n_1)-P} \quad \text{avec } q = 1 - t$$

### **c-Taux de d'accroissement d'une population :**

#### **Définitions :**

**Définition 1 :** Soit ( **en %** ) est le taux d'accroissement d'une population et  $U_P$  la population initiale à l'année  $n$ , alors le taux d'accroissement de cette population représente une progression géométrique de premier terme  $U_P$  et de raison  **$q = 1 + t$** .

Ainsi le taux d'accroissement d'une population à l'année  $n$  est donné par l'expression :

$$U_n = U_P (1 + t)^{n-P} \quad \text{ou} \quad U_n = U_P (q)^{n-P} \quad \text{avec } q = 1 + t.$$

#### **NB :**

Si la population initiale est  $U_P$  à l'année  $n_1$ , alors la population à l'année  $n_2$  est :

$$U_{n_2-n_1} = U_P (1 + t)^{(n_2-n_1)-P} \quad \text{ou} \quad U_{n_2-n_1} = U_P (q)^{(n_2-n_1)-P} \quad \text{avec } q = 1 + t$$

**Définition 2 :** **Sir ( en FCFA )** est la raison d'accroissement d'une population et  $U_P$  la population initiale à l'année  $n$ , alors la raison d'accroissement de cette population représente une progression arithmétique de premier terme  $U_P$  et de raison  **$r$** .

Ainsi la raison d'accroissement d'une population à l'année  $n$  est donné par l'expression :

$$U_{n+1} - U_n = r$$

### **Evaluation :**

#### **activité 1 :**

Ali a reçu de son père une somme de 100.000 FCFA.

Après réception, il dépose cette somme à la banque le 1<sup>er</sup> Janvier 2009 à intérêt composé au taux annuel de 5 % en vue d'acheter une moto à 300000 FCFA.

- a-** A partir de quelle année pourra-t-il acheter sa moto sachant qu'il ne dispose que de cette somme ?
- b-** Quelle serait la nouvelle valeur acquise par Ali s'il place un capital de 100.000 FCFA au bout de 30 semestres au taux de 2 % par semestre ?

#### **activité 2 :**

Le premier Janvier 2011, le nombre d'élève d'une école était de 6000 .

Le nombre d'élève de cette école diminue chaque année de 5 % faute de performance.

Quelle sera le nombre d'élève de cette école au 1<sup>er</sup> Janvier 2015 ?

#### **activité 3 :**

Le premier Janvier 2012, le prix d'essence au Mali était de 690 FCFA.

**a-** Sachant que le prix du litre subit une augmentation de 5 FCFA au 1<sup>er</sup> Janvier de chaque année, calculer le prix du litre d'essence au premier Janvier 2013 ? Au premier Janvier 2014 ?

**b-** Soit  $P_n$  le prix du litre d'essence au premier Janvier + n, calculer :  $P_n$  et  $P_{n+1} - P_n$  puis en déduire la nature et la raison de la suite  $P_n$

**synthèse 1 :**

**a-** Déterminons le temps au bout duquel Ali pourra acheter sa moto.

Soient :

- $C_0 = 100.000$  FCFA : le capital initial.
- $C_n = 300.000$  FCFA : la valeur acquise.
- $i = 5 \% = \frac{5}{100} = 0,05$  : le taux d'intérêt.

Calculons ainsi la durée  $n$  pour que Ali puisse acheter sa moto.

$$\begin{aligned} \text{On a : } C_n &= C_0 (1+i)^n \Leftrightarrow (1+i)^n = \frac{C_n}{C_0} \Leftrightarrow (1+0,05)^n = \frac{300000}{100000} \\ &\Leftrightarrow 1,05^n = 3 \text{ (or } a^n = e^{n \ln a} \text{)} \end{aligned}$$

$$(1,05)^n = 3 \Leftrightarrow e^{n \ln(1,05)} = 3 \text{ (or } e^a = b \Leftrightarrow a = \ln b)$$

$$e^{n \ln(1,05)} = 3 \Leftrightarrow n \ln(1,05) = \ln 3 \Rightarrow n = \frac{\ln 3}{\ln(1,05)}$$

$$\Rightarrow n = \frac{1,09}{0,04} \Rightarrow n = 27,25 \approx 27.$$

**Donc Ali pourra acheter sa moto au bout de 27 ans.**

**b-**Déterminons la nouvelle valeur acquise par Ali au bout de 30 semestres au taux de 2 %.

$$C_n = C_0 (1+i)^n \Rightarrow C_{30} = 100.000 (1 + 2\%)^{30} \Leftrightarrow C_{30} = 100.000 (1 + 0,02)^{30}$$

$$\Rightarrow C_{30} = 100.000 (1,02)^{30} = 181.136 \text{ FCFA.}$$

**Donc Ali aura une valeur acquise de 181.136 FCFA au bout de 30 semestres .**

### Synthèse 2

Soit  $U_n$  le nombre d'élève de cette école au 1<sup>er</sup> Janvier de l'année  $n$  .

Soit  $U_1 = 6000$  le nombre d'élève de cette école au 1<sup>er</sup> Janvier 2011 .

On a :

$$U_1 = 6000 .$$

$$U_2 = U_1 - 5\%U_1 \Rightarrow U_2 = U_1 (1 - 5\%) = U_1 (1 - \frac{5}{100}) = U_1 (0,95)$$

$$U_3 = U_2 (0,95)$$

$$\begin{matrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{matrix}$$

$$U_{n+1} = U_n (0,95)$$

$$\Rightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} = 0,95.$$

**Alors on a : une suite géométrique de raison  $q = 0,95$ .**

D'où son expression est :  $U_n = U_1 (q)^{n-1} = 6000 (0,95)^{n-1}$

Déterminons ainsi le nombre d'élève de cette école au 1<sup>er</sup> Janvier 2015 :

- **Au 1<sup>er</sup> Janvier 2015**

On sait que :  $U_n = 6000(0,95)^{n-1}$  et  $n = 2015 - 2011 = 4$

D'où la population au 1<sup>er</sup> Janvier 2015 est :  $U_4 = 6000(0,95)^{4-1} = 6000(0,95)^3$

$$\Rightarrow U_4 = 5144,25 \approx 5144$$

Ainsi l'effectif de l'école serait de 5144 élèves au 1<sup>er</sup> Janvier 2015.

### Synthèse 3 :

**a-** Sachant que le prix du litre subit une augmentation de 5 FCFA au 1<sup>er</sup> Janvier de chaque année, calculons le prix du litre d'essence au premier Janvier 2013 ? Au premier Janvier 2014 ?

Soit  $P_0 = 690$  FCFA le prix initial de l'essence au 1<sup>er</sup> Janvier 2012.

**Au 1<sup>er</sup> Janvier 2013, on a :**  $P_1 = P_0 + 5 \Rightarrow P_1 = 690 + 5 = 695$  FCFA.

**Au 1<sup>er</sup> Janvier 2014, on a :**  $P_2 = P_1 + 5 \Rightarrow P_2 = 695 + 5 = 700$  FCFA.

**b-** Si  $P_n$  est le prix du litre d'essence au premier Janvier + n, calculons :  $P_n$  et  $P_{n+1} - P_n$  puis en déduisons la raison et la nature de la suite  $P_n$ .

On sait que :

$$P_0 = 690.$$

$$P_1 = P_0 + 5.$$

$$P_2 = P_1 + 5.$$

$$P_3 = P_2 + 5.$$

$$\begin{array}{l} \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{array}$$

$$P_n = P_{n-1} + 5n$$

$$\text{Alors } P_n = P_0 + 5n$$

Calculons  $P_{n+1} - P_n$

$$\text{On sait que } P_n = P_0 + 5n \Rightarrow P_{n+1} = P_0 + 5(n+1) = P_0 + 5n + 5.$$

$$\text{Alors } P_{n+1} - P_n = (P_0 + 5n + 5) - (P_0 + 5n) = P_0 + 5n + 5 - P_0 - 5n = 5$$

$$\Rightarrow P_{n+1} - P_n = 5.$$

**Déduction :**

$P_n$  est une suite arithmétique de raison  $r = 5$  et de premier terme  $P_0 = 690$ .

## EXERCICES

### Exercice 1 :

Soit  $U_n$  une suite géométrique décroissante  $U$  tel que  $U_0 \times U_3 = 32$

- 1) Calculer  $U_0$  et  $U_3$
- 2) Déterminer la raison de la suite  $U$ .
- 3) Donner l'expression de la suite  $U$  en fonction de  $n$ .
- 4) On pose  $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$ . Calculer  $S_n$  en fonction de  $n$  puis en déduire la somme des 20 premiers termes de la suite  $U_n$

### Exercice 2 :

Soit la suite  $U_n$  définie par :

$$U_1 = -2$$

et la suite  $V_n$  définie

$$\frac{U_n + 1}{U_n}$$

Par  $V_n = \frac{U_n + 1}{U_n}$

- 1) Calculer  $V_{n+1}$  en fonction de  $U_n$  puis en fonction de  $V_n$ .
  - 2) En déduire que  $V_n$  est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme  $V_1$ .
  - 3) Exprimer  $V_n$  puis  $U_n$  en fonction de  $n$ .
  - 4) On pose  $S_n = V_1 + V_2 + \dots + V_n$
- a) Exprimer  $S_n$  en fonction de  $n$
- b) Calculer la somme de 30 premiers termes de la suite  $V_n$

### Exercice 3 :

Soit la suite  $(U_n)_n \in \mathbb{N}^*$  à termes positifs tel que :

$$U_1 = 1$$

- 1) Calculer  $U_1 ; U_2 ; U_3 ; U_4$

v  
(on donnera les résultats sous forme de  $e$ )

- 2) On pose  $V_n = l_n U_n - a$  ; où ( $a \in \mathbb{R}_+^*$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ )
- a) Déterminer le réel  $a$  pour que  $V_n$  soit une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme  $V_1$ .
- b) Calculer la limite de  $V_n$  puis celle de  $U_n$  en  $+\infty$
- 3) Soit  $a = 1$ , on désigne par  $S_n$  la somme des  $n$  premiers termes de la suite  $U_n$ . Déterminer  $S_n$  et  $P_n$  en fonction de  $n$ .

#### **Exercice 4 :**

On donne deux suites  $(U_n)$  et  $(V_n)$  telles que,  $\forall n \in \mathbb{N}$

$$U_{n+1} = 3U_n + 2V_n \quad \text{et} \quad U_0 = 1$$

- 1) Calculer  $U_1$  ;  $V_1$  ;  $U_2$  ;  $V_2$  ;  $U_3$  et  $V_3$ .
- 2) On définit deux suites  $(X_n)$  et  $(Y_n)$  par :  $X_n = U_n + V_n$  et  $Y_n = U_n - V_n$
- a) Montrer que  $(X_n)$  est une suite géométrique et  $(Y_n)$  une suite constante.
- b) Exprimer  $U_n$  puis  $V_n$  en fonction de  $n$
- 3) Calculer la somme des  $n$  premiers termes de la suite  $X_n$ .

#### **Exercice 5 :**

Quatre (4) entiers strictement positifs  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , et  $d$  forment dans cet ordre une suite géométrique dont la raison est un entier premier avec  $a$ .

Trouver ces nombres sachant qu'ils vérifient en outre la relation  $10a^2 = d - b$ .

#### **Exercice 6 :**

Soit  $(U_n)$  une suite dans laquelle les dix premiers termes de la suite sont en progression arithmétique de raison  $r$  et à partir de  $U_{10}$  les termes sont en progression géométrique de raison  $q$ .

On donne :  $U_1 = 0$  ;  $U_{16} = \frac{-1}{27}$  et  $rq = 1$

- 1) Calculer  $q$  ;  $r$  ;  $U_{10}$  et  $U_{11}$
- 2) Calculer deux cas suivants : a)  $n \leq 10$   
b)  $n > 10$

#### **Exercice 7 :**

Soit la suite  $(U_n)$  définie par son premier terme  $U_0$  et par la relation de récurrence

$$U_{n+1} = \frac{4}{4 - U_n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

- 1) a) Déterminer  $U_0$  pour que  $U_n$  soit constante.  
b) Démontrer que si  $U_n < 2$  alors  $U_n < U_{n+1} < 2$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). En déduire que si  $U_0 < 2$  alors pour tout entier naturel on a :  $U_n < 2$  et que la suite est monotone.

2) On suppose maintenant que  $U_0 = -1$

a) Calculer  $U_1 ; U_2 ; U_3$ .

b) Soit la suite  $V_n$  définie par  $V_n = \frac{1}{U_n - 2}$ . Démontrer que  $V_n$  est une suite arithmétique dont on déterminera le premier terme et la raison.

c) Calculer  $U_n$  en fonction de  $n$  puis étudier sa limite en  $+\infty$ .

### **Exercice 8 :**

- 1) Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel  $m$ , les restes de la division euclidienne par 16 des entiers  $5^m$  et  $6^m$ .
- 2) Soit  $(U_n)$  la suite arithmétique de raison 16 et de premier terme  $U_0 = 9$  et  $V_p$  la suite géométrique de raison  $S$  et de premier terme  $V_0 = 1$ . Démontrer que ces deux suites ont une infinité de termes égaux dont on calculera les deux premiers.
- 3) Soit  $(U'_n)$  la suite arithmétique de raison 16 et de premier terme  $U'_0 = 8$  et  $(V'_p)$  la suite géométrique de raison 6 et de premier terme  $V'_0 = 9$ . Démontrer que ces deux suites n'ont qu'un seul terme en commun que l'on déterminera. /.

### **Exercice 9 :**

On considère la suite numérique  $(U_n)$  définie par  $\forall n \in \mathbb{N} ; U_n = e^{2n-1}$

1) a) Calculer  $U_0, U_1 ; U_2 ; U_3$  et  $U_{n+1}$

b) Démontrer que la suite  $U_n$  est une suite géométrique dont on précisera la raison.

c) Exprimer en fonction de  $n$  la somme

$$S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n.$$

d) Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

e) Trouver la valeur minimum de  $n$  telle que  $S_n \geq 10$

**NB :** On donne  $e \approx 2,7 ; e^3 \approx 19,7$

$e^2 \approx 7,3$  et  $\ln 171 \approx 5,14$

2) Soit la suite  $V_n$  définie par  $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = \ln(U_n)$ .

a) Exprimer la somme

$$S'_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$$

b) Exprimer le produit

$$P_n = U_0 \times U_1 \times \dots \times U_n$$

### **Exercice10 :**

Soit  $U_n$  la suite définie par :

$$U_0 = 4 \text{ ; ; ; ; }$$

- 1) Tracer la courbe représentation de la fonction  $x \mapsto \ln(1+x)$  puis en déduire une représentation graphique des 4 premiers termes de la suite  $U_n$ .
- 2) Démontrer que la suite  $(U_n)$  est convergente et démontrer qu'elle converge vers 0.

#### **Exercice11:**

Un commerçant place en banque une somme de 200 000 F CFA le 02/01/2008. La banque lui propose un intérêt de 5% par mois.

- a) Calculer l'intérêt perçu le 31/01/2008
- b) Quel montant aura-t-il le 31/12/2008.

#### **Exercice12**

Un capital A est placé à intérêts composés au taux de 3 % l'an. On appelle  $C_0$  le capital initial et  $C_n$  le capital après n années.

- 1) Expliquer la relation  $C_1 = 1.03C_0$  et écrire le capital  $C_n$  en fonction de  $C_0$  et de n en justifiant soigneusement cette relation.
- 2) Au bout de combien d'années le capital est-il doublé ?
- 3) Au bout de combien d'années le capital est-il triplé ?

#### **Exercice13** (non corrigé)

On considère deux suites  $(U_n)$  et  $(V_n)$  définies pour tout entier naturel n par  $U_0 = 1$  ;  $U_{n+1} = 2U_n + 1$  et  $V_n = U_{n+1} - U_n$ .

- a) Montrer que  $V_n$  est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
- b) Exprimer, pour tout entier naturel n,  $V_n$  en fonction de n.
- c) Soit la somme  $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_{n-1}$
- d) Montrer que pour tout entier naturel n,  $S_n = U_n - U_0$ .
- e) Calculer  $S_n$  en fonction de n, puis  $U_n$  en fonction de n.

#### **Exercice14**

1) Soient a et b deux réels tel que  $(a ; a + 4b ; 5a + 2b)$  et  $(b + 3 ; 3a + 1 ; 6a + b)$  soit des termes consécutifs de suite respectivement arithmétique et géométrique. Trouver a et b.

2) Quatre entiers strictement positifs a ; b ; c et d, forment dans cet ordre une suite géométrique dont la raison q est un entier premier avec a. Trouver ces nombres sachant qu'ils vérifient en outre la relation  $10a^2 = d - b$ .

3) soient  $Z_1$  ;  $Z_2$  et  $Z_3$  trois nombres complexes dont le produit est  $3i\sqrt{3}$  , les arguments respectifs  $a_1$  ;  $a_2$  et  $a_3$  forment une suite arithmétique de raison  $\frac{\pi}{3}$  et les modules  $r_1$  ;  $r_2$  et  $r_3$  une suite géométrique de raison 2. Sachant que  $0 < a_1 < \frac{2\pi}{3}$  .  
 Déterminer :  $Z_1$  ;  $Z_2$  et  $Z_3$ .

# Statistique

## I- Vocabulaire de la statistique

### Evaluation diagnostique

#### Activité

Voici une liste de notes attribuées à 30 élèves d'une terminale :

- 13 personnes ont une note comprise entre 0 et 3.
- 9 personnes ont une note comprise entre 3 et 8.
- 4 personnes ont une note comprise entre 8 et 10.
- 3 personnes ont une note comprise entre 10 et 15.
- 2 personnes ont une note comprise entre 15 et 18.

Utilise le tableau ci-dessous pour classer ses notes dans des intervalles bien déterminés.

| Nombre d'élève | Intervalles de notes attribuées |
|----------------|---------------------------------|
|                |                                 |
|                |                                 |
|                |                                 |
|                |                                 |
|                |                                 |

#### Solution

| Nombre d'élève | Intervalles de notes attribuées |
|----------------|---------------------------------|
| 13             | 0 ; 3                           |
| 9              | 3 ; 8                           |
| 4              | 8 ; 10                          |
| 3              | 10 ; 15                         |
| 1              | 15 ; 18                         |

Le fait que tu aies classé ses notes donne la notion de statistique.

#### 1- Définition :

D<sub>1</sub> : La statistique est un ensemble de données chiffrées ou non.

D<sub>2</sub> : La statistique est la branche de la mathématique qui consiste à regrouper les données ; à les analyser et à tirer des conclusions.

Comme toutes les sciences, la statistique fait appel à un langage spécialisé.

## **2- Langage statistique :**

### **a- Notion de population et d'individu :**

L'ensemble sur lequel porte l'étude statistique est appelé la population, un élément de cet ensemble est l'individu.

**N.B** : En statistique, les mots (population – individu) peuvent désigner des êtres ou des objets animés ou inanimés.

### **b- Caractères et modalités :**

Dans l'étude de statistique d'une population, l'attention est portée généralement sur un événement commun à tous les membres de la population : c'est le caractère.

**Exemple** : Le caractère situation matrimoniale à 4 modalités : marié, divorcé, célibataire, veuf.

Il existe deux sortes de caractères : **Les caractères qualitatifs et les caractères quantitatifs.**

#### **- Caractères qualitatifs :**

Un caractère est dit qualitatif si ses différentes modalités ne sont pas mesurables.

**Exemple** : La situation matrimoniale ; le sexe, la profession, la nationalité....

#### **- Caractères quantitatifs :**

Un caractère est dit quantitatif si ses différentes modalités sont mesurables c'est à dire des nombres.

**Exemple** : l'âge, la taille, le poids.....

Un caractère quantitatif peut être discret (discontinue) ou (continue)

Un caractère quantitatif est dit discret si ses valeurs prises sont isolées.

**Exemple** : le nombre de frère de chaque élève, le nombre de femme.....

Un caractère quantitatif est dit continu si ses valeurs prises sont en nombre infini dans un intervalle.

Exemple : la température du corps, la taille, l'âge...;

### **c- Echantillon :**

L'étude d'un caractère sur une grande population est parfois sensible et coûteux.

Exemple : recensement de population, enquête etc... c'est pourquoi on étudie ce caractère sur un petit groupe de cette membre de cette population : c'est l'échantillon.

## II- Présentation des données statistiques :

Plusieurs méthodes sont utilisées par les organismes de la statistique pour la collecte des données statistiques. Les données ayant été recueillis et est nécessaire dans une première phase de les grouper, de les présenter sous forme de tableau et de représentation graphique.

### 1- Cas d'un caractère qualitatif :

#### a- Tableau statistique :

**Exemple** : l'étude du caractère situation matrimoniale sur 10 élèves d'une classe a donné le résultat suivant :

A : marié  
B : Divorcé  
C : Célibataire  
D : Célibataire  
E : Marié  
F : Veuf  
G : Divorcé  
H : Célibataire  
I : Célibataire  
J : Marié

| Modalité ( $x_i$ ) | Nombre d'élément ( $n_i$ ) |
|--------------------|----------------------------|
| Marié              | 3                          |
| Célibataire        | 4                          |
| Divorcé            | 2                          |
| Veuf               | 1                          |
| Total              | 10                         |

Le caractère situation matrimoniale à 4 modalités; on dresse un tableau à deux colonnes.

- 1<sup>ère</sup> Colonne contient la nomenclature des différentes modalités. On la note  $x_i$
- La 2<sup>ème</sup> Colonne contient le nombre d'élément de chaque modalité. On la note  $n_i$ .

$n_i$  est l'effectif relatif de la modalité  $x_i$ . C'est le nombre d'élément présentant la modalité  $x_i$ .

**Exemple** :  $n_1 = 3$ ,  $n_2 = 4$ ,  $n_3 = 2$ ,  $n_4 = 1$  (d'après le tableau).

Alors  $N = \sum n_i = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 10$

N est appelé somme des  $n_i$ .

A ce tableau, on peut ajouter une 3<sup>ème</sup> colonne ; celle des **fréquences notés  $f_i$**  tel que  $f_i =$

$$\frac{n_i}{N} = \frac{\text{effectif relatif}}{\text{effectif total}}$$

| Modalités   | Nombre d'éléments | Fréquences   |
|-------------|-------------------|--------------|
| ( $x_i$ )   | ( $n_i$ )         | ( $f_i$ )    |
| Marié       | 3                 | $3/10 = 0,3$ |
| Célibataire | 4                 | $4/10 = 0,4$ |
| Divorcé     | 2                 | $2/10 = 0,2$ |
| Veuf        | 1                 | $1/10 = 0,1$ |

|       |    |           |
|-------|----|-----------|
| Total | 10 | 10/10 = 1 |
|-------|----|-----------|

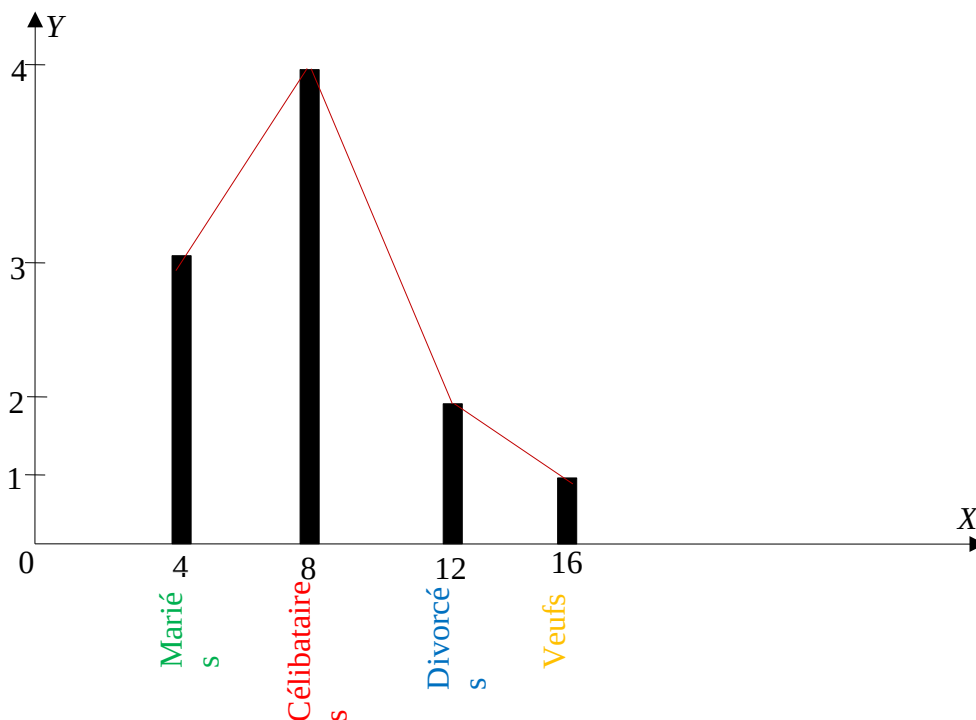
**NB** : la somme des fréquences est toujours égale à 1 :  $\sum f_i = 1$

### b- Représentation graphique :

#### Diagramme en bâton :

Dans un repère orthogonal, on place sur l'axe des abscisses les  $x_i$  (modalités) ; et sur l'axe des ordonnées les effectifs  $n_i$  ou les fréquences  $f_i$ .

Pour construire le diagramme en bâton des effectifs, on place les points  $A_i(x_i ; 0)$  et  $B_i(x_i ; n_i)$  et on construit en trait plein les segments  $[A_i B_i]$ .



#### **N.B :**

Si les fréquences  $f_i$  étaient en ordonnée, le diagramme est appelé diagramme en bâton des fréquences. Le polygone des effectifs est la ligne brisée reliant les extrémités des bâtons dans le diagramme (Voir figure ci-dessus).

D'une manière générale, la ligne polygonale obtenue en joignant les différents points  $B_i(x_i ; n_i)$

#### Diagramme en secteur circulaire :

Soit le demi – cercle (C) ; représentons la série précédente sur (C). Chaque modalité est représenté par un secteur angulaire proportionnel à son effectif  $\alpha_i$  tel que  $\alpha_i = f_i \times 180^\circ$ .

**Marié** :  $\alpha_1 = 0,3 \times 180^\circ \Rightarrow \alpha_1 = 54^\circ$

**Célibataire** :  $\alpha_2 = 0,4 \times 180^\circ \Rightarrow \alpha_2 = 72^\circ$

**Divorcé** :  $\alpha_3 = 0,2 \times 180^\circ \Rightarrow \alpha_3 = 36^\circ$

**Veuf** :  $\alpha_4 = 0,1 \times 180^\circ \Rightarrow \alpha_4 = 18^\circ$

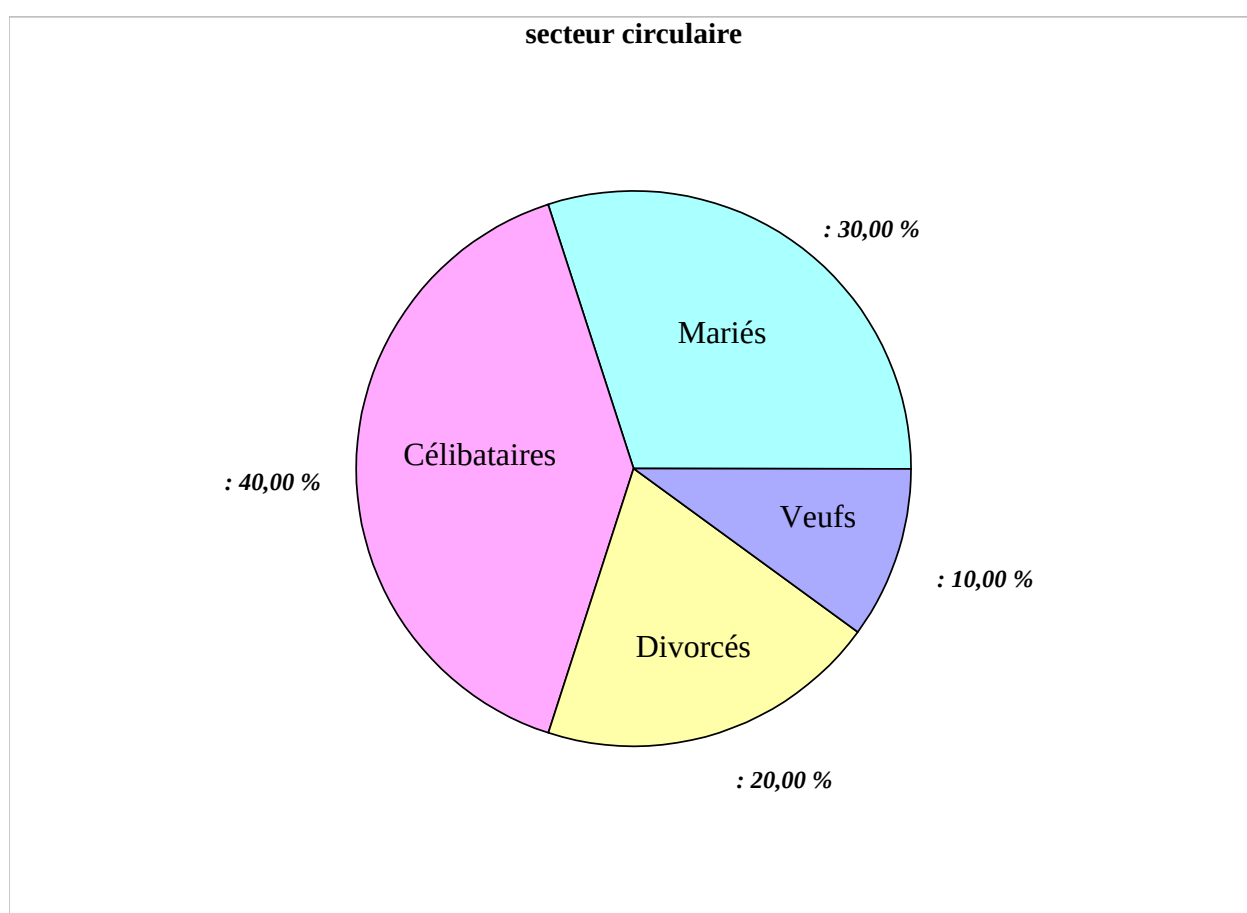
**NB** : pour le cercle tout entier le secteur angulaire  $\alpha_i$  est :  $\alpha_i = f_i \times 360$

$$\alpha_1 = 108^\circ$$

$$\alpha_2 = 144^\circ$$

$$\alpha_3 = 72^\circ$$

$$\alpha_4 = 36^\circ$$



## 2- Cas d'un caractère quantitatif discret :

### a- Etude du caractère nombre de frère dans un tableau statistique

L'étude du caractère nombre de frère dans une classe de 12<sup>e</sup> a donné les résultats suivants : 4 ; 2 ; 2 ; 1 ; 3 ; 2 ; 3 ; 3 ; 2 ; 1.

Regrouper ces données dans un tableau statistique.

| Modalités<br>$x_i$ | Effectif $n_i$ | Fréquence<br>$f_i$ | Effectif cumulé croissant | Effectif cumulé décroissant | Fréquence croissante | Fréquence Décroissante |
|--------------------|----------------|--------------------|---------------------------|-----------------------------|----------------------|------------------------|
| 1                  | 2              | 0,2                | 2                         | 10                          | 0,2                  | 1                      |
| 2                  | 4              | 0,4                | 6                         | 8                           | 0,6                  | 0,8                    |
| 3                  | 3              | 0,3                | 9                         | 4                           | 0,9                  | 0,4                    |
| 4                  | 1              | 0,1                | 10                        | 1                           | 1                    | 0,1                    |
| Total              | 10             | 1                  | /                         | /                           | /                    | /                      |

Le regroupement en tableau se fait de la même manière que les caractères qualitatifs. La seule différence est que les modalités sont des nombres s'écrivant dans l'ordre croissant. A ce tableau, on peut ajouter les colonnes, les effectifs cumulés croissants et décroissants ainsi que les fréquences cumulés croissantes et de décroissantes. Les valeurs du caractère étant rangées dans l'ordre croissant, on appelle :

#### - **Effectif cumulé croissant de $x_i$ :**

La somme des modalités inférieures ou égales à  $x_i$  c'est-à-dire :

$$n_i = (n_1 + n_2) + \dots + n_i$$

$$n_1 = n_1 = 2$$

$$n_2 = n_1 + n_2 = 2 + 4 = 6$$

$$n_3 = n_1 + n_2 + n_3 = 2 + 4 + 3 = 9$$

$$n_4 = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 2 + 4 + 3 + 1 = 10 \text{ et la fréquence croissante cumulé est } f_i = \frac{n_i}{N} = 10$$

#### - **Effectif cumulé décroissant de $x_i$ :**

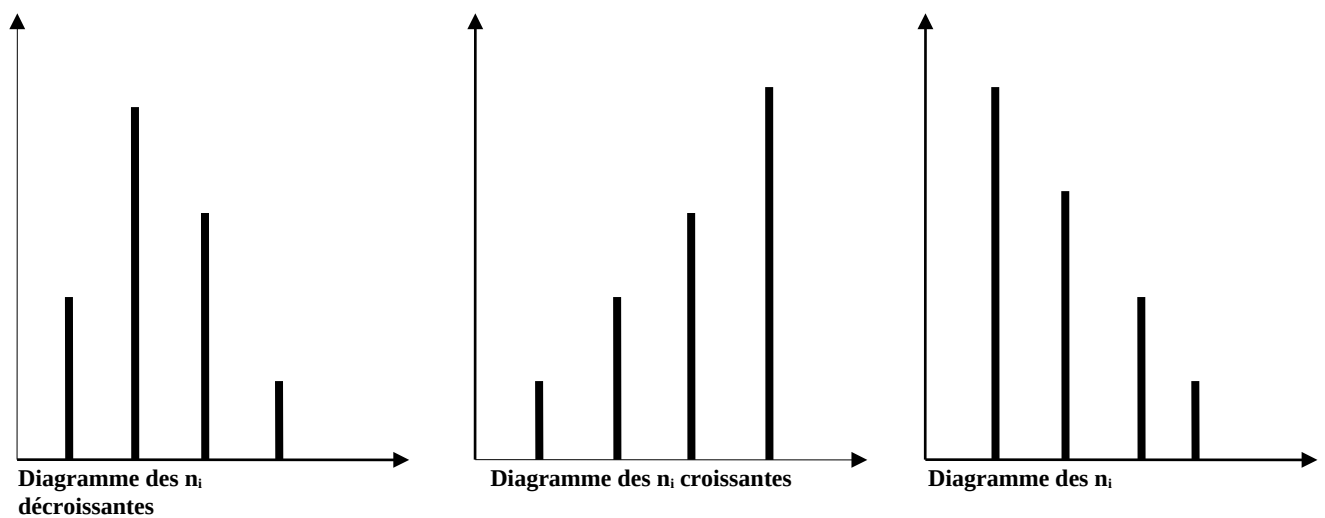
On appelle effectif cumulé décroissant de la modalité  $x_i$ , la somme des modalités qui le succède ; c'est-à-dire  $n_i = n_i + n_{i+1} + \dots + n_k$  et la fréquence cumulée décroissante

$$\text{est : } f_i = \frac{n_i}{N} \quad \searrow \quad \swarrow$$

### **b- Diagramme en bâton des effectifs cumulés :**

Dans un repère orthogonal, on place sur l'axe des abscisses les  $x_i$  (modalités) ; et sur l'axe des ordonnées les effectifs  $n_i$  cumulés croissants ou décroissants.

Pour construire le diagramme en bâton des effectifs cumulés croissants ou décroissants, on place les points  $A_i(x_i ; 0)$  et  $B_i(x_i ; n_i)$  et on construit en trait plein les segments  $[A_i B_i]$ .



### **3- Cas des caractères quantitatifs continus :**

#### **a- Tableau statistique :**

Dans le cas d'un caractère quantitatif continu, les valeurs du caractère sont regroupées dans un intervalle de même amplitude  $[x_i; x_{i+1}[$  soit appelées des classes.

Exemple : l'étude du caractère taille sur 30 élèves d'une classe de 12<sup>e</sup> a donné les résultats suivants en cm :

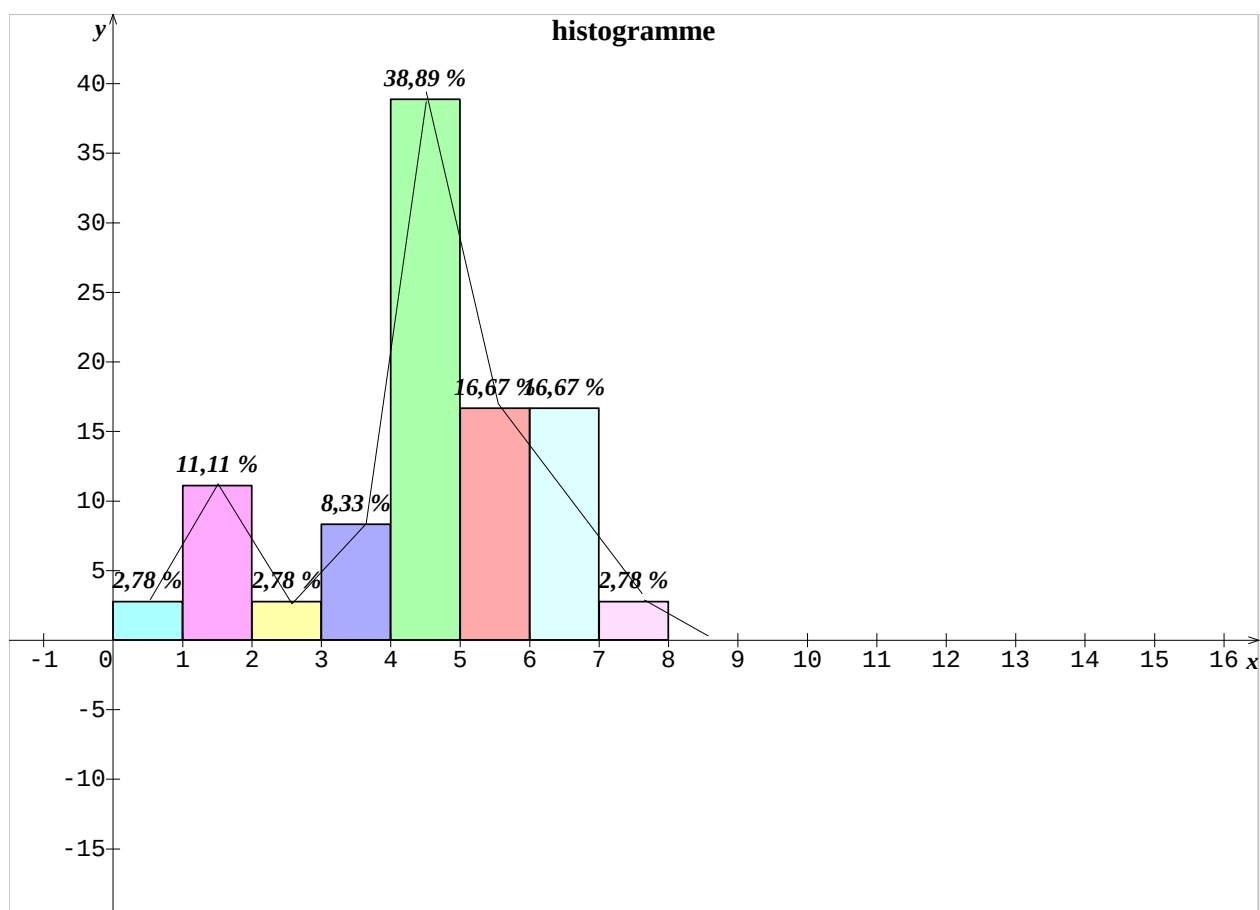
|     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| 175 | 165 | 172 | 171 | 168 |
| 170 | 178 | 170 | 171 | 173 |
| 170 | 170 | 168 | 150 | 160 |
| 165 | 175 | 179 | 180 | 170 |
| 173 | 165 | 168 | 176 | 150 |
| 174 | 158 | 153 | 144 | 172 |

Dresser le tableau des effectifs et des fréquences cumulées.  
Prenons des classes d'amplitude 6.

| Classes           | Effectif | Centre des classes | $n_i$ | $n_i$ croissante | $f_i$ |
|-------------------|----------|--------------------|-------|------------------|-------|
| $[x_i ; x_{i+1}]$ | $n_i$    | $c_i$              |       |                  |       |
| [144 ; 150]       | 1        | 147                | 1     | 30               | 0,633 |
| [150 ; 156]       | 4        | 153                | 5     | 29               | 0,166 |
| [156 ; 162]       | 1        | 159                | 6     | 25               | 0,2   |
| [162 ; 168]       | 3        | 165                | 9     | 24               | 0,3   |
| [168 ; 174]       | 14       | 171                | 23    | 21               | 0,76  |
| [174 ; 180]       | 6        | 177                | 29    | 7                | 0,966 |
| [180 ; 186]       | 1        | 183                | 30    | 1                | 1     |
| Total             | 30       | —                  | —     | —                | —     |

On appelle centre ( $c_i$ ) de la classe  $(x_i, x_{i+1})$  le nombre  $c_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$   
 Pour les calculs, nous prendrons la valeur  $c_i$  commune à tous les individus de la classe  $(x_i, x_{i+1})$

### Histogramme des effectifs (représentation graphique)



Dans un repère cartésien, les valeurs des bornes de classe sont portées en abscisse et les effectifs (ou fréquence) sont portés en ordonnées.

Pour chaque classe  $[x_i; x_{i+1}[$ , on trace le rectangle de base  $[x_i; x_{i+1}[$ , et de hauteur  $(n_i$  ou  $f_i)$ .

La représentation graphique obtenue est appelée : **Histogramme des effectifs ou des fréquences.**

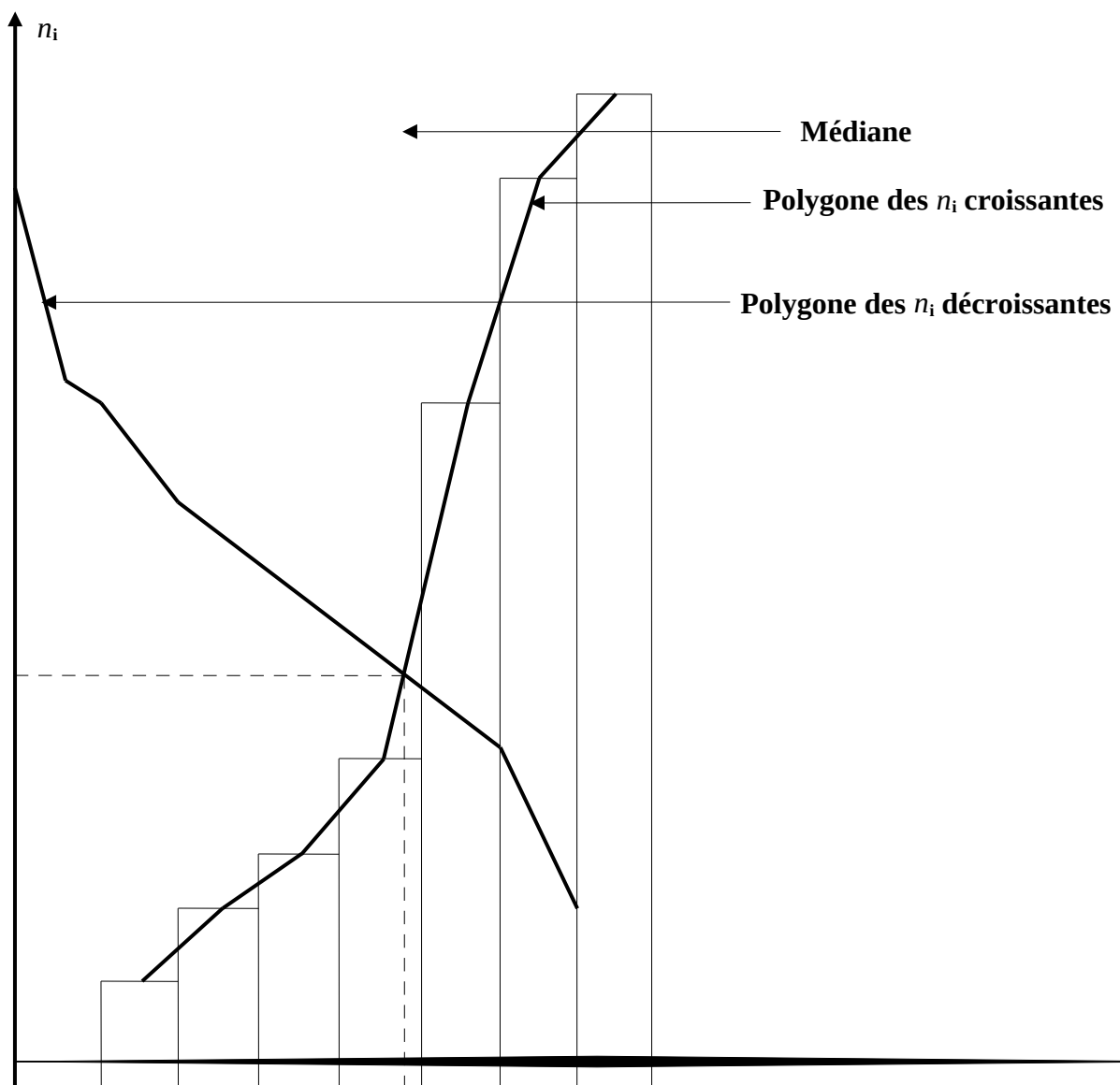
### Les polygones :

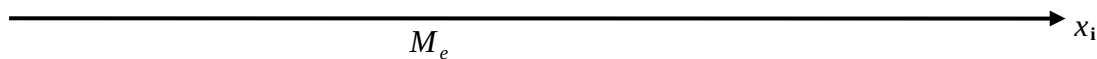
On appelle polygones les effectifs, la ligne brisée joignant les points  $(c_i ; n_i)$ .

On appelle polygone des effectifs cumulés croissants, la ligne brisée passant par les points d'abscisse et d'ordonnées  $(x_{i+1} ; n_i)$ .

On appelle polygone des effectifs cumulés décroissants, la ligne brisée joignant les points de coordonnées  $(x_i ; n_i \searrow)$

Les deux polygones des effectifs cumulés croissant et décroissant se coupent en un point d'abscisse  $M_e$  : ( $M_e$  est la médiane).





### III- Les éléments caractéristiques d'une série :

#### 1- Les caractéristiques de position :

##### a- Le mode ou dominantes :

Le mode d'une série statistique est la valeur du caractère qui a le plus grand effectif (ou fréquence). On le note  $M_o$ .

**Exemple :** Déterminer le mode de la série suivante :

10, 7, 8 ; 5, 2, 7 ; 4, 4, 5 ; 7, 10

Ici : le mode est 7 (car 7 est compté plus que les autres)

##### b- La médiane d'une série :

Définition : La médiane d'une série est la valeur du caractère qui divise la série en deux séries de même effectif. On la note  $M_e$ .

**Exemple 1 :** soit la série suivante :

11, 7, 8, 3, 5, 6, 2

Déterminer la médiane. Pour cela écrivons la série dans l'ordre croissant :

2, 3, 5, 6, 7, 8, 11

La médiane est donc  $M_e = 6$

**Exemple 2 :** soit la série suivante : 12, 3, 5, 7, 8, 6, 11, 4

Déterminer la médiane de cette série :

3, 4, 5, 6, 7, 8, 11, 12. Par convention.

Ici la médiane est  $M_e = \frac{6 + 7}{2} = 6,5$

La médiane d'une série statistique est la valeur du caractère qui correspond à l'effectif cumulé

$$n_i = \frac{N}{2}$$

**NB :**

N désignant les valeurs de la série statistique rangée dans l'ordre croissante, on a :

- Si N est impaire, la médiane correspond à la valeur de rang  $\frac{N+1}{2}$
- Si N est paire, la médiane correspond à la valeur de rang  $\frac{N}{2}$  et  $\frac{N}{2} + 1$
- Détermination de la médiane dans le cas d'un caractère continu.

### **Exemple :**

Déterminer la médiane dans la distribution des tailles de classe de 12<sup>ème</sup> dont les données sont dans le tableau en 3°).

La médiane  $M_e$  correspond à l'effectif cumulé  $\frac{N}{2} = 15$

$M_e \in [168 ; 174[$  est la classe médiane.

$x_i : 168 < M_e < 174$

$n_i : 9 < 15 < 23$

$$\frac{M_e - 168}{174 - 168} = \frac{15 - 9}{23 - 9} \Rightarrow M_e = 170,57$$

### **c- Moyenne arithmétique d'une série :**

**Définition :** La moyenne arithmétique d'une série est le quotient de la somme de ces valeurs par l'effectif total. Si  $x_1, x_2, \dots, x_k$  sont les valeurs et  $n_1, n_2, \dots, n_k$  sont les effectifs alors la moyenne est notée :

$$\bar{x} = \frac{\sum n_i x_i}{N} = \frac{1}{N} \sum_i^k n_i x_i$$

**NB :** Dans le cas d'un caractère continu, les  $x_i$  sont remplacés par les  $c_i$  (centre de classe  $[x_i, x_{i+1})$ )

**Exemple :** Soit le tableau statistique donné par :

| $x_i$ | $n_i$ | $n_i \times x_i$ |
|-------|-------|------------------|
| 7     | 1     | 7                |
| 8     | 3     | 24               |
| 9     | 5     | 45               |
| 10    | 4     | 40               |
| 11    | 2     | 22               |
| 12    | 2     | 24               |
| 13    | 4     | 52               |
| 14    | 1     | 14               |
| 15    | 2     | 30               |
| 16    | 0     | 0                |

|       |    |     |
|-------|----|-----|
| 17    | 1  | 17  |
| Total | 25 | 275 |
|       |    |     |

## 2- Les caractéristiques de dispersion :

### a- Amplitude ou étendue d'une série :

L'amplitude d'une série est la différence entre la plus grande valeur et la plus petite valeur du caractère.

**Exemple :** Déterminer l'amplitude des séries suivantes :

- a)  $-5; 4; 3; 1; 10; 12$  / Rep. :  $(12) - (-5) = 12 + 5 = 17$   
b)  $5; 10; 9; 20; 40; 30; 8$  / Rep :  $(40) - (5) = 40 - 5 = 35$

### b- Les quartiles

Les valeurs du caractère étant rangées dans l'ordre croissant ou décroissant, on appelle quartiles les 3 valeurs qui divisent la série en 4 groupes de même effectifs : on note :  $Q_1$  ;  $Q_2$  ;  $Q_3$  ces 3 valeurs

**Exemple :** Déterminer les quantiles de la série suivante :

9 ; 12 ; 5 ; 11 ; 7 ; 15 ; 1 ; 2 ; 18 ; 20 ; 16 ; 19 ; 30 ; 40 ; 34

Rep : 1, 2; 5 ; 7 ; 9 ; 11 ; 12 ; 15 ; 16 ; 18 ; 19 ; 20 ; 30 ; 34 ; 40

$Q_1$

$Q_2$

$Q_3$

Déterminer les quantiles de la série suivante : ci-dessus. On a donc  $Q_1 = 7$  ;  $Q_2 = 15$  ;  $Q_3 = 20$   
 $Q_2$  est la médiane, il est appelé quantile centrale  
 $Q_1$  et  $Q_3$  sont les quantiles extrémités

**NB :**  $Q_1$  est la valeur du caractère qui correspond à l'effectif cumulé  $n_i = \frac{N}{4}$   
 $Q_3$  est la valeur du caractère qui correspond à l'effectif cumulé  $n_i = \frac{3N}{4}$   
 $Q_3 - Q_1$  est l'écart interquartile

$\frac{Q_3 - Q_1}{Q_2}$  Est l'écart interquartile relatif.

**c- Variance ou fluctuation :**

La variance d'une série est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne c'est-à-dire :  
Si  $x_1, x_2, \dots, x_k$  sont les valeurs du caractère et  $n_1 ; n_2 ; \dots, n_k$  les effectifs.

La variance est notée :  $V = \frac{1}{N} \sum_i^k n_i x_i^2 - (\bar{x})^2$  ou encore on la note :  $V = \frac{1}{N} \sum_i^k (n_i x_i - \bar{x})^2$

**d- L'écart type :**

C'est la racine carrée de la variance, on la note  $\sigma$  tel que  $\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_i^k n_i x_i^2 - (\bar{x})^2}$

**EXERCICE 1 :**

Soit le tableau de la série statistique correspondant aux pointures des chaussures de 48 élèves.

| $x_i$ | $n_i$ |
|-------|-------|
| 36    | 5     |
| 37    | 11    |
| 38    | 12    |
| 39    | 8     |
| 40    | 4     |
| 41    | 3     |
| 42    | 4     |
| 43    | 1     |

- 1) Quelle est la population ?
- 2) le caractère étudié ?
- 3) Déterminer le mode
- 4) Déterminer la pointure moyenne

**Solution**

- 1- La population est un ensemble d'élèves.
- 2- Le caractère est : la pointure des chaussures.
- 3- Le mode est : 38

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k n_i x_i$$

4- La moyenne des pointures :

$$\bar{x} = \frac{1849}{48} \Rightarrow \bar{x} = 38,52$$

| $x_i$ | $n_i$ | $n_i x_i$ | $x_i^2$ | $n_i x_i^2$ |
|-------|-------|-----------|---------|-------------|
| 36    | 5     | 180       | 1296    | 6480        |
| 37    | 11    | 407       | 1369    | 15059       |
| 38    | 12    | 456       | 1444    | 17328       |
| 39    | 8     | 312       | 1521    | 12168       |
| 40    | 4     | 160       | 1600    | 6400        |
| 41    | 3     | 123       | 1681    | 5043        |
| 42    | 4     | 168       | 1761    | 7056        |
| 43    | 1     | 43        | 1849    | 1849        |
| Total |       | 1849      |         | 71383       |

## **EXERCICE 2 :**

A l'occasion d'un concours de pêche, les 250 poissons pêchés ont été mesurés et leurs tailles ont été regroupées dans le tableau suivant :

| Classe des tailles (cm) | Effectifs | $n_i$ | $c_i$ | $n_i \quad c_i$ |
|-------------------------|-----------|-------|-------|-----------------|
| [10, 20[                | 16        | 16    | 15    | 240             |
| [20, 30[                | 26        | 42    | 25    | 1050            |
| [30, 40[                | 36        | 78    | 35    | 2730            |
| [40, 50[                | 52        | 130   | 45    | 5850            |
| [50, 60[                | 38        | 168   | 55    | 9240            |
| [60, 70[                | 30        | 198   | 65    | 12870           |
| [70, 80[                | 20        | 218   | 75    | 16350           |
| [80, 90[                | 12        | 230   | 85    | 19530           |
| [90, 100[               | 10        | 240   | 95    | 22800           |
| [100, 110[              | 6         | 246   | 105   | 25830           |
| [110, 120[              | 4         | 250   | 115   | 28750           |

**N.B** : Les parties complétées sont :

$n_i$  :  $n_1 = 16$ ;  $n_2 = 16 + 26 = 42$ ,  $n_3 = 16 + 26 + 36 = 78$ .....

$$c_i : c_i = \frac{10+20}{2} = 15 ; c_2 = \frac{20+30}{2} = 25 ; c_3 = \frac{30+40}{2} = 35$$

$$n_i \quad c_i : n_1 \cdot c_1 = 16 \times 15 = 240 ; n_2 \quad c_2 = 42 \times 25 = 650 ; n_3 c_3 = 78 \times 35 = 1260$$

### Évaluation

- a- compléter le tableau :
- b- déterminer la population, le caractère et la nature du caractère
- c- déterminer les quartiles
- d- déterminer la moyenne et l'écart type.

### Solution

a- Complétons le tableau (voir tableau)

b- La population : les poissons

- le caractère : la taille
- nature du caractère : caractère quantitatif continu

c- Déterminons les quartiles :

$$Q_1 n_i = \frac{N}{4} = \frac{250}{4} = 62,5 \quad \text{alors} \quad Q_1 \in [30, 40[ \quad \Leftrightarrow \quad 42 < 62,5 < 78$$

$$\frac{Q_1 - 30}{40 - 30} = \frac{62,5 - 42}{78 - 42} \Leftrightarrow \frac{Q_1 - 30}{10} = 0,56 \Rightarrow Q_1 = 35,6 \quad \text{or le } n_i =$$

$$\frac{N}{2} = \frac{250}{2} = 125 \Leftrightarrow 40 < Q_2 < 50$$

$$n_i = \frac{3N}{4} = \frac{3 \times 250}{4} = 187,5$$

$$Q_3 \in [60 - 70[$$

d- Déterminons la moyenne et l'écart type

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k n_i x_i \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = \frac{1}{250} \times 13090 = 52,36$$

**L'écart type :**

$$\begin{aligned} - \text{Variance } V &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k n_i x_i^2 - (\bar{x})^2 = \frac{1}{250} \times (1063064) - (52,36)^2 \\ - \text{Ecart type : } \sigma &= \sqrt{V} = \sqrt{1510,6864} = 38,86 \end{aligned}$$

$$\sigma = 38,86$$

## **IV- Série statistique à deux caractères x et y**

### **1- Nuage de points associé :**

Le plan étant muni d'un repère orthogonal, on appelle nuage de points associé, l'ensemble des points  $M_{ij}$  de coordonnées  $(x_i, y_i)$ .

### **2- Point moyen d'un nuage de points :**

On appelle point moyen d'un nuage de points représentant une série, le point G de coordonnées  $(X_G ; Y_G)$  où

$$\begin{cases} X_G = \bar{X} = \frac{\sum x_i}{N} \\ \text{et} \\ Y_G = \bar{Y} = \frac{\sum y_i}{N} \end{cases}$$

### **3- Covariance :**

La covariance d'une série statistique à deux caractères  $x$  et  $y$ , de moyennes respectives  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$  et d'effectif total  $N$  est le nombre réel noté  $\text{Cov}(X, Y)$  ou  $\sigma_{x,y}$  tel que :

$$\text{Cov}(x,y) = \frac{\sum n_{ij}(x_i - \bar{X})(y_i - \bar{Y})}{\text{Effectif total}}$$

ou

$$\text{Cov}(x,y) = \frac{\sum n_{ij} x_i y_i}{\text{Effectif total}} - \bar{X} \cdot \bar{Y}$$

#### 4- Droit de régression de y en x :

La droite (D) de régression de y en fonction de x passe par le point G ( $\bar{X}$ ,  $\bar{Y}$ ), point moyen du nuage de point son équation est  $y = ax + b$  avec :

$$a = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{V(X)} \text{ et } b = \bar{Y} - a\bar{X}$$

où V(X) est la variance et a pour formule :  $V(X) = \frac{\sum X_i^2}{N} - \bar{X}^2$

#### 5- Droite de régression de X en Y :

La droite (D') de régression de X en fonction de Y passe par le point G( $\bar{X}$  ;  $\bar{Y}$ ), point moyen du nuage de point. Son équation est  $x = a'y + b'$  avec :

$$a' = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{V(Y)} \text{ et } b' = \bar{X} - a'\bar{Y}$$

où V(Y) est la variance et a pour formule :  $V(Y) = \frac{\sum Y_i^2}{N} - \bar{Y}^2$

#### Remarque :

G( $\bar{X}$  ;  $\bar{Y}$ ) appartient aux deux droites de régression pour tracer ces droites, il suffit donc de déterminer un autre point vérifiant l'équation.

#### 6- Corrélation linéaire

Deux variables statistiques X et Y sont dites en corrélation linéaire lorsque la courbe de régression de Y en X et la courbe de régression de X en y sont des droites.

#### 7- Coefficient de corrélation linéaire :

##### a) Définition :

On appelle coefficient de corrélation linéaire d'une série statistique double de caractère (X ;

Y), le nombre réel **r** définie par  $\mathbf{r} = \frac{\text{Cov}(X ; Y)}{\sqrt{V(X) \cdot V(Y)}}$

##### b) Propriétés de r :

P<sub>1</sub> : Si  $0,87 \leq |r| \leq 1$ , on considère que la corrélation linéaire entre les deux variables est forte.

P<sub>2</sub> : si  $r = 1$ , on dit que la corrélation est parfaite.

#### 8- Estimation et prévision

Lorsqu'il existe une bonne corrélation linéaire, il est possible de prévoir la valeur de y connaissant celle de x, en utilisant l'équation de la droite de régression de y en x ; et vice – versa.

### **Exercices d'application :**

#### **Exercice 1 :**

Un pharmacien observe, durant les 6 premiers mois de l'ouverture de son officine, le chiffre d'affaire en millions de francs CFA. Le résultat de l'observation est résumé dans le tableau suivant où x désigne le numéro du mois et y le chiffre d'affaires – correspondant.

|   |    |    |    |    |    |    |
|---|----|----|----|----|----|----|
| X | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  |
| Y | 12 | 13 | 15 | 19 | 21 | 22 |

- 1- Calculer  $\bar{X}$  et  $\bar{Y}$  les moyennes des variables X et Y.
- 2- Représenter graphiquement le nuage de points de cette série statistique double ainsi que le point G. on prendra : (Unités : 2 cm en abscisses et 1 cm pour 2 unités en ordonnées).
- 3- Calculer la variance  $V(X)$  de x et la covariance  $Cov(X,Y)$  de x et y.

**N.B :** Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

- 4- Démontrer qu'une équation de la droite de régression (D) de y en x est :  $y = \frac{78}{35}x + 9,2$
- 5- Tracer la droite (D).
- 6- En utilisant la droite (D), calculer une estimation du chiffre d'affaires de cette pharmacie à la fin du 7<sup>ème</sup> mois.

#### **Exercice 2 :**

En prévision du lancement d'un nouveau produit, une société a effectué une enquête auprès de clients éventuels pour fixer le prix de vente (en milliers de francs) de ce produit. Les résultats sont donnés dans le tableau ci – dessous.

|                                           |     |     |     |     |     |    |    |    |
|-------------------------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|----|----|----|
| Prix de vente en milliers de francs $x_i$ | 9   | 10  | 11  | 12  | 14  | 15 | 16 | 17 |
| Nombre d'acheteurs potentiels $y_i$       | 180 | 160 | 150 | 130 | 100 | 90 | 80 | 70 |

- 1- Représenter graphiquement le nuage de points de cette série statistique. On prendra pour unité :  
1 cm pour 1000 francs en abscisse  
1 cm pour 10 acheteurs en ordonnée.
- 2- Déterminer les coordonnées du point G
- 3- Déterminer le coefficient de corrélation linéaire r puis interpréter le résultat obtenu.
- 4- Déterminer une équation de la droite (D) de régression de y en x. Tracer (D)

- 5- Estimer graphiquement le prix maximum à fixer pour qu'il y ait au moins 50 acheteurs potentiels.
- 6- En utilisant l'équation de la droite (D) de régression de y en x, puis déterminer :
  - a) Le nombre d'acheteurs à prévoir si le prix est fixé à 13 000 F
  - b) Le prix à fixer pour que le nombre d'acheteurs potentiels soit supérieur à 250.

### Solution

#### Exercice 1

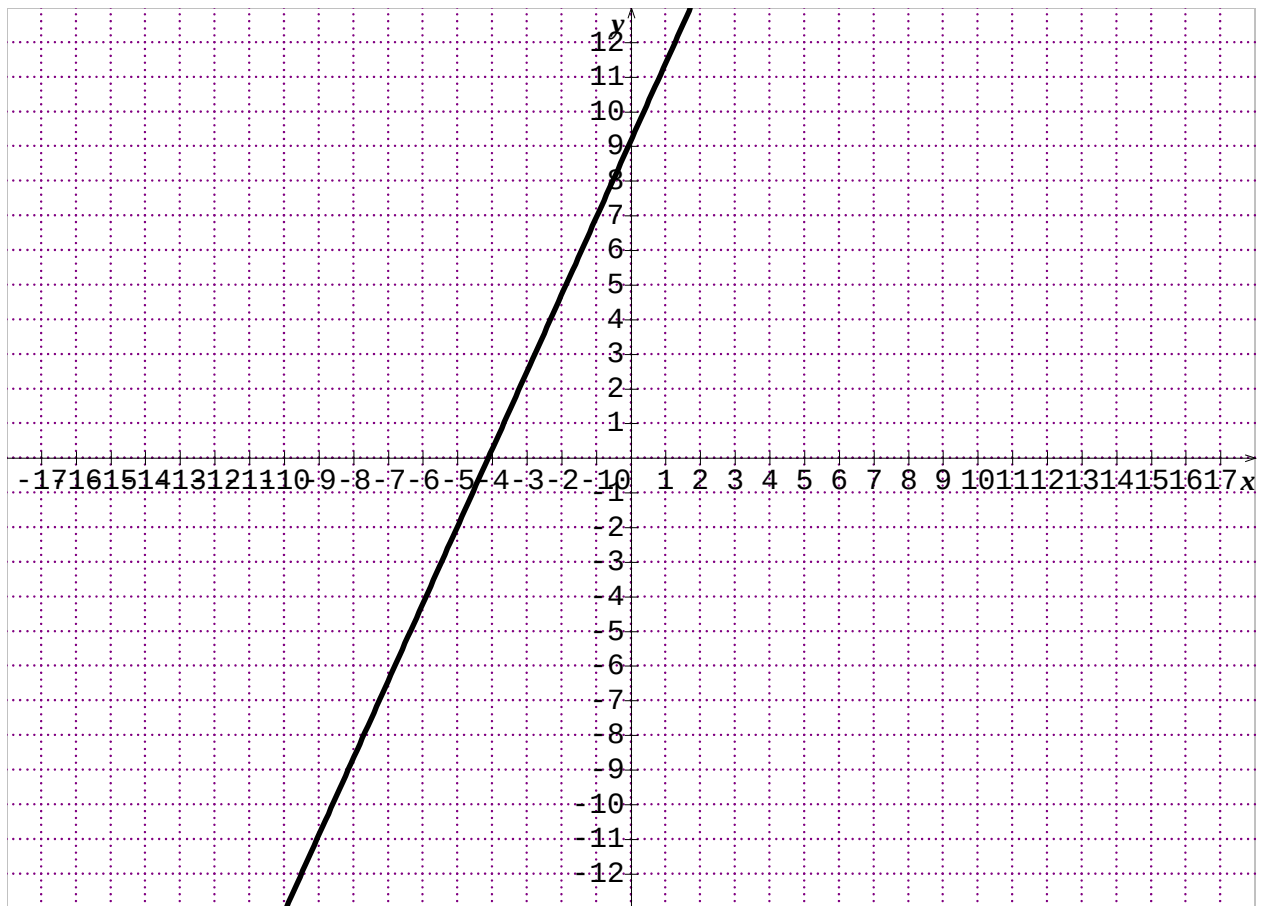
Pour le calcul, on pourra s'aider du tableau ci-dessous :

| $X_i$ | $Y_i$ | $X_i, y_i$ | $X_i^2$ | $Y_i^2$ |       |
|-------|-------|------------|---------|---------|-------|
| 1     | 12    | 12         | 1       | 144     |       |
| 2     | 13    | 26         | 4       | 676     |       |
| 3     | 15    | 45         | 9       | 225     |       |
| 4     | 19    | 76         | 16      | 361     |       |
| 5     | 21    | 105        | 25      | 441     |       |
| 6     | 22    | 132        | 36      | 484     |       |
| 21    | 102   | 396        | 91      | 2 331   | Total |

- 1- Calcul de  $\bar{X}$  et  $\bar{Y}$  les moyennes des variables x et y.

$$\bar{X} = \frac{\sum_1^6 x_i}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3,5 \quad ; \quad \bar{Y} = \frac{\sum_1^6 y_i}{6} = \frac{102}{6} = 17$$

- 2- Le nuage de points de la série statistique ainsi que le point moyen G.



1- Calcul de la variance  $V(x)$  de  $x$  et la covariance  $\text{Cov}(x, y)$  de  $x$  et  $y$ .

$$V(X) = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{70}{24} = \frac{35}{12} ; \text{cov}(X ; Y) = \frac{396}{6} - \left(\frac{7}{2} \times 17\right) = \frac{39}{6} = \frac{13}{2}$$

2- Montrons qu'une équation de la droite de régression (D) de  $y$  en  $x$  est :  $y = \frac{78}{35}x + 9,2$

$$a = \frac{\text{cov}(X, Y)}{V(X)} = \frac{\frac{13}{2}}{\frac{35}{12}} = \frac{13}{2} \times \frac{12}{35} = \frac{156}{70} = \frac{78}{35} \text{ et } b = \bar{Y} - a\bar{X} = 17 - \frac{78}{35} \times \frac{7}{2} = 9,2$$

donc l'équation de la droite de régression est :  $y = \frac{78}{35}x + 9,2$

3- Tracé de la droite (D). (Voir nuage de points)

La droite (D) passe par le point moyen point G (3,5 ; 17) et par un autre point que l'on détermine en remplaçant dans l'équation de la droite de régression,  $x$  par une valeur que l'on choisira.

Par exemple, si  $x = 0$ , on obtient  $y = 9,2$ . (D) passe donc également par le point A(0 ; 9,2).

4- Calcul d'une estimation du chiffre d'affaires de cette pharmacie à la fin du 7<sup>ème</sup> mois.

Le 7<sup>ème</sup> mois correspond à  $x = 7$ . Il s'agit de déterminer la valeur de  $y$  associée à cette valeur de  $x$ .

Pour  $x = 7$ , on a :  $y = \frac{78}{35} \times 7 + 9,2 = 24,8$  millions de francs CFA.

3°) Déterminer le coefficient de corrélation linéaire  $r$ . interpréter le résultat obtenu.

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= \frac{\sum X_i \cdot Y_i}{n} - \bar{X} \cdot \bar{Y} \\ &= \frac{9 \times 180 + 10 \times 160 + 11 \times 150 + 12 \times 130 + 14 \times 100 + 15 \times 90 + 16 \times 80 + 17 \times 70}{8} - \end{aligned}$$

13x120

$$\text{Cov}(X, Y) = -103,75$$

$$r = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X) \cdot V(Y)}}$$

$$V(X) = \frac{\sum X_i^2}{N} - \bar{X}^2 = \frac{9^2 + 10^2 + 11^2 + 12^2 + 14^2 + 15^2 + 16^2 + 17^2}{8} - 13^2$$

$$V(X) = 7,499$$

$$V(Y) = \frac{\sum Y_i^2}{N} - \bar{Y}^2 = \frac{180^2 + 160^2 + 150^2 + 130^2 + 100^2 + 90^2 + 80^2 + 70^2}{8} - 120^2$$

$$V(Y) = 1450,003$$

$$r = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X) \cdot V(Y)}} = \frac{-103,75}{\sqrt{7,499 \times 1450,003}} = -0,995$$

$0,87 \leq |r| \leq 1$  : il existe alors une forte corrélation linéaire entre les variables  $X$  et  $Y$ .  
L'on peut donc faire un ajustement linéaire entre  $X$  et  $Y$ .

4°) Equation de la droite (D) de régression de  $y$  en  $x$ .

$$(D) : y = ax + b$$

$$a = \frac{\text{cov}(X, Y)}{V(X)} = \frac{-103,75}{7,499} = -13,88$$

$$\bar{Y} = a\bar{X} + b \Rightarrow b = \bar{Y} - a\bar{X} = 120 - (-13,88) \times 13 = 199,83$$

$$(D) : y = -13,88x + 299,83$$

Tracé de (D) : (D) passe par le point moyen G(13,120), déterminons un second point en remplaçant par exemple x par 10. On trouve  $y = 161,03$ . On obtient : A (10 ; 161,03)

5°) Pour qu'il y ait au moins 50 acheteurs potentiels, on lit graphiquement que le prix à fixer ne doit pas dépasser 18 000 francs.

6°) a°) Le nombre d'acheteurs à prévoir, si le prix est fixé à 13 000 F, correspond à  $x = 13$

$$y = -13,88 \times 13 + 299,83 = 119,39 \simeq 119$$

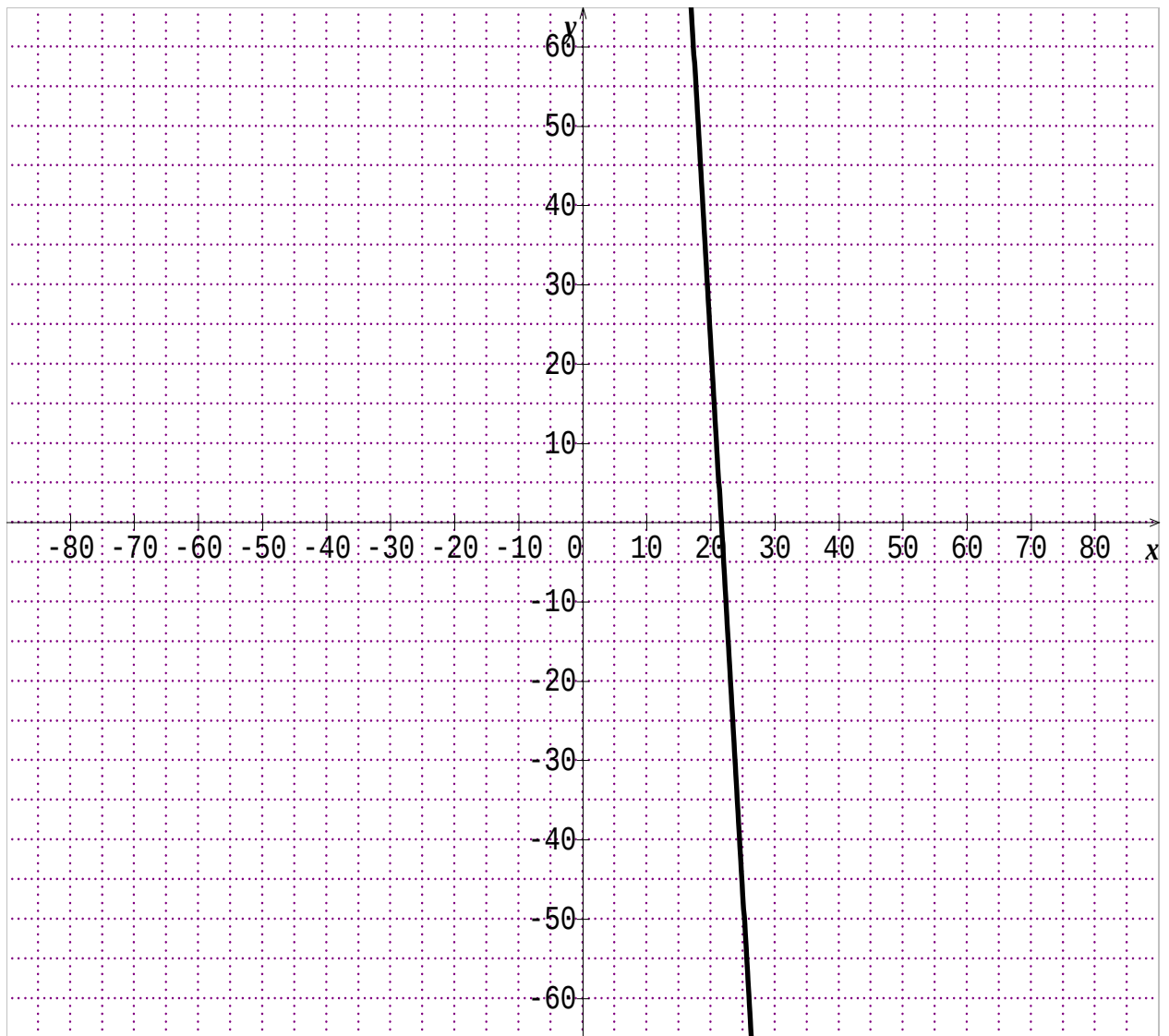
b°) Il s'agit de déterminer x pour  $y = 250$ .

$$y = -13,88x + 299,83 \Rightarrow x = \frac{y - 299,83}{-13,88}$$

$$\text{Pour } y = 250, \text{ on a : } x = \frac{250 - 299,83}{-13,88} = 3,59 \text{ milliers de francs} = 3590 \text{ F}$$

### Exercice 2 :

- 1- Représentation graphique du nuage de points de cette série statistique (unité : 1 cm pour 1000 francs en abscisse, 1 cm pour 10 acheteurs en ordonnée).



2- Déterminons les coordonnées du point G.

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^8 x_i}{8} = \frac{9+10+11+12+14+15+16+17}{8} = 13$$

$$\Rightarrow G(13 ; 120)$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^8 y_i}{8} = \frac{180+160+150+130+100+90+80+70}{8} = 120$$

3-Détermination du coefficient de corrélation linéaire r .

$$\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov} = \frac{\sum X_i \cdot Y_i}{N} - \bar{X} \cdot \bar{Y}$$

$$\Rightarrow \text{Cov}(X, Y) = \frac{9.180 + 10.160 + 11.150 + 12.130 + 14.100 + 15.90 + 16.80 + 17.70}{8} - 13.120$$

$$\text{Cov}(X, Y) = -103,75$$

$$r = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X) \cdot V(Y)}}$$

$$V(X) = \frac{\sum X_i^2}{N} - \bar{X}^2 = \frac{9^2 + 10^2 + 11^2 + 12^2 + 14^2 + 15^2 + 16^2 + 17^2}{8} - 13^2$$

$$V(X) = 7,499$$

$$V(Y) = \frac{\sum Y_i^2}{N} - \bar{Y}^2 = \frac{180^2 + 160^2 + 150^2 + 130^2 + 100^2 + 90^2 + 80^2 + 70^2}{8} - 120^2$$

$$V(Y) = 1450,003$$

$$r = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X) \cdot V(Y)}} = \frac{-103,75}{\sqrt{7,499 \cdot 1450,003}} = -0,995$$

$0,87 \leq |r| \leq 1$  : il existe alors une forte corrélation linéaire entre les variations X et Y. linéaire

L'on peut donc faire un ajustement linéaire entre X et Y.

4- Equation de la droite (D) de régression de Y en X

$$(D) : y = ax + b$$

$$A = \frac{\text{cov}(X, Y)}{V(X)} = \frac{-103,75}{7,499} = -13,88$$

$$\text{Alors on a } \bar{y} = a\bar{x} + b \Rightarrow b = \bar{y} - a\bar{x} = 120 - 13,88 \times 13 = 299,83$$

$$(D) : y = -13,88x + 299,83$$

Tracé de (D) : (D) passe par le point moyen G (13 ; 120). Déterminons un second en remplaçant par exemple x par 10. On trouve y = 161,03. On obtient : A (10 ; 161,03)

5- Pour qu'il ait au moins 50 acheteurs potentiels, on lit graphiquement que le prix à fixer ne doit pas dépasser 18000 francs.

6- a) le nombre d'acheteurs à prévoir, si le prix est fixé à 13000 F, correspond à x = 13.

$$Y = -13,88 \times 13 + 299,83 = 119,39$$

b) il s'agit de déterminer x pour y = 250

$$Y = -13,88x + 299,83 \text{ alors } x = \frac{y - 299,83}{-13,88}$$

Pour y =

## EXERCICES

### EXERCICE 1 :

Soit tableau de la série statistique correspondant aux pointures des chemises de 48 militaires.

|       |    |    |    |    |    |    |    |    |
|-------|----|----|----|----|----|----|----|----|
| $x_i$ | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 |
| $n_i$ | 5  | 11 | 12 | 8  | 4  | 3  | 4  | 1  |

- 1) Déterminer la population et le caractère étudié.
- 2) Déterminer le mode des chemises
- 3) Calculer la pointure moyenne des chemises
- 4) Calculer la variance et l'écart – type de cette série.

### EXERCICE 2 :

L'étude statistique faite sur la taille des voitures de la société Renault a donné les résultats suivants :

|                              |             |             |             |             |             |             |             |
|------------------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| Classes<br>$[x_i ; x_{i+1}[$ | [144 ; 150[ | [150 ; 156[ | [156 ; 162[ | [162 ; 168[ | [168 ; 174[ | [174 ; 180[ | [180 ; 186[ |
| Effectifs $n_i$              | 1           | 4           | 1           | 3           | 14          | 6           | 1           |

- 1) Dresser el tableau des centres ci .
- 2) Dresser le tableau des effectifs et des fréquences cumulées (croissants et décroissants).
- 3) En déduire l'histogramme des effectifs ( $n_i$ ) puis celle effectifs ( $n_i$  et  $n_i$ ).

### EXERCICE 3 :

Soit la série suivante : 3 ; 8 ; 7 ; 11 ; 5 ; 13 ; 15 ; 10 ; 2 ; 17 ; 1 ; 20 ; 12.

- 1) Déterminer la médiane et les quartiles.
- 2) Faites la représentation en boîte de cette série.

### EXERCICE 4 :

Une agence de voyage propose 21 voyages organisés dont voici les tarifs en euros :

152 ; 320 ; 250 ; 320 ; 137 ; 183 ; 137 ; 152 ; 244 ; 122 ; 190 ; 139 ; 202 ; 285 ; 137 ; 180 ; 143 ; 190 ; 137 ; 180 ; 190.

- 1) Calculer la moyenne et l'écart type de la série des prix. Quel est le premier et le troisième quartile, la médiane ?

- 2) Ne rentrant pas dans ses frais, l'agence hésite entre deux solutions : augmenter tous les tarifs de 190 euros ou doubler tous les tarifs. Donner pour chacune des solutions la moyenne et l'écart – type de la nouvelle série des prix. Que deviennent les quartiles et la médiane ?
- 3) Une des deux solutions est – elle plus avantageuse financièrement pour l'agence ? Tracer les deux diagrammes en boîte correspondants.

### **EXERCICE 5 :**

Lors d'un concours d'entrée à l'école statistique, la moyenne générale des 600 candidats a été de 11,4 sur 20. Il y a 300 places au concours. Hélène a eu une moyenne de 12. Pourtant elle a échoué. Expliquer ce résultat.

### **EXERCICE 6 :**

Une série statistique a pour effectif 40. Sa moyenne est égale à 15,75 et son écart – type à 11,438. On ajoute à cette série une 41<sup>ème</sup> valeur égale à 18. Calculer la moyenne et l'écart – type de la nouvelle série.

### **EXERCICE 7 :**

On a relevé le montant en euros de 100 chèques déposés dans un commerce dans une journée. Voici le tableau obtenu : les chèques ont été regroupés en fonction de leur montant par classes dont l'amplitude est 15 euros.

| Montant des chèques | effectif | Fréquence | Fréquence cumulée croissante |
|---------------------|----------|-----------|------------------------------|
| [0,15[              | 20       |           |                              |
| [15,30[             | 9        |           |                              |
| [30,45[             | 19       |           |                              |
| [45,60[             | 27       |           |                              |
| [60,75[             | 18       |           |                              |
| [75,90[             | 6        |           |                              |
| [90,105[            | 1        |           |                              |
| Total               |          |           |                              |

- 1) compléter le tableau
- 2) soit  $s$  le montant de l'ensemble des 100 chèques. Donner un encadrement de  $S$ . En déduire un intervalle  $I$  tel que le montant moyen des chèques appartienne à  $I$ .
- 3) pour estimer la moyenne d'une série statistique où les valeurs ont été regroupées en classes de même amplitude, on procède souvent de la manière suivante : on remplace chaque classe par son centre et on calcule la moyenne de la série des centres (avec les mêmes effectifs).

Faire le calcul pour la série ci-dessus. Vérifier que la moyenne obtenue est le centre de l'intervalle  $I$  trouvé à la question précédente.

- 4) Quelle est la classe pour laquelle la fréquence cumulée croissante passe la « barre » des 50 % ? Justifier pourquoi on appelle cette classe la classe médiane.

**Exercice 8 :** ( non corrigé)

En prévision du lancement d'un nouveau produit, une société a effectué une enquête auprès de clients éventuels pour fixer le prix de vente (en milliers de francs) de ce produit. Les résultats sont donnés dans le tableau ci – dessous.

|                                           |     |     |     |     |     |    |    |    |
|-------------------------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|----|----|----|
| Prix de vente en milliers de francs $x_i$ | 9   | 10  | 11  | 12  | 14  | 15 | 16 | 17 |
| Nombre d'acheteurs potentiels $y_i$       | 180 | 160 | 150 | 130 | 100 | 90 | 80 | 70 |

1- Représenter graphiquement le nuage de points de cette série statistique. On prendra pour unité :

1 cm pour 1000 francs en abscisse

1cm pour 10 acheteurs en ordonnée.

2- Déterminer les coordonnées du point G

3- Déterminer le coefficient de corrélation linéaire  $r$  puis interpréter le résultat obtenu.

4- Déterminer une équation de la droite (D) de régression de  $y$  en  $x$ . Tracer (D)

5- Estimer graphiquement le prix maximum à fixer pour qu'il y ait au moins 50 acheteurs potentiels.

6- En utilisant l'équation de la droite (D) de régression de  $y$  en  $x$ , puis déterminer :

a) Le nombre d'acheteurs à prévoir si le prix est fixé à 13 000 F

b) Le prix à fixer pour que le nombre d'acheteurs potentiels soit supérieur à 250.

# EXERCICES

## **EXERCICE 1 :**

Soit tableau de la série statistique correspondant aux pointures des chemises de 48 militaires.

|       |    |    |    |    |    |    |    |    |
|-------|----|----|----|----|----|----|----|----|
| $x_i$ | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 |
| $n_i$ | 5  | 11 | 12 | 8  | 4  | 3  | 4  | 1  |

- 5) Déterminer la population et le caractère étudié.
- 6) Déterminer le mode des chemises
- 7) Calculer la pointure moyenne des chemises
- 8) Calculer la variance et l'écart – type de cette série.

## **EXERCICE 2 :**

L'étude statistique faite sur la taille des voitures de la société Renault a donné les résultats suivants :

|                              |             |             |             |             |             |             |             |
|------------------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| Classes<br>$[x_i ; x_{i+1}[$ | [144 ; 150[ | [150 ; 156[ | [156 ; 162[ | [162 ; 168[ | [168 ; 174[ | [174 ; 180[ | [180 ; 186[ |
| Effectifs $n_i$              | 1           | 4           | 1           | 3           | 14          | 6           | 1           |

- 4) Dresser el tableau des centres ci .
- 5) Dresser le tableau des effectifs et des fréquences cumulées (croissants et décroissants).
- 6) En déduire l'histogramme des effectifs ( $n_i$ ) puis celle effectifs ( $n_i$  et  $n_i$ ).

## **EXERCICE 3 :**

Soit la série suivante : 3 ; 8 ; 7 ; 11 ; 5 ; 13 ; 15 ; 10 ; 2 ; 17 ; 1 ; 20 ; 12.

- 3) Déterminer la médiane et les quartiles.
- 4) Faites la représentation en boîte de cette série.

## **EXERCICE 4 :**

Une agence de voyage propose 21 voyages organisés dont voici les tarifs en euros :

152 ; 320 ; 250 ; 320 ; 137 ; 183 ; 137 ; 152 ; 244 ; 122 ; 190 ; 139 ; 202 ; 285 ; 137 ; 180 ; 143 ; 190 ; 137 ; 180 ; 190.

- 4) Calculer la moyenne et l'écart type de la série des prix. Quel est le premier et le troisième quartile, la médiane ?

- 5) Ne rentrant pas dans ses frais, l'agence hésite entre deux solutions : augmenter tous les tarifs de 190 euros ou doubler tous les tarifs. Donner pour chacune des solutions la moyenne et l'écart – type de la nouvelle série des prix. Que deviennent les quartiles et la médiane ?
- 6) Une des deux solutions est – elle plus avantageuse financièrement pour l'agence ? Tracer les deux diagrammes en boîte correspondants.

### **EXERCICE 5 :**

Lors d'un concours d'entrée à l'école statistique, la moyenne générale des 600 candidats a été de 11,4 sur 20. Il y a 300 places au concours. Hélène a eu une moyenne de 12. Pourtant elle a échoué. Expliquer ce résultat.

### **EXERCICE 6 :**

Une série statistique a pour effectif 40. Sa moyenne est égale à 15,75 et son écart – type à 11,438. On ajoute à cette série une 41<sup>ème</sup> valeur égale à 18. Calculer la moyenne et l'écart – type de la nouvelle série.

### **EXERCICE 7 :**

On a relevé le montant en euros de 100 chèques déposés dans un commerce dans une journée. Voici le tableau obtenu : les chèques ont été regroupés en fonction de leur montant par classes dont l'amplitude est 15 euros.

| Montant des chèques | effectif | Fréquence | Fréquence cumulée croissante |
|---------------------|----------|-----------|------------------------------|
| [0,15[              | 20       |           |                              |
| [15,30[             | 9        |           |                              |
| [30,45[             | 19       |           |                              |
| [45,60[             | 27       |           |                              |
| [60,75[             | 18       |           |                              |
| [75,90[             | 6        |           |                              |
| [90,105[            | 1        |           |                              |
| Total               |          |           |                              |

- 4) compléter le tableau
- 5) soit  $s$  le montant de l'ensemble des 100 chèques. Donner un encadrement de  $S$ . En déduire un intervalle  $I$  tel que le montant moyen des chèques appartienne à  $I$ .
- 6) pour estimer la moyenne d'une série statistique où les valeurs ont été regroupées en classes de même amplitude, on procède souvent de la manière suivante : on remplace chaque classe par son centre et on calcule la moyenne de la série des centres (avec les mêmes effectifs).

Faire le calcul pour la série ci-dessus. Vérifier que la moyenne obtenue est le centre de l'intervalle  $I$  trouvé à la question précédente.

- 4) Quelle est la classe pour laquelle la fréquence cumulée croissante passe la « barre » des 50 % ? Justifier pourquoi on appelle cette classe la classe médiane.

### Exercice 8 :

En prévision du lancement d'un nouveau produit, une société a effectué une enquête auprès de clients éventuels pour fixer le prix de vente (en milliers de francs) de ce produit. Les résultats sont donnés dans le tableau ci – dessous.

|                                           |     |     |     |     |     |    |    |    |
|-------------------------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|----|----|----|
| Prix de vente en milliers de francs $x_i$ | 9   | 10  | 11  | 12  | 14  | 15 | 16 | 17 |
| Nombre d'acheteurs potentiels $y_i$       | 180 | 160 | 150 | 130 | 100 | 90 | 80 | 70 |

- 7- Représenter graphiquement le nuage de points de cette série statistique. On prendra pour unité :
- 1 cm pour 1000 francs en abscisse  
1 cm pour 10 acheteurs en ordonnée.
- 8- Déterminer les coordonnées du point G
- 9- Déterminer le coefficient de corrélation linéaire  $r$  puis interpréter le résultat obtenu.
- 10- Déterminer une équation de la droite (D) de régression de  $y$  en  $x$ . Tracer (D)
- 11- Estimer graphiquement le prix maximum à fixer pour qu'il y ait au moins 50 acheteurs potentiels.
- 12- En utilisant l'équation de la droite (D) de régression de  $y$  en  $x$ , puis déterminer :
- c) Le nombre d'acheteurs à prévoir si le prix est fixé à 13 000 F
- d) Le prix à fixer pour que le nombre d'acheteurs potentiels soit supérieur à 250.

