Mon cahier d'habiletés

Tle A

Maths

CONFORME AU PROGRAMME



Rubriques

- Tableau des habiletés et contenus
- Situation d'apprentissage
- Résumés de cours, exemples et exercices de fixation
- Exercices de renforcement / approfondissement
- Situations complexes
- Devoirs de Niveau
- Nouveau format du bac
- Formulaire de révision

STOP COVID 19

3000 Fcfa

SPÉCIMEN

JD Editions

Mon cahier d'habiletés

Tle A

Maths

CONFORME AU PROGRAMME

KEITA Youssouphou
Inspecteur de l'Enseignement Secondaire

KEWO Seidou
Encadreur pédagogique

ZÉZÉ Phalé Pascal
Encadreur pédagogique

MAHI Louis Clément
Encadreur pédagogique

Sous la supervision de

M. TANOH KOUACOU
Inspecteur Général de l'Éducation Nationale et de l'Alphabétisation

Nom : .....

Prénom(s) : .....

Classe : .....

Nom de l'enseignant : .....

Année scolaire : .....

JD Éditions
21 B.P. 3636 Abidjan 21
Côte d'Ivoire

SPÉCIMEN

NOTE DE PRÉSENTATION

L'ouvrage ***Mon cahier d'habiletés de mathématiques*** apporte une contribution à la recherche des solutions relatives à l'évaluation des apprentissages, dans un contexte caractérisé par l'adoption des programmes éducatifs recadrés. Huit blocs rédactionnels sont présentés dans ce cahier pour répondre aux besoins des enseignants, des élèves et des parents d'élèves.



BLOC 1 : TABLEAU DES HABILETÉS ET CONTENUS

Il représente pour chaque leçon, la liste des habiletés prescrites par le programme officiel en vigueur. Il peut être utilisé par les enseignants pour orienter leurs cours et évaluer leur enseignement. Les élèves pourront l'utiliser dans le cadre de l'auto-évaluation.
Les parents d'élèves pourront l'exploiter pour suivre méticuleusement l'évolution des apprentissages de leur enfant.



BLOC 2 : SITUATION D'APPRENTISSAGE

Il s'agit de donner du sens aux notions mathématiques et de fixer le cadre des apprentissages. La situation d'apprentissage permet aussi de planifier et d'organiser les activités d'apprentissages de la leçon ou des séances.



BLOC 3 : RÉSUMÉ DE COURS ET EXERCICES DE FIXATION

Le cours, accessible à tous les apprenants, présente les définitions, les propriétés, les théorèmes et des points méthodes à connaître et à retenir.
De nombreux exemples accompagnent les définitions et les propriétés.
Les exercices de fixation sont des exercices qui interviennent juste après la mise en place d'une habileté. Ils ont pour objectif de vérifier la maîtrise ou non de cette habileté. Ils portent sur des questions de connaissance, de compréhension et d'application. Ces exercices préparent les élèves à aborder les exercices de renforcement.



BLOC 4 : EXERCICES DE RENFORCEMENT/ APPROFONDISSEMENT

Il s'agit de vérifier si l'élève est capable de mettre en œuvre plusieurs habiletés de la même leçon ou de plusieurs leçons pour résoudre ces exercices. Les élèves les utiliseront pour préparer leur devoir surveillé.



BLOC 5 : SITUATIONS COMPLEXES

Ce sont des exercices qui permettent de vérifier la capacité de l'élève à faire un transfert et offre l'occasion à l'enseignant de contextualiser son enseignement /apprentissage, c'est-à-dire, de rendre opératoires et significatifs les apprentissages.



BLOC 6 : DEVOIRS DE NIVEAU

Des devoirs de niveaux figurent dans l'ouvrage Mon cahier d'habiletés.
Il s'agit de favoriser la compréhension et d'aider les apprenants dans la recherche et la résolution d'exercices. Ces devoirs leurs permettent de s'auto-évaluer.



BLOC 7 : NOUVEAU FORMAT DU BAC SÉRIE A

En prélude au changement du format du Baccalauréat, nous proposons ici, le format officiel de l'épreuve de mathématiques du Baccalauréat série A tel que retenu par la Commission Pédagogique Nationale de Mathématiques.
En outre, des exemples d'épreuves conformes à ce nouveau format sont donnés afin d'aider les élèves et les enseignants à s'habituer à ce changement.



BLOC 8 : FORMULAIRE DE RÉVISION

Idéal pour les révisions en fin d'année, ce bloc vous permettra de faire le point des principales notions indispensables à la résolution des exercices de mathématiques. Il vous aidera particulièrement à préparer les concours et à réussir les tests objectifs de niveau taxonomique relatif à la connaissance, à la compréhension et même à l'application.

Bonne rentrée à tous

SPECIMEN

© JD Éditions, Abidjan 2019
ISBN : 979-10-91832-05-2
Toute reproduction, quel que soit le procédé, est interdite sous peine de poursuites judiciaires.

COMMENT UTILISER MON CAHIER D'HABILETÉS

Mon cahier d'habiletés, est un ouvrage conçu pour être utilisé, aussi bien dans les classes, qu'en dehors de celles-ci. Il s'adresse à la fois, aux enseignants, aux élèves, ainsi qu'aux parents d'élèves.

Cher enseignant,

Le présent ouvrage est un outil didactique qui vous sera d'une grande utilité dans la préparation de vos fiches de cours. En effet, les différentes rubriques qu'il présente, ont été empruntées au programme éducatif officiel, en vigueur. Il s'agit de :

- **« tableau des habiletés et contenus »**
  Cette rubrique reprend intégralement toutes les habiletés relatives à la leçon. Cela vous permettra de vous assurer que toutes les notions indispensables à l'acquisition des habiletés ont été prises en compte. Il vous appartiendra de les réorganiser, comme bon vous semblera.

- **« situation d'apprentissage »**
  Elle a pour mission de fixer le cadre du cours, en même temps qu'elle donne du sens aux notions mathématiques à l'étude. Nous vous prions de les adapter aux réalités socioculturelles de vos élèves.

- **« résumé de cours et exercices de fixation »**
  Voilà la rubrique qui présente de façon simple, les définitions, les propriétés, les théorèmes et les points méthodes à faire acquérir à l'apprenant. Nous vous suggérons d'examiner avec les apprenants, les exemples et leur faire traiter ensuite les exercices de fixation.

- **« exercices de renforcement ou d'approfondissement »**
  Cette rubrique vous donne l'occasion d'animer des travaux dirigés, lors des séances de régulation.

- **« situations complexes »**
  Indispensables à l'installation des compétences, ces situations pourront faire l'objet de travaux dirigés, de travaux en groupe ou de devoirs de maison.
  En tout état de cause, l'enseignant veillera à confronter ses élèves à la résolution de ces situations, désormais exigibles à l'épreuve du Baccalauréat.

- **« nouveau format du BAC série A »**
  Voici une occasion que ce cahier offre aux enseignants de préparer en toute confiance ses élèves au Baccalauréat. Cette rubrique donnera toutes les informations relatives au nouveau format de l'épreuve de mathématiques de la série A. Cinq exemples d'épreuve sont proposés, dont un sujet du blanc UEMOA de la section 2021. En fin d'année, l'enseignant pourra proposer à ses élèves de travailler en groupe sur une des épreuves. Les quatres autres épreuves pourront être données individuellement. L'enseignant évaluera ensuite la capacité de chaque élève à résoudre ce type d'épreuve et fera les ajustements nécessaires. Ces exemples donneront aussi l'occasion aux enseignants de s'en inspirer dans le cadre de l'élaboration des épreuves des examens blancs.

- **« formulaire de révision »**
  En l'utilisant dans l'élaboration des tests objectifs, l'enseignant trouvera ici une occasion d'inciter ses élèves à consulter régulièrement cette rubrique. Les élèves l'utiliseront pour faire des révisions en vue de préparer un devoir surveillé, l'examen du Bac ou un concours après l'obtention du BAC.

Un guide maître vous facilitera l'exploitation de ce document.

Cher élève,

Ce cahier t'offre l'occasion de t'exercer. Nous n'avons pas voulu mettre les corrigés à ta disposition, afin que tu puisses faire le maximum d'effort de recherche. En tout état de cause, cet ouvrage a été conçu, pour que tu puisses travailler en autonomie.

Cher parent,

Cet ouvrage vous permettra de suivre l'évolution des apprentissages de votre enfant sans pour autant être un spécialiste des Mathématiques. Veillez à ce qu'il/elle s'exerce au maximum. Mieux, vous pouvez lui demander de vous exposer ses difficultés, tout en lui demandant comment il/elle compte les surmonter : soit, en faisant davantage de recherches, soit, en se référant au professeur, au prochain cours. Ce genre d'échanges mettra votre enfant en confiance.

Chers tous,

Comme toute œuvre humaine, ce cahier contient probablement des irrégularités qui pourraient avoir échappé à notre vigilance. Nous vous saurions gré de nous les signaler, afin que nous puissions les corriger avant la prochaine édition.
Merci à tous !

Les auteurs.

E-mail: jdeditions@yahoo.fr

SPECIMEN

Sommaire

Leçon 1: Étude de fonctions polynômes et de fonctions rationnelles 5

Leçon 2: Probabilité 30

Devoir de niveau 1 46

Leçon 3 : Primitives et calcul intégral 49

Leçon 4 : Fonction logarithme népérienne 59

Leçon 5 : Fonction exponentielle népérienne 76

Devoir de niveau 2 90

Leçon 6 : Série statistique double 93

Leçon 7 : Suites numériques 118

Leçon 8 : Systèmes linéaires dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 122

Devoir de niveau 3 132

Nouveau format du bac série A1 et A2 135

Formulaire de révision 151

SPÉCIMEN

1 ÉTUDE DE FONCTIONS POLYNÔMES ET DE FONCTIONS RATIONNELLES

Tableau des habiletés et contenus

HABILETÉS	CONTENUS
IDENTIFIER	- une asymptote verticale - une asymptote horizontale - une asymptote oblique
CONNAÎTRE	- la limite d'une fonction polynôme en un point - la limite d'une fonction rationnelle en un point où elle est définie - la limite à gauche en a de la fonction : $x \mapsto \dfrac{1}{x-a}$ - la limite à droite en a de la fonction : $x \mapsto \dfrac{1}{x-a}$ - le théorème des valeurs intermédiaires - la propriété relative à la limite à l'infini d'une fonction polynôme - la propriété relative à la limite à l'infini d'une fonction rationnelle - la définition d'une asymptote oblique - la définition d'une asymptote verticale - la définition d'une asymptote horizontale - la propriété relative à la limite d'une somme de deux fonctions - la propriété relative à la limite d'un produit de deux fonctions - la propriété relative à la limite d'un quotient de deux fonctions
DÉTERMINER	- la limite d'une fonction polynôme en un point - la limite d'une fonction rationnelle en un point où elle est définie - la limite d'une fonction rationnelle en un point où elle n'est pas définie - la limite à gauche en a de la fonction : $x \mapsto \dfrac{1}{x-a}$ - la limite à droite en a de la fonction : $x \mapsto \dfrac{1}{x-a}$ - la limite d'une fonction polynôme à l'infini - la limite d'une fonction rationnelle à l'infini - la limite d'une somme de deux fonctions - la limite d'un produit de deux fonctions - la limite d'un quotient de deux fonctions - la fonction dérivée d'une fonction polynôme - la fonction dérivée d'une fonction rationnelle -le signe de la dérivée d'une fonction polynôme - le signe de la dérivée d'une fonction rationnelle - le sens de variation d'une fonction polynôme - le sens de variation d'une fonction rationnelle
INTERPRÉTER	-graphiquement chacune des limites suivantes : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$ $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)-(ax+b)] = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x)-(ax+b)] = 0$ - graphiquement le signe de $f(x) - (ax+b)$

SPÉCIMEN

DÉMONTRER	- qu'une droite dont une équation est donnée est asymptote à la courbe représentative d'une fonction rationnelle que l'équation $f(x) = 0$, où f est une fonction polynôme ou rationnelle, admet une solution unique sur un intervalle borné en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires
DRESSER	- le tableau de variation d'une fonction polynôme - le tableau de variation d'une fonction rationnelle
TRACER	- une asymptote verticale - une asymptote horizontale - une asymptote oblique
REPRÉSENTER	- graphiquement une fonction polynôme - graphiquement une fonction rationnelle
DÉMONTRER	- la solution d'une équation par dichotomie - la solution d'une équation par balayage
RÉSOUDRE	- graphiquement les inéquations du type : • $f(x) \geq 0$ • $f(x) \geq ax+b$, $(a; b) \neq (0 ;0)$ étant donnée la courbe d'une fonction polynôme ou d'une fonction rationnelle f - algébriquement les inéquations du type : • $f(x) \geq 0$ • $f(x) \geq ax+b$, $(a; b) \neq (0 ; 0)$ où f est une fonction rationnelle du type : $x \mapsto \dfrac{ux^2+vx+w}{dx+e}$ $(d ; e) \neq (0 ; 0)$
TRAITER UNE SITUATION	faisant appel aux fonctions polynômes et fonctions rationnelles

Situation d'apprentissage

Les élèves d'une classe de Terminale A ont visité une usine de montage de téléphones portables à Abidjan.

Le directeur leur donne les informations suivantes :

- La capacité journalière de production varie entre 0 et 18 téléphones.
- Toute la production est contrôlée et vendue le même jour.
- Le coût de production de x téléphones portables en milliers de francs est donné par la fonction C définie par : $C(x) = x^3 - 25x^2 + 280x + 400$.
- La recette en milliers de francs de la vente de x téléphones portables est modélisée par la fonction R définie par : $R(x) = 48x - 20x^2$.



Émerveillés par tout ce qu'ils ont vu et entendu, des élèves décident de déterminer le bénéfice réalisé par l'entreprise en fonction du nombre de téléphones vendus et d'étudier ce bénéfice.

SPÉCIMEN

1 NOTION DE LIMITE

Propriété

Lorsqu'une fonction admet une limite en un point où à l'infini, cette limite est unique.

Exercice de fixation

1 Réponds par ***vrai*** ou par ***faux.***

f est une fonction qui admet une limite en a ($a \in \mathbb{R}$),

1. la limite de f en a peut prendre deux valeurs différentes .
2. la limite de f en a ne peut prendre qu'une seule valeur .....

2 LIMITE D'UNE FONCTION POLYNÔME

1) Limite d'une fonction polynôme en un point

Propriété

Si P est une fonction polynôme et a un nombre réel, alors on a : $\lim\limits_{x \to a} P(x) = P(a)$.



On pose : $p(x) = 2x^3 - x^2 + 1$.

$\lim\limits_{x \to 0} p(x) = p(0)$. Or $p(0) = 1$.

Donc $\lim\limits_{x \to 0} p(x) = 1$.

Exercices de fixation

2 Soit f une fonction polynôme et r un nombre réel. Entoure la bonne réponse parmi les réponses suivantes :

$\lim\limits_{x \to r} f(x)$ est :

a) $f(r)$; b) $f'(r)$; c) r.

3 Calcule :

a) $\lim\limits_{x \to 4} (x^2 + 5x - 1)$; b) $\lim\limits_{x \to -5} (8x^2 + x)$;

c) $\lim\limits_{x \to -1} (x^3 + 4x^2 + x - 7)$.

2) Limite à l'infini d'une fonction polynôme

Propriété

Soit k un nombre réel et a un nombre réel non nul et n un entier naturel.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} k = k$; $\lim\limits_{x \to -\infty} k = k$;
- $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$;
- $\lim\limits_{x \to +\infty} ax = +\infty$ si $a > 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} ax = -\infty$ si $a < 0$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} ax = -\infty$ si $a > 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} ax = +\infty$ si $a < 0$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$

- Cas n est pair :

$\lim\limits_{x \to +\infty} ax^n = +\infty$ si $a > 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} ax^n = -\infty$ si $a < 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} ax^n = +\infty$ si $a > 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} ax^n = -\infty$ si $a < 0$

- Cas n est impair :

$\lim\limits_{x \to +\infty} ax^n = +\infty$ si $a > 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} ax^n = -\infty$ si $a < 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} ax^n = -\infty$ si $a > 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} ax^n = +\infty$ si $a < 0$



$\lim\limits_{x \to -\infty} 2x^3 = -\infty$;

$\lim\limits_{x \to -\infty} (-7x^2) = -\infty$;

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^4 = +\infty$.

SPECIMEN

Exercices de fixation

4 Soit k un nombre réel non nul et n un nombre entier naturel pair.
Réponds par ***vrai*** ou par ***faux*** à chacune des affirmations suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty} kx^n$ ne dépend pas du signe de k. ☐

$\lim\limits_{x\to+\infty} kx^n$ est toujours positif. ☐

$\lim\limits_{x\to+\infty} kx^n$ dépend du signe de k. ☐

$\lim\limits_{x\to+\infty} kx^n$ est toujours négatif. ☐

5 Soit k un nombre réel non nul et n un nombre entier naturel impair.
Réponds par ***vrai*** ou par ***faux*** à chacune des affirmations suivantes.

$\lim\limits_{x\to-\infty} kx^n$ ne dépend pas du signe de k. ☐

$\lim\limits_{x\to-\infty} kx^n$ est toujours positif. ☐

$\lim\limits_{x\to-\infty} kx^n$ dépend du signe de k. ☐

$\lim\limits_{x\to-\infty} kx^n$ est toujours négatif. ☐

6 Réponds par ***vrai*** ou par ***faux*** à chacune des affirmations suivantes :

$\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3 = +\infty$ ☐ $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty$ ☐

$\lim\limits_{x\to-\infty} (-3x^5) = +\infty$ ☐ $\lim\limits_{x\to-\infty} (-3x^5) = +\infty$ ☐

$\lim\limits_{x\to-\infty} 5x^2 = +\infty$ ☐ $\lim\limits_{x\to-\infty} 5x^2 = +\infty$ ☐

7 Détermine les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} 19 =$ .....

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} x =$ .....

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} x =$ .....

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 =$ .....

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 =$ .....

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} (-3x^2) =$ .....

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} (-3x^2) =$ .....

Propriété

La limite d'une fonction polynôme à l'infini est la limite de son monôme de plus haut degré.



$\lim\limits_{x\to-\infty} (5x^3 - 5x^2 + 3) = \lim\limits_{x\to-\infty} 5x^3$

$\lim\limits_{x\to-\infty} 5x^3 = -\infty$

donc, $\lim\limits_{x\to-\infty} (5x^3 - 5x^2 + 3) = -\infty$

Exercices de fixation

8 Calcule les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} (6x^2 + 4x - 78)$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty} (-3x^2 + x - 5)$;

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} (-3x^2 + x - 5)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

9 Calcule les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^3 + x^2 + 3)$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^2 + x - 5)$;

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} (-3x^3 + x - 5)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

SPÉCIMEN

3 LIMITE D'UNE FONCTION RATIONNELLE

1) Limite d'une fonction rationnelle en un point où elle est définie

Propriété

Soit f une fonction rationnelle et a un élément de l'ensemble de définition de f.
On a : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.



Calculons : $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1-x^2}{x+2}$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{-2\}$ par : $f(x) = \dfrac{1-x^2}{x+2}$.

3 appartient à l'ensemble de définition de la fonction f.

Donc : $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1-x^2}{x+2} = f(3)$.

$f(3) = \dfrac{-8}{5}$, donc $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1-x^2}{x+2} = \dfrac{-8}{5}$.

Exercices de fixation

10 Soit f une fonction rationnelle et r un nombre réel de l'ensemble de définition de f.
Entoure la bonne réponse parmi les propositions suivantes : $\lim\limits_{x \to r} f(x)$ est égal à :
a) $f(r)$; b) $f'(r)$; c) r

11 Calcule :

$a) \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x}{2x+3}$; $b) \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2+2x+9}{x+1}$; $c) \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x+1}{x^2+3}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2) Limite à gauche (respectivement à droite) en a de la fonction f telle que : $f(x) = \dfrac{1}{x-a}$

Propriété

Soit a un nombre réel. On a:

$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} \dfrac{1}{x-a} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} \dfrac{1}{x-a} = +\infty$



$\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ <}} \dfrac{1}{x-4} = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ >}} \dfrac{1}{x+2} = +\infty$.

Exercices de fixation

12 Réponds par ***vrai*** ou par ***faux*** à chacune des propositions suivantes :

a) $\lim\limits_{\substack{x \to 8 \\ <}} \dfrac{1}{x-8} = +\infty$ ☐

b) $\lim\limits_{\substack{x \to -5 \\ >}} \dfrac{1}{x+5} = +\infty$ ☐

c) $\lim\limits_{\substack{x \to -4 \\ <}} \dfrac{1}{x+4} = -\infty$ ☐

d) $\lim\limits_{\substack{x \to 10 \\ <}} \dfrac{1}{x-10} = +\infty$ ☐

13 Calcule les limites suivantes:

$a) \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \dfrac{1}{x-1}$; $b) \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \dfrac{1}{x-1}$; $c) \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{1}{x}$; $d) \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{1}{x}$;

$e) \lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ <}} \dfrac{1}{x+2}$; $f) \lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ >}} \dfrac{1}{x+2}$.

.....

.....

.....

.....

.....

SPECIMEN

3) Limite à l'infini d'une fonction rationnelle

Propriété

La limite à l'infini d'une fonction rationnelle est égale à la limite du quotient des monômes de plus hauts degrés.



$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+x+2}{4x-5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{4x}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{4x}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{4}$$
$$=+\infty$$

Exercices de fixation

14 Réponds par vrai ou par faux :

1. La limite d'une fonction rationnelle à l'infini est :

a) toujours + ∞.....

b) la limite du numérateur .....

c) la limite du dénominateur .....

d) la limite du quotient des monômes de plus hauts degrés .....

15 Calcule chacune des limites suivantes:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+3}{x-1}$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+3}{x-1}$;

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+x-5}{-x^2+8x-9}$; d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4-x+14}{-x^3+12x+2}$.

17 Calcule chacune des limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2+x+7}{x+2}$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+85x}{8x+9}$;

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3-7}{x-10}$; d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+3x^2+10x-5}{x^2-23x+1}$.

4 OPÉRATIONS SUR LES FONCTIONS

α désigne un nombre réel, ou + ∞ ou −∞, L et M sont des nombres réels.

1) Limite de la somme de fonctions

Propriété

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha}(f(x)+g(x))=$	$L+L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	On ne peut conclure

SPECIMEN



Calculons $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} (3x-\frac{1}{x})$.

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0} 3x=0\\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(-\frac{1}{x}\right)=-\infty\end{array}\right\}$,

Donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} (3x-\frac{1}{x}) = -\infty$

Exercices de fixation

18 L est un nombre réel . On donne : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=-\infty$.

Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

a) On ne peut conclure pour la limite de $g+h$ en $+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)+h(x)\right]=0$ .....

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)+h(x)\right]=L$ .....

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)+h(x)\right]=-\infty$ .....

19 Calcule la limite de $f+g$ en -3.

$f(x)=\dfrac{2x+3}{x+1}$ et $g(x)=x-8$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2) Limite du produit de deux fonctions

Propriété

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=$	L	$L>0$	$L<0$	$L>0$	$L<0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=$	L'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)\times g(x))=$	LL'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	On ne peut conclure



On pose : $f(x)=\dfrac{-2x}{x-1}$ et $g(x)=x^2-1$.

Calculons la limite de la fonction $f\times g$ en $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ donc,

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)\times g(x)\right]=-\infty$

Exercices de fixation

20 Réponds par *vrai* ou par *faux* à chacune des affirmations suivantes :

L est un nombre réel non nul.

On donne :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=L$

a) On ne peut conclure pour la limite de $f\times g$.....

b) On ne peut conclure pour la limite de $f\times h$.....

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)\times h(x)\right]=0$ .....

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)\times h(x)\right]$ est toujours égale à $+\infty$.....

SPECIMEN

21 Calcule la limite de $f \times g$ en 2.

$f(x)=\dfrac{x+1}{x-4}$ et $g(x)=x-8$.

22 Calcule la limite de $f \times g$ en $+\infty$.

$f(x)=\dfrac{x+1}{x-4}$ et $g(x)=x-8$.

Point Méthode 1

Exemple

Pour calculer la limite en $\dfrac{1}{2}$ de la fonction : $x \mapsto \dfrac{1}{2x-1}$, on peut procéder comme suit :

- mettre l'expression $\dfrac{1}{2x-1}$ sous la forme $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{x-\frac{1}{2}}$;
- calculer la limite en $\dfrac{1}{2}$ de la fonction : $x \mapsto \dfrac{1}{x-\frac{1}{2}}$
- appliquer les propriétés sur la limite du produit de deux fonctions

$\lim\limits_{\substack{x \to \frac{1}{2} \\ <}} \dfrac{1}{x-\frac{1}{2}} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{1}{2} \\ <}} \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

donc $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{1}{2} \\ <}} \dfrac{1}{2x-1} = -\infty$.

Exercices de fixation

23 Calcule les limite suivantes :

$\lim\limits_{\substack{x \to \frac{2}{5} \\ <}} \dfrac{1}{5x-2}$; $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{3}{2} \\ >}} \dfrac{1}{3-2x}$;

Point Méthode 2

Exemple

Pour calculer la limite à gauche en $-\dfrac{5}{4}$ de la fonction : $x \mapsto \dfrac{2x^2+x+6}{4x+5}$, on peut procéder comme suit :

- mettre l'expression $\dfrac{2x^2+x+6}{4x+5}$ sous la forme $(2x^2+x+6) \times \dfrac{1}{4x+5}$;
- calculer la limite à gauche en $-\dfrac{5}{4}$ de $\dfrac{1}{4x+5}$;

$\lim\limits_{\substack{x \to -\frac{5}{4} \\ <}} \dfrac{1}{4x+5} = -\infty$ car $\dfrac{1}{4x+5} = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{x+\frac{5}{4}}$

et $\lim\limits_{\substack{x \to -\frac{5}{4} \\ <}} \dfrac{1}{x+\frac{5}{4}} = -\infty$;

- calculer la limite en $-\dfrac{5}{4}$ de $(2x^2+x+6)$;

$\lim\limits_{x \to -\frac{5}{4}} (2x^2+x+6) = \dfrac{63}{8}$;

- Appliquer les propriétés sur la limite du produit de deux fonctions.

$\lim\limits_{\substack{x \to -\frac{5}{4} \\ <}} \dfrac{2x^2+x+6}{4x+5} = -\infty$

car $\dfrac{2x^2+x+6}{4x+5} = (2x^2+x+6) \times \dfrac{1}{4x-5}$

et $\lim\limits_{\substack{x \to -\frac{5}{4} \\ <}} (2x^2+x+6) = \dfrac{63}{8}$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -\frac{5}{4} \\ <}} \dfrac{1}{4x+5} = -\infty$

SPECIMEN

Exercices de fixation

24 Calcule les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} \dfrac{3x+1}{x-2}$; b) $\lim\limits_{\substack{x\to \frac{2}{3}\\ >}} \dfrac{3x+1}{3x-2}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

25 Calcule les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{\substack{x\to -\frac{5}{3}\\ >}} \dfrac{2x+3}{3x+5}$; b) $\lim\limits_{\substack{x\to -3\\ <}} \dfrac{2x+1}{x+3}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3) Limite du quotient de deux fonctions

Propriété

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) =$	L	L	$L>0$ ou $+\infty$	$L<0$ ou $-\infty$	$L>0$ ou $+\infty$	$L<0$ ou $-\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to\infty} g(x) =$	$L'\neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0 avec $g(x)>0$	0 avec $g(x)>0$	0 avec $g(x)<0$	0 avec $g(x)<0$	0	$L'>0$	$L'<0$	$L'>0$	$L'<0$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)} =$	$\dfrac{L}{L'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.



On pose : $f(x)=\dfrac{1}{x}$ et $g(x)=x^3-1$.

Calculons la limite à droite en 0 de chacune des fonctions : $\dfrac{f}{g}$ et $\dfrac{g}{f}$.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=-1$,

donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \dfrac{f(x)}{g(x)}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x)}{f(x)}=0$

Exercices de fixation

26 Réponds par vrai ou faux.

L est un nombre réel non nul. On donne :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ et

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=L$,$(L\neq 0)$.

1 - On ne peut conclure pour la limite en $+\infty$ de $\dfrac{g}{f}$ .....

2 - On ne peut conclure pour la limite en $+\infty$ de $\dfrac{f}{g}$ .....

3 - $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{h(x)}{g(x)}=0$ .....

4 - $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{h(x)}$ est toujours égale à $+\infty$ .....

27 Calcule la limite de $\dfrac{f}{g}$ en 1 où $f(x)=\dfrac{x+1}{x-4}$ et $g(x)=x-8$.

.....

.....

.....

.....

SPÉCIMEN

28 Calcule chacune des limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{5x-8}$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{4x-1}$;

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x-7}{4x^2+6x-13}$; d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{14}{9x^2+2x+21}$.

29 Calcule la limite de $f+g$ en $+\infty$.

$f(x)=x^2+2x+5$ et $g(x)=\dfrac{1}{x}$.

5 DÉRIVATION

1) Dérivées de fonctions élémentaires

Propriété

Fonction f	Ensemble de définition de f	Dérivée f'	Ensemble de définition de f'
$f(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ $n \geq 1$ entier	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ $n \geq 1$ entier	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$

EXAMEN



On pose $f(x) = x^4$ et $g(x)\frac{1}{x^5}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 4x^{4-1}$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 4x^3$

g est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ et $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$,

$g(x) = \frac{-5}{x^{5+1}}$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $g'(x) = \frac{-5}{x^6}$

Exercices de fixation

30 Détermine sur $\mathbb{R}$, la fonction dérivée de chacune des fonctions f, g, h et l définies par :

1) $f(x) = 7$; 2) $g(x) = x^2$;

3) $h(x) = x^3$; 4) $l(x) = x^8$.

31 Détermine sur $\mathbb{R}\{0\}$, la fonction dérivée de chacune des fonctions f, g, h et l définies par :

1) $f(x) = \frac{1}{x}$; 2) $g(x) = \frac{1}{x^2}$;

3) $h(x) = \frac{1}{x^3}$; 4) $l(x) = \frac{1}{x^4}$.

2) Dérivées et opérations sur les fonctions

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert I et n est un entier naturel non nul

Propriété

- $u + v$ est dérivable sur I et $(u+v)' = u' + v'$
- ku est dérivable sur I, où k est une constante et $(ku)' = ku'$
- uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$
- u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$
- $\frac{1}{u}$ est dérivable sur I, à condition que u ne s'annule pas sur I et $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
- $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I, à condition que v ne s'annule pas sur I et $\left(\frac{u}{v}\right)' = -\frac{u'v - uv'}{v^2}$



Soit u et v, deux fonctions dérivables sur $]\frac{1}{2}; +\infty[$ telles que :

$u(x) = x^2$ et $v(x) = 2x - 1$.

Déterminons sur $]\frac{1}{2}; +\infty[$, la dérivée de la fonction $\frac{u}{v}$.

v ne s'annule pas sur $]\frac{1}{2}; +\infty[$.

$\forall x \in]\frac{1}{2}; +\infty[, u'(x) = 2x$ et $v'(x) = 2$.

Donc $\forall x \in]\frac{1}{2}; +\infty[$, $\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{2x(2x-1) - 2x^2}{(2x-1)^2}$

$= \frac{2x(x-1)}{(2x-1)^2}$

SPÉCIMEN

Exercices de fixation

32 Détermine la fonction dérivée sur $\mathbb{R}$ de chacune des fonctions f, g, h et l définies par :

a) $f(x) = 2x + 5$; b) $g(x) = \frac{x^2}{2} + x - 8$

c) $h(x) = 4x^3 + 4x^2 + 6x + 2$; d) $l(x) = 5x^4 + \frac{x^2}{4}$.

33 Détermine la fonction dérivée sur $]1 ; +\infty[$ de chacune des fonctions f, g et h définies par :

a) $f(x) = x + \frac{1}{x}$; b) $g(x) = 2x + 2 + \frac{1}{x-1}$;

c) $h(x) = x + \frac{1}{x^2}$.

34 Calcule la fonction dérivée sur $\mathbb{R}$ de chacune des fonctions f, g, h et l définies par :

a) $f(x) = (3x + 2)(5x + 4)$; b) $g(x) = (x + 6)(2x - 1)$;

c) $h(x) = (4x + 1)^2$; d) $l(x) = x^2(x+1)^2$.

35 Calcule la fonction dérivée sur $]\frac{1}{2} ; +\infty[$ de chacune des fonctions f, g, h et l définies par :

a) $f(x) = \frac{1}{x+2}$; b) $g(x) = \frac{3}{2x-1}$;

c) $h(x) = \frac{2x+3}{4x-1}$; d) $l(x) = \frac{x^2+x-1}{2x+3}$.

SPÉCIMEN

3) Dérivé et sens de variation

Propriété 1

Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle ouvert I.

- Si $f'(x) \geq 0$ pour tout x élément de I, alors f est croissante sur I.
- Si $f'(x) \leq 0$ pour tout x élément de I, alors f est décroissante sur I.
- Si $f'(x) = 0$ pour tout x élément de I, alors f est constante sur I.

Définition

Une fonction est dite monotone sur un intervalle I si elle est croissante ou décroissante sur I.

Propriété 2

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert K de $\mathbb{R}$.

- Si pour tout x de K : $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur K.
- Si pour tout x de K : $f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur K.

Exemples

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x - 1$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car f est une fonction polynôme) et on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$

$f'(x)$ a le signe de $x^2 - 1$ car $3 > 0$. Ainsi,

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty;-1[, \quad f'(x) > 0; \\ \forall x \in]-1;1[, \quad f'(x) < 0; \\ \forall x \in]1;+\infty[, \quad f'(x) > 0. \end{cases}$$

Donc :

● f est strictement croissante sur $]-\infty ; -1[$ et sur $]1 ; -\infty[$

● f est strictement décroissante sur $]-1 ; 1[$

On en déduit le tableau de variations de f, que l'on complète en calculant $f(-1)$, $f(1)$ et les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

$f(-1) = 1$ et $f(1) = -3$.

x	$-\infty$		1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	-3	↗	$+\infty$

Exercices de fixation

35 Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :
$f' \leq 0$, sur $]-\infty ; 0[$;
$f' = 0$, sur $]0 ; 7[$;
$f' > 0$, sur $]7 ; +\infty[$.
Détermine le sens de variation de f sur chacun des intervalles donnés.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Tableau de variation

36 Parmi les fonctions f, g, h, i, j et k suivantes, indique celle dont les variations correspondent au tableau de variations ci-dessous :
$f(x) = -x^2 + 2x + 2$; $g(x) = x^2 - 3x + 5$;
$h(x) = -2x^2 + x + 2$; $i(x) = -2x^2 + 4x + 1$;
$j(x) = (1-x)(2-x)$; $k(x) = (2x-1)(4+x)$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
signe de la dérivée		$-$	0	$+$	
variation de la fonction	$-\infty$	↗	3	↘	$+\infty$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

SPÉCIMEN

4) Équation de la tangente à une courbe

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

Définition

La tangente à la courbe (C_f) d'une fonction f au point A d'abscisse a est la droite :
- passant par A,
- de coefficient directeur le nombre dérivé $f'(a)$.



Conséquence

Une équation de la tangente à la courbe (Cf) d'une fonction f au point A d'abscisse a est :
$y = f'(a)(x - a) + f(a)$



Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.
Détermine une équation de la tangente à (C_f) au point A d'abscisse 3.
On a : $f(3) = 3^2$ et $f'(3) = 6$, d'où la tangente à (C_f) au point A d'abscisse 3 a pour équation :
$y = f'(3)(x - 3) + f(3)$.
$\Leftrightarrow y = 6(x - 3) + 9$.
$\Leftrightarrow y = 6x - 9$
Une équation de la tangente de à (C_f) au point d'abscisse 3 est : $y = 6x - 9$.

Exercices de fixation

38 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^2 - 2$.
1. $f'(0) = 0$ et $f(0) = -2$. Détermine une équation de la tangente au point d'abscisse 0.
2. $f'(1) = -2$ et $f(1) = -3$. Détermine une équation de la tangente au point d'abscisse 1.

39 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 2x$.
Détermine une équation de la tangente au point d'abscisse -2.

5) Théorème des valeurs intermédiaires

Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I, a et b deux éléments de I.
Pour tout nombre réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un nombre réel c compris entre a et b tel que : $f(c) = k$.



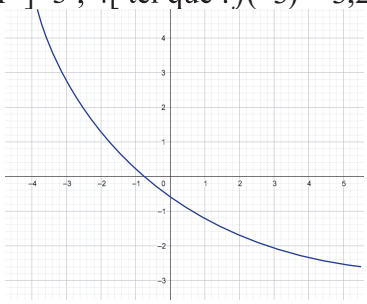
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^5 + x^3 - 1$.
Justifions que l'équation : $x^5 + x^3 - 1 = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle] 0 ; 1[.
La fonction g est dérivable sur] 0 ; 1[. $g(0) = -1$ et $g(1) = 1$.
On a : $0 \in]-1 ; 1[$. Donc, il existe au moins un réel $\propto$ appartenant à] 0 ; 1[, tel que : $g(\propto) = 0$.

Exercices de fixation

40 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
On désigne par (C) la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + 2x - 5$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et croissante sur [1 ; 2].
1. Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle [1 ; 2].
2. Justifie que : $1{,}4 < \alpha < 1{,}5$.

SPÉCIMEN

41 Sur la figure ci-dessous, f est une fonction dérivable sur $]-3\ ;\ 4[$ tel que : $f(-3) = 3{,}25$; $f(4) = -2$



Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

1. Il existe au moins un nombre réel a compris entre -3 et 4 tel que : $f(a) = -1$ .....
2. Il existe au moins un nombre réel a compris entre -3 et 4 tel que: $f(a) = -10$.....
3. Il existe au moins un nombre réel a compris entre -3 et 4 tel que : $f(a) = 2$.....
4. Il existe au moins un nombre réel a compris entre -3 et 4 tel que: $f(a) = 0$.....

6) Méthode de dichotomie

Soit f une fonction dérivable et monotone sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ tel que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires.
Il s'agit de déterminer le nombre réel α élément de $[a\ ;b]$ tel que : $f(\alpha) = 0$.

- Si $f(a) \times f(\frac{a+b}{2}) < 0$ alors $\alpha \in [a\ ;\ \frac{a+b}{2}]$.
- Si $f(a) \times f(\frac{a+b}{2}) > 0$ alors $\alpha \in [\frac{a+b}{2}\ ;\ b]$.

On répète cette méthode dans l'intervalle trouvé.



Dans l'exemple précédent, justifions que : $\propto \in]\frac{1}{2}\ ;\ 1[$.

La fonction g est dérivable et monotone sur $]\ 0\ ;\ 1[$ telle que $g(0)$ et $g(1)$ soient de signes contraires.

$g(0) = -1$ et $g(\frac{1}{2}) \simeq -0{,}9$.

On a donc $g(0) \times g(\frac{1}{2}) > 0$.

Donc le nombre réel $\propto$ solution de l'équation $x^5 + x^3 - 1 = 0$ est tel que : $\propto \in]\frac{1}{2}\ ;\ 1[$

Exercice de fixation

42 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). On désigne par (C) la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + 2x - 5$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et f est croissante sur $[-4\ ;\ -3]$ et l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[-3\ ;\ -4]$.
Détermine un encadrement de α par deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 1 par la méthode de dichotomie.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

7) Méthode par balayage

Soit f une fonction dérivable et monotone sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ tel que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires.
Il s'agit de déterminer le nombre réel α élément de $[a\ ;b]$ tel que : $f(\alpha) = 0$.
On calcule $f(a + 0{,}1)$; $f(a + 0{,}2)$; $f(a + 0{,}3)$; …
On s'arrête lorsqu'on a un résultat de signe contraire au précédent. On en déduit un encadrement de α.

Exercice de fixation

43 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + x - 1$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et f est croissant sur $[1\ ;\ 2]$ et l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[1\ ;\ 2]$.
Détermine un encadrement de α par deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 1 par la méthode de balayage.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

SPECIMEN

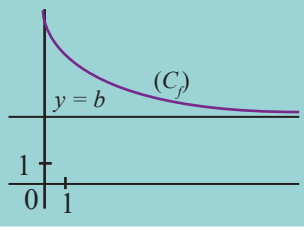
6 ETUDE D'UNE FONCTION RATIONNELLE

1) Asymptote à la courbe représentative d'une fonction

a- Asymptote parallèle aux axes

Propriété 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Lorsque la fonction f a pour limite le nombre réel b en $+\infty$ (resp. en $-\infty$),
on dit que la droite d'équation $y = b$ est asymptote à la courbe représentative
de f en $+\infty$ (resp. $-\infty$).



Exemples

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ par : $f(x) = \dfrac{3x}{x-2}$.

Justifions que la courbe de la fonction f possède une asymptote parallèle à l'axe (OI).

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x}{x-2} = 3$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x}{x-2} = 3$

donc la droite d'équation $y = 3$ est
une asymptote parallèle à la droite (OI) en $+\infty$ et en $-\infty$; on parle aussi d'asymptote horizontale.

Exercice de fixation

44 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). On désigne par (C) la courbe réprésentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ par : $f(x) = \dfrac{3x+5}{x-2}$.

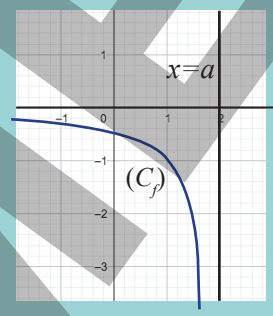
1. Vérifie que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3$.
2. Interprète graphiquement les résultats précédents.

.....
.....
.....
.....
.....
.....

.....
.....
.....

Propriété 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J)
Soit f une fonction d'ensemble de definition D_f et a un nombre réel tel que $a \notin D_f$. Lorsque la fonction f a pour limite $+\infty$ ou $-\infty$, en a, on dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote à la courbe représentative de f.



Exemples

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ par : $h(x) = \dfrac{4x+1}{x-3}$

Justifions que la droite d'équation : $x = 3$ est une asymptote à la courbe de la fonction h.

$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{3\},\ h(x) = (4x+1)\times\dfrac{1}{x-3}$

$\lim\limits_{x\to3}(4x+1) = 13$ et $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}} \dfrac{1}{x-3} = -\infty$,

donc $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}} h(x) = -\infty$, de même $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} h(x) = +\infty$.

On en déduit que la droite d'équation $x = 3$ est une asymptote parallèle à l'axe des ordonnées en $-\infty$ et en $+\infty$. On parle aussi d'asymptote verticale.

Exercice de fixation

45 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). On désigne par (C) la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ par : $f(x) = \dfrac{3x+5}{x-2}$.

Interprète graphiquement $\lim\limits_{\substack{x\to2\\<}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to2\\>}} f(x) = +\infty$.

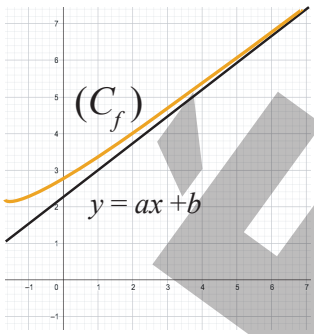
SPECIMEN

b- Asymptotes obliques

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
(C_f) désigne la courbe représentative d'une fonction f dans un repère donné.
La droite d'équation $y = ax + b$ (avec $a \neq 0$) est asymptote oblique à la courbe (C_f) en $+\infty$ (resp. en $-\infty$), signifie que :

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(ax+b))=0$

(resp. $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(ax+b))=0$).



Exemples

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

On considère la fonction g définie sur

$\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ par : $g(x) = x - 1 + \dfrac{1}{x+1}$

Justifions que la droite d'équation : $y = x - 1$ est une asymptote oblique à la courbe de la fonction g.

$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}, g(x)-(x-1) = \dfrac{1}{x+1}$. D'où :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)-(x-1)\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x+1} = 0$;

donc la droite d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique à la courbe représentative de la fonction g en $+\infty$.

De même $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[g(x)-(x-1)\right] = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x+1} = 0$.

Donc la droite d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique à la courbe représentative de la fonction g en $-\infty$.

Exercices de fixation

46 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ par :

$f(x) = x + 1 + \dfrac{1}{x}$.

Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]$ et interprète graphiquement les résultats.

47 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$ par :

$f(x) = x - \dfrac{1}{x+3}$.

Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-x\right]$ et interprète graphiquement les résultats.

SPECIMEN

7 EXEMPLES D'ÉTUDE DE FONCTIONS

1. Fonctions polynômes



Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} - x + 3$.

1. Étudions et représentons graphiquement la fonction f.
2. Justifions que l'équation $f(x) = 0$ n'admet aucune solution dans l'intervalle $[-\frac{1}{2} ; +\infty[$.
3. Déduisons-en que l'équation $f(x) = 0$ possède une solution unique α dans $\mathbb{R}$.

1. Étudions et représentons graphiquement la fonction g.

D'après la propriété relative aux limites des fonctions polynômes à l'infini, on a :

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{3}x^3 = +\infty$.

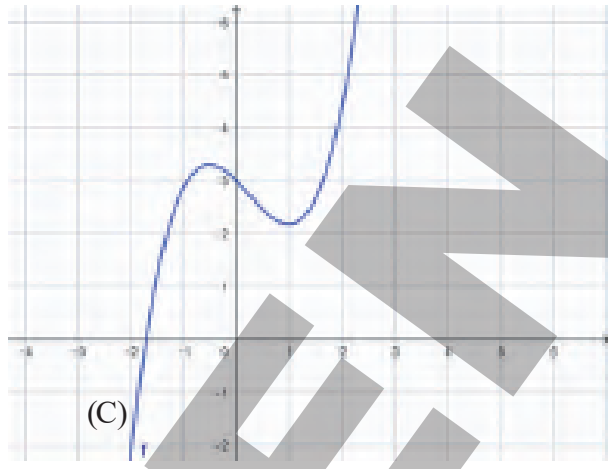
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2}{3}x^3 = -\infty$.

La fonction f est une fonction polynôme. Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x élément de $\mathbb{R}$, on a : $f'(x) = 2x^2 - x - 1$.

L'équation $f'(x) = 0$ possède deux racines qui sont : $-\frac{1}{2}$ et 1.

L'étude du signe de $f'(x)$ permet d'établir le tableau de variation ci-dessous :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{79}{24}$	↘	$\frac{13}{6}$	↗	$+\infty$



2. Le tableau de variation indique que :

$\forall x \in [-\frac{1}{2} ; +\infty[, f(x) \geq \frac{13}{6} ; \frac{13}{6} > 0$.

Donc : $\forall x \in [-\frac{1}{2} ; +\infty[, f(x) \neq 0$.

3. La fonction est dérivable et strictement croissante sur $]-\infty ; -\frac{1}{2}[$.

Or : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $f(-\frac{1}{2}) = \frac{79}{24}$, donc f est une bijection de : $]-\infty ; -\frac{1}{2}[$ sur $]-\infty ; \frac{79}{24}[$.

$0 \in]-\infty ; \frac{79}{24}[$, donc il existe un unique réel α appartenant à l'intervalle $]-\infty ; -\frac{1}{2}[$, tel que : $f(\alpha) = 0$.

- L'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution dans $[-\frac{1}{2} ; +\infty[$, et possède une solution unique dans $]-\infty ; -\frac{1}{2}[$. Donc l'équation $f(x) = 0$ possède une solution unique dans $\mathbb{R}$.

Exercice de fixation

48 Soit g la fonction polynôme définie par : $g(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 10$.
Étudie et représente graphiquement la fonction g dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

.....

.....

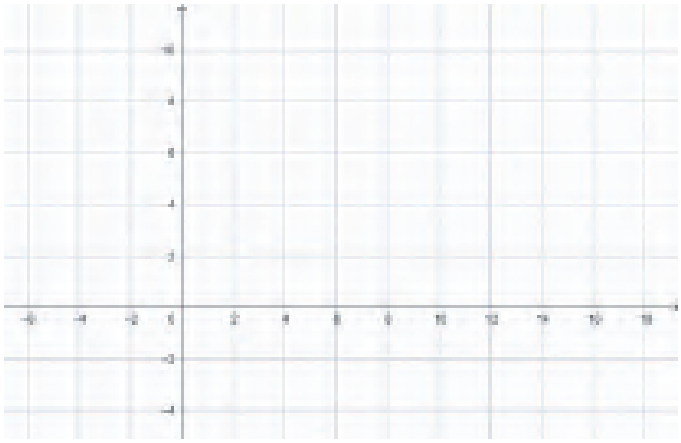
.....

.....

.....

SPÉCIMEN

Représentation graphique



2. Fonctions rationnelles



Étudions et représentons dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) la fonction rationnelle h définie par :

$$h(x) = \frac{x^2 - \frac{3x}{2} - 1}{x}.$$

L'ensemble de définition de la fonction h est :

$]-\infty;0[\cup]0 ; +\infty[$.

On vérifie que :

a) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} h(x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} h(x) = +\infty$;

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$.

On déduit de a) que la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale à la courbe de la fonction h.

En tant que fonction rationnelle, h est dérivable sur $]-\infty ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty[$.

$\forall x \in]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[,\ h'(x) = \frac{x^2+1}{x^2}$.

Donc la fonction h est strictement croissante sur $]-\infty ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty[$.

On a : $\forall x \in]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[,\ h(x) = x - \frac{3}{2} - \frac{1}{x}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left[h(x) - (x - \frac{3}{2})\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = 0$ de même,

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left[h(x) - (x - \frac{3}{2})\right] = 0$

donc la droite d'équation $y = x - \frac{3}{2}$ est une asymptote oblique à la courbe représentative de la fonction h en $+\infty$ et en $-\infty$.

Tableau de variation

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$	$+$		‖	$+$	
$h(x)$	$-\infty$	↗	‖	↗	$+\infty$

Courbe de la fonction h



Exercice de fixation

49 Le plan est muni d'un repère (O, I, J).
Étudie et représente graphiquement la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = \frac{2x^2 - 3x + 3}{x^2 - 2x + 2}$

SPECIMEN

1 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = x^2 - 2x - 3$.

1. Calcule : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

On suppose que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. Calcule $f'(x)$.
3. Complète le tableau de variation de f.

x	$-\infty$ $\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	
$f(x)$	

2 Soit f et g les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies respectivement par :

$f(x) = \dfrac{2x+9}{x-1}$ et $g(x) = \dfrac{x^2-8}{x+5}$.

On note (C) et (Γ) les courbes représentatives respectives de f et g dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

Calcule $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -5 \\ >}} g(x)$ puis interprète graphiquement chaque résultat.

3 Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$f(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - x - 2 \right)$ et $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

puis interprète graphiquement chaque résultat.

SPÉCIMEN

4 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). On désigne par (C) la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$
On suppose que f est dérivable sur $\mathbb{R}$
1 - Détermine la fonction dérivée de f.
a) Étudie le signe de $f'(x)$ et détermine le sens de variations de f.
b) Détermine $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et dresse le tableau de variations de f.
2 - a) Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[2 ; 3]$.
b) Justifie que : $2,8 < \alpha < 2,9$
3 - Démontre que le point A$(1 ; -1)$ est un centre de symétrie de la courbe (C).
4 - a) Complète le tableau de valeurs ci-dessous *(On donnera les arrondis d'ordre 2 des résultats)*

x	-1	$-0,5$	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$f(x)$									

b) Construis (C) sur l'intervalle $[-1 ; 3]$
(On prendra : $\alpha = 2,85$).

5 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). On désigne par (C) la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 3x + 2$
1 - Détermine $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
2 - a) Détermine la fonction dérivée de f.
b) Étudie le sens de variations de f.
c) Dresse le tableau de variations de f.
3 - a) Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[-1 ; 0]$.
b) Justifie que : $-0,6 < \alpha < -0,5$
4 - On désigne par (T) la tangente à (C) au point d'abscisse 0.
a) Détermine une équation de (T).
b) Étudie la position relative de (C) et de (T).
5 - On prendra : $\alpha = -0,6$
a) Complète le tableau de valeurs ci-dessous
(On donnera les arrondis d'ordre 2 des résultats.)

x	-2	$-1,5$	-1	0,5	0	1	2	2,5	3
$f(x)$									

b) Construis (C) sur l'intervalle $[-2 ; 3]$.

SPÉCIMEN

6 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). On désigne par (C) la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2-5x+7}{x-2}$

1 - Calcule : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$;
$\lim\limits_{\substack{x\to2\\<}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to2\\>}} f(x)$.

2 - a) Détermine la fonction dérivée f' de f sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

b) Étudie le signe de $f'(x)$ et déduis-en le sens de variation de f.

c) Dresse le tableau de variation de f.

3 - a) Démontre que la droite d'équation $x = 2$ est une asymptote à (C).

b) Démontre que la droite (D) d'équation $y = x - 3$ est une asymptote oblique à (C) en $-\infty$ et en $+\infty$.

c) Étudie la position relative de (C) et (D).

4 - Complète le tableau de valeurs ci-dessous
(On donnera les arrondis d'ordre 2 des résultats)

x	−4	−2	0	1	1,5	1	2,5	3	4	5
$f(x)$										

5 - Construis (C) sur l'intervalle [− 2 ; 2].

7 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). On désigne par (C) la courbe représentative graphique de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{2x^2-3x-2}{x-1}$.

1. a) Détermine l'ensemble de définition de f.
   b) Calcule $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} f(x)$ puis interprète graphiquement ces résultats.
2. a) Calcule les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
   b) Démontre que la droite (D) d'équation $y = 2x - 1$ est une asymptote oblique à (C) en $-\infty$ et en $+\infty$.
   c) Étudie la position relative de (C) et (D).
3. a) Détermine la fonction dérivée f' de f.
   b) Étudie le signe de f' et déduis-en le sens de variation de f.
   c) Dresse le tableau de variation de f.
4. Démontre que le point A (1 ; 1) est un centre de symétrie de la courbe (C).
5. Détermine les coordonnées des points communs à la courbe (C) et la droite (OI).
6. Construis (D) et (C).

SPÉCIMEN

8 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). On désigne par (C) la représentation graphique de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{-x^2+4x+13}{x-2}$

p est la fonction polynôme définie par :
$p(x) = -x^2 + 4x + 5$.

Partie A

1. Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation : $p(x) = 0$.
2. Justifie que :
   - $p(x) < 0$ si $x \in]-\infty ; 1[\cup]5 ; +\infty[$
   - $p(x) > 0$ si $x \in]1 ; 5[$

Partie B

1. Détermine l'ensemble de définition de f.
2. a) Calcule $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x)$ puis interprète graphiquement ces résultats.
   b) Calcule les limites suivantes :
   $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
3. Démontre que pour tout nombre réel x élément de D_f, on a : $f'(x) = \dfrac{p(x)}{(x-2)^2}$.
4. Étudie les variations de f puis dresse son tableau de variation.
5. a) Détermine trois nombres réels a, b et c tels que : pour tout nombre réel x de D_f,
   $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-2}$
   b) Démontre que la droite (D) d'équation $y = -x + 2$ est une asymptote oblique à (C) en $-\infty$ et en $+\infty$.
   c) Étudie la position relative de (C) et (D).
6. Démontre que le point A(2 ; 0) est un centre de symétrie de (C).
7. Construis (D) et (C).

SPECIMEN

9 On considère la fonction f définie par :
$f(x)=\dfrac{ax+2}{2x+1}$, a étant un nombre réel.

1. Détermine a pour que la courbe représentative (C) de f admette au point d'abscisse 0 une tangente parallèle à la droite d'équation : $y=-5x+2$.
2. Dresse le tableau de variation de f pour $a=-1$.

10 On considère la fonction f dérivable et définie sur R\{1} par : $f(x)=\dfrac{x^2+ax+b}{x-1}$, a et b étant deux nombres réels.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

1. Détermine a et b pour que la courbe représentative (C) de f admette au point de coordonnées
(−3 ;1), une tangente horizontale.
2. Dresse le tableau de variation de f.
3. Trace (C) dans le repère (O, I, J).

11 Soit la fonction numérique f de la variable réelle x définie par : $f(x)=\dfrac{x^2-2x+3}{2x(x-2)}$,

(C) est la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

1. a) Détermine l'ensemble de définition D_f de f.
b) Calcule les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
c) Détermine les asymptotes à (C).
2. Calcule $f'(x)$.
3. a) Étudie les variations de f.
b) Dresse le tableau de variation de f.
4. Représente graphiquement la courbe (C) dans le repère (O, I, J) .

SPÉCIMEN

12 Une entreprise fabrique et vend des téléphones portables. Sa capacité journalière de production est comprise entre 0 et 18 portables. On suppose que toute la production est vendue . Le coût de production en milliers de francs de x téléphones portables est donné par:

$C(x) = x^3 - 25x^2 + 280x + 400$.

La recette de la vente de x téléphones portables est $R(x) = 480\,x - 20\,x^2$.

L'entreprise veut réaliser un bénéfice maximal. En tant que stagiaire dans cette entreprise, le Directeur te demande de déterminer le nombre de téléphones portables à produire par jour pour que le bénéfice soit maximal. Propose une solution au Directeur.

13 Pendant les vacances, tu travailles dans une société de fabrication de parapluie en zone industrielle à Abidjan. Cette société fabrique chaque jour x parapluies avec $x \in [0 ; 60]$. Le coût total de production de ces parapluies, exprimé en milliers de francs, est donné par : $f(x) = x^2 - 81x$.



Chaque parapluie fabriqué est vendu au prix unitaire de 3 000 francs. Toute la production est vendue le même jour. Pour plus d'efficacité, l'entreprise veut réaliser un bénéfice maximal mais ne sait pas quelle quantité de parapluie elle doit fabriquer pour réaliser ce bénéfice maximal.

Elle te sollicite à cet effet. Donne une solution argumentée aux préoccupations de l'entreprise.

NB : bénéfice = prix de vente - coût de production

SPÉCIMEN

2 PROBABILITÉ

Tableau des habiletés et contenus

HABILETÉS	CONTENUS
CONNAÎTRE	la définition de la probabilité d'un évènement dans l'hypothèse d'équiprobabilité - le vocabulaire de la probabilité : • éventualité, univers, évènement • évènement élémentaire • évènement impossible • évènement certain • évènements incompatibles • évènements contraires • évènement « A et B » • évènement « A ou B » - la propriété relative à la probabilité d'un évènement connaissant la probabilité de l'événement contraire - la propriété relative à la probabilité de l'événement « A ou B » - la définition d'une variable aléatoire **(série A1)** - la loi de probabilité **(série A1)** - l'espérance mathématique, la variance et l'écart type d'une variable aléatoire **(série A1)**
ECRIRE	- un évènement comme intersection de deux évènements - un évènement comme réunion de deux évènements
DÉTERMINER	- la loi de probabilité d'une variable aléatoire **(série A1)**
CALCULER	- la probabilité d'un évènement dans l'hypothèse d'équiprobabilité - la probabilité d'un évènement connaissant la probabilité de l'événement contraire - l'une des probabilités suivantes connaissant les trois autres : $p(A \cup B)$, $p(A)$, $p(B)$, $p(A \cap B)$ - l'espérance mathématique, la variance et l'écart type d'une variable aléatoire **(série A1)**
INTERPRÉTER	- l'espérance mathématique d'une variable aléatoire (Gain moyen, jeu équitable) (série A1)
TRAITER UNE SITUATION	faisant appel à la probabilité

Situation d'apprentissage

Lors d'une kermesse organisée dans une école, le jeu suivant est proposé aux visiteurs.
« On lance deux fois de suite un dé cubique parfaitement équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
Si le nombre 4 apparait, le joueur gagne 1 000 F. Si le chiffre 1 apparait, le joueur perd 1 000 F. Dans tous les autres cas, le joueur ne gagne ni ne perd rien. »
Des élèves d'une classe de terminale A de passage à la kermesse ont pris connaissance du jeu. L'un d'eux affirme que ce jeu n'est pas favorable au joueur. De retour en classe, ces élèves font des calculs pour vérifier cette affirmation.



SPÉCIMEN

1 PROBABILITÉ

Définition d'une expérience aléatoire

Une expérience est dite aléatoire lorsqu'elle vérifie les trois conditions suivantes :
- elle conduit à plusieurs issues possibles qu'on peut parfaitement décrire par avance ;
- aucune issue n'est prévisible ;
- cette expérience est reproductible dans les mêmes conditions.



1 On lance une pièce de monnaie et on lit le nombre apparu sur la face supérieure.

Cette expérience est aléatoire car :

- Il y a deux résultats possibles : pile (P) et face (F) ;
- On ne peut prévoir le résultat ;
- On peut refaire plusieurs fois cette expérience dans les mêmes conditions.

2

Tirer une boule d'une urne qui contient 10 boules dont trois rouges et sept vertes. Les trois rouges sont rugueuses et les autres lisses et noter sa couleur.

Cette expérience n'est pas aléatoire car :

On peut prévoir les résultats en touchant les boules dans l'urne.

3

Tirer une boule d'une urne qui contient 10 boules de couleur et numérotées : 2 blanches B1 et B2 ; 3 rouges, R1, R2 et R3 et 5 vertes V1, V2, V3, V4, V5 indiscernables au toucher et noter sa couleur.

Cette expérience est aléatoire car :

- On connait tous ces résultats possibles : 2 blanches B1 et B2 ; 3 rouges, R1, R2 et R3 et 5 vertes V1, V2, V3, V4, V5 ;
- On ne peut prévoir aucun de ces résultats car les boules ont sont indiscernables au toucher ;
- On peut refaire plusieurs fois cette expérience dans les mêmes conditions.

Exercice de fixation

1 Réponds par vrai ou par faux si les expériences proposées sont aléatoires.

N°	Expérience	Vrai/faux
1	Lancer une pièce de monnaie à pile ou face et noter la face supérieure	
2	Tirer au hasard une boule d'une urne contenant quatre boules de couleurs rouge, bleue, jaune et noire ; et noter la couleur de la boule tirée	
3	Tirer au hasard une boule d'une urne contenant quatre boules de couleurs différentes et noter la couleur	
4	Lancer un dé cubique à six (6) faces numérotées de 1 à 6 et noter le nombre apparu sur la face supérieure.	

2 Parmi les trois expériences suivantes, identifie celles qui sont aléatoires. Justifie tes réponses

Expérience A

On tire au hasard une boule d'une urne qui contient 3 boules rouges numérotées R1, R2, R3 et 1 boule noire indiscernables N au toucher. On note la couleur de la boule tirée.

Expérience B

On tire au hasard une boule dans une urne qui contient 4 boules rouges. On note la couleur de la boule tirée.

Expérience C

On tire au hasard une boule dans une urne qui contient 4 boules de couleurs différentes. On note la couleur de la boule tirée.

SPÉCIMEN

2- VOCABULAIRE DES PROBABILITÉS

2-1) Éventualité

Définition

Une issue possible d'une expérience aléatoire est appelée résultat de l'expérience ou éventualité.



1 Dans l'expérience A, tirer une boule rouge est une éventualité

2

Lancer un dé cubique parfaitement équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 constitue une expérience aléatoire.
Les nombres 5 et 2 sont des résultats possibles.
En revanche 8 n'est pas un résultat possible.
L'univers Ω est composé comme suit :
Ω = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6}.

Exercice de fixation

3 On considère le lancer d'un dé cubique à 6 faces numérotées de 1 à 6 et l'apparition d'un nombre sur la face supérieure.
Cite trois éventualités liées à cette expérience.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

2-2) Univers

Définition

On appelle univers d'une expérience aléatoire, l'ensemble de toutes les éventualités liées à cette expérience.

Dans toute la suite l'univers de l'expérience sera noté Ω. On supposera que Ω est fini et non vide.



1 En considérant l'expérience ci-dessus du lancer de dé,

- L'univers de cette expérience est : Ω = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6}.
- L'ensemble {2 ; 4 ; 6} est un évènement.

2

Tirer une carte dans un jeu de 52 cartes (pas de joker) est une expérience aléatoire.
Il y a deux couleurs, rouge et noir et quatre familles : Carreau, Coeur, Pique et Trêfle et il y a des numéros de 1 à 10 et des figures : Valets, Dames et Rois.

- Il y a 52 issues possibles ;
- L'univers W de l'expérience contient les 52 cartes ;
- A = « tirer est un As » est un événement qui contient 4 issues ;

Exercice de fixation

4 On considère le lancer d'un dé cubique à 6 faces numérotées de 1 à 6 et on note le nombre apparu sur la face supérieure.
Détermine l'univers de cette expérience aléatoire.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

5 On tire une carte d'un jeu de 52 cartes (pas de joker).
L'événement F « tirer est une figure » contient 12 issues ;
L'événement T = « tirer est un Trêfle » contient 13 issues.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

SPÉCIMEN

2-3) Évènement

Définition

On appelle évènement tout sous-ensemble de l'univers d'une expérience aléatoire.

Exercice de fixation

6 On considère le lancer d'un dé cubique à 6 faces numérotées de 1 à 6 et on note le nombre lu sur la face supérieure.

1. Détermine l'évènement « le nombre lu est pair »
2. Détermine l'évènement « le nombre lu est plus grand que 6 »
3. Détermine l'évènement « le nombre lu est inférieur à 7 »

3 - VOCABULAIRE ENSEMBLISTE, VOCABULAIRE PROBABILISTE

Ω est l'univers d'une expérience aléatoire. A et B deux évènements de Ω.

Vocabulaire ensembliste	Vocabulaire probabiliste	Signification	Notation
Singleton	Évènement élémentaire	Ensemble formé d'un résultat	{ω}
Ensemble vide	Évènement impossible	Ensemble des résultats qui ne peuvent se réaliser	∅
Partie pleine	Évènement certain	Ensemble de tous les résultats	Ω
Complémentaire d'un sous-ensemble	Evènement contraire d'un évènement	Ensemble de tous les résultats qui ne sont pas favorables à l'évènement donné	
Intersection de deux sous-ensembles A et B	L' évènement « A et B »	Ensemble des éventualités favorables à A et à B.	$A \cap B$
Réunion de deux sous-ensembles A et B	L' évènement « A ou B »	Ensemble des éventualités favorables à A ou à B.	$A \cup B$
Sous-ensembles disjoints A et B	Évènements incompatibles	L' évènement « A et B » est impossible	$A \cap B = \emptyset$



En considérant l'expérience ci-dessus du lancer de dé, l'évènement contraire de l'évènement A : « Obtenir un chiffre pair » est l'évènement $\overline{A}$: « On obtenir un chiffre impair » .

Exercice de fixation

7 On considère le lancer d'un dé cubique à 6 faces numérotées de 1 à 6 et on note le nombre lu sur la face supérieure.

1. Donne en extension l'univers Ω lié à cette expérience aléatoire.
2. Cite trois évènements élémentaires liés à cette expérience aléatoire.
3. On considère l'évènement A : « Le nombre lu est impair ». Donne l'évènement contraire de A.
4. On considère les évènements B : «le nombre lu est inférieur à 5 » et C : « le nombre lu est supérieur à 2 »
   a) Détermine l'évènement « A ou B ».
   b) Détermine l'évènement « A et B ».
5. Cite deux évènements incompatibles.

SPECIMEN

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

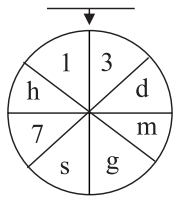
.....

.....

.....

.....

8 On considère la roue ci-contre. Les angles des secteurs sont de même mesure.



On tourne la roue et on s'intéresse au nombre ou lettre indexé(e).
L'index indique un(e) seul(e) nombre ou lettre.
A chacune des affirmations contenues dans la première colonne du tableau, réponds dans la seconde colonne par vrai ou par faux

N°	AFFIRMATIONS	REPONSE
1	L'univers Ω de cette expérience est Ω = {1 ; 2 ; d ; h ; m ; 7 ; s ; g}	
2	L'évènement « indexer une voyelle » est un évènement impossible	
3	Les évènements « indexer une voyelle » et « indexer un nombre » sont contraires	
4	Les évènements « indexer une lettre » et « indexer un nombre » sont deux événements incompatibles.	

4- PROBABILITÉ D'UN ÉVÈNEMENT

Définition

Dans une expérience aléatoire, la probabilité d'un évènement est le quotient qui exprime « la chance » qu'a cet événement de se réaliser.



Notation:
La probabilité de l'évènement A est notée P(A).

5- EVÈNEMENTS ÉLÉMENTAIRES ÉQUIPROBABLES

Définition

Des évènements élémentaires d'une expérience aléatoire sont dits équiprobables s'ils ont la même probabilité. On dit qu'on a une situation d'équiprobabilité.

Exercice de fixation

9 Réponds par vrai ou par faux si on a une situation d'équiprobabilité.

N°	Expériences	Vrai/faux
1	Lancer une pièce de monnaie à pile ou face et noter la face supérieure	
2	Tirer au hasard une boule d'une urne contenant quatre boules de couleurs rouge, bleue, jaune et noire ; on note la couleur de la boule tirée	
3	Tirer au hasard une boule d'une urne contenant cinq boules. Deux sont de couleur rouge, trois de couleur noire ; et noter la couleur de la boule tirée	
4	Lancer un dé cubique à six (6) faces numérotées de 1 à 6 et noter le nombre apparu sur la face supérieure.	

Propriété 1

Soit une expérience aléatoire conduisant à N éventualités. Dans une situation équiprobabilité, la probabilité d'un évènement élémentaire est égale à $\frac{1}{N}$.

SPECIMEN



Un lancer d'un dé non truqué ou équilibré est une situation d'équiprobabilité.
On lance un dé équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on lit le chiffre apparu sur la face supérieure. L'univers Ω de l'expérience est : {1 ; 2 ; 4 ; 4 ; 5 ; 6}.
La probabilité d'obtenir n'importe qu'elle face est de $\frac{1}{6}$.

Exercices de fixation

10 L'expérience aléatoire est le lancer d'une pièce de monnaie à pile ou face et on note la face supérieure. Détermine la probabilité d'obtenir pile sur la face supérieure.

11 Le tirage au hasard d'une boule d'une urne contenant quatre boules de couleurs rouge, bleue, jaune et noire ; on note la couleur de la boule tirée.
Détermine la probabilité d'un évènement élémentaire.

Propriété 2

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire. A et B deux évènements liés à cette expérience aléatoire.
On a : P(Ω) = 1
Si A et B sont deux évènements incompatibles, alors P(A ∪ B) = P(A) + P(B).

Conséquences

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire. A et B deux évènements de Ω.
- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\emptyset) = 0$
- $P(A) = 1 - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- La probabilité d'un évènement est égale à la somme des probabilités des évènements élémentaires qui le compose.

Propriété 1

Dans une situation d'équiprobabilité d'univers Ω, la probabilité d'un évènement A est égale à $\frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$.

Remarque

Dans l'hypothèse d'équiprobabilité, le calcul de probabilité se ramène à un problème de dénombrement.



1 Dans une assemblée de 250 personnes, il y a 120 hommes qui portent la cravate, 85 hommes qui ont les yeux bleus, dont 50 portent la cravate. On discute avec une personne choisie au hasard dans cette assemblée.

1. Calculons la probabilité que ce soit un homme portant la cravate.
2. Calculons la probabilité que ce soit un homme aux yeux bleus et portant la cravate.

• 1) L'univers Ω de l'expérience est constitué des 250 personnes de l'assemblée. Il faut trouver une probabilité qui modélise cette expérience aléatoire. Dans le texte, le choix d'une personne au hasard indique qu'il y a une situation d'équiprobabilité.
Soit C l'évènement : « La personne choisie porte la cravate ». La probabilité de C est : $\frac{\text{card (C)}}{\text{card (Ω)}}$.

SPÉCIMEN

Or : card(Ω) = 250 et card(C) = 120 ; donc :
$P(C) = \frac{120}{250}$; c'est-à-dire : $P(C) = \frac{12}{25}$.

• 2) Soit B l'évènement : « La personne choisie a les yeux bleus ». L'évènement : « La personne choisie est un homme aux yeux bleus qui porte la cravate » est B∩C. La probabilité de B∩C est : $\frac{\text{card}(B \cap C)}{\text{card}(\Omega)}$.
Or : card(Ω) = 250 et card(B∩C) = 50 ; donc :
$P(B \cap C) = \frac{50}{250}$; c'est-à-dire : $P(B \cap C) = \frac{1}{5}$.

2 On tire simultanément et hasard 5 cartes d'un jeu de 32 cartes.
Calculons la probabilité de tirer 2 carreaux et 3 piques.

L'univers Ω de l'expérience est constitué de tous les tirages possibles de 5 cartes parmi 32. Le nombre de cas possibles est C_{32}^{5} , c'est-à-dire : 201376.
Le choix des cartes se faisant au hasard, on est en situation d'équiprobabilité. Soit A l'évènement « Tirer 2 carreaux et 3 piques ».
La probabilité de A est : $\frac{\text{card (A)}}{\text{card (}\Omega\text{)}}$.
Un cas (une éventualité) est favorable à la réalisation de A si on tire 2 carreaux parmi 8 puis 3 piques parmi 8. Le nombre de cas favorables à la réalisation de A est $C_8^2 \times C_8^3$.
On a card(A) = 1568. On en déduit que :
$P(A) = \frac{1568}{201376}$.

Exercices de fixation

12 On tire au hasard et simultanément deux boules d'une urne contenant dix boules dont trois sont de couleur rouge, deux de couleur bleue, quatre de couleur jaune et une de couleur noire ; on note la couleur de la boule tirée.
Soit A l'évènement « tirer deux boules de couleurs différentes »
B l'évènement « tirer deux boules de même couleur »
C l'évènement « tirer deux boules de couleur rouge »
D l'évènement « tirer une boule rouge et une boule bleue ».
Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes.

N°	Affirmation	Vrai/ faux
1	La probabilité de A est égale à 2	
2	La probabilité de B est inférieure ou égale à 1	
3	La réalisation de C entraine celle de B	
4	La probabilité de D est égale à $\frac{1}{2}$	

13 On lance un dé parfaitement équilibré (non pipé ou truqué).
Soit B l'événement : « Sur la face supérieure apparaît un nombre pair ».
Calcule la probabilité de réalisation de l'événement B.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

14 On tire simultanément et hasard 5 cartes d'un jeu de 32 cartes.
1. Calcule la probabilité de tirer 2 carreaux et 3 trèfles.
2. Calcule la probabilité de tirer 2 rois et 3 piques.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

SPECIMEN

15 On a mélangé dans un sac 70 chocolats noirs et 45 chocolats blancs. On tire au hasard un chocolat et on note sa couleur.
Calcule la probabilité de l'évènement N « tirer un chocolat blancs ».

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

16 Dans un sac, il y a des boules rouges et des boules vertes. On tire au hasard une boule et on note sa couleur. On sait que la probabilité de tirer une boule rouge est $\frac{2}{5}$.
Calcule, la probabilité de tirer une boule verte.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

17 On considère deux évènements A et B tels que : P(A) = 0,45 ; P(B) = 0,6 et P(A∩B) = 0,57.
Calcule P(A∪B).

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

SÉRIE A1 UNIQUEMENT

2 VARIABLE ALÉATOIRE

Définition

On considère une expérience aléatoire d'univers Ω. On appelle variable aléatoire toute application de Ω dans ℝ.



On lance trois fois de suite une pièce de monnaie. On peut définir une variable aléatoire X égale exactement au nombre de faces obtenues suite à ces trois lancers.
X peut prendre les valeurs : {0 ; 1 ; 2 ; 3}.
(X= 0) est l'événement « ne pas obtenir de face au cours de ces trois lancers.

Exercice de fixation

18 On lance une pièce de monnaie à pile (P) ou face (F) et on note la face supérieure.
Réponds par vrai par faux si la relation X est une variable aléatoire.

	Relation	Vrai/faux
1	X est la relation de Ω dans ℝ, telle que X(P) = 2 et X(F) = − 6	
2	X est la relation de Ω dans ℝ, telle que : X(P) = 2 et F n'a pas d'image par X.	
3	X est la relation de Ω dans ℝ, telle que X(P) =12 et X(F) = 12	



Notation:
Soit X une variable aléatoire et *a* un nombre réel.
(X= *a*) est l'évènement {ω ∈ Ω tel que : X(ω) = a}.
On dit que X prend la valeur *a*.

Exercice de fixation

19 On lance un dé cubique à six (6) faces numérotées de 1 à 6 et on note le nombre apparu sur la face supérieure. Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur 1 si le nombre lu est pair, −2 si le nombre lu est 5 et 0 sinon.
Écris en extension chacun des évènements suivants :
a) (X= 1) ; b) (X = 0) ; c) (X = − 2)

SPÉCIMEN

3 LOI DE PROBABILITÉ D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE

Définition

Lorsqu'à chaque valeur x_i prise par une variable aléatoire X, on associe la probabilité p_i de l'évènement $(X = x_i)$, on dit que l'on a défini la loi de probabilité de X.

Remarque 1

La donnée de toutes les valeurs x_i prises par X et des probabilités p_i, détermine entièrement la loi de probabilité de X.
Cela se résume dans le tableau suivant :

x_i	x_1	x_2	…	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2		p_n

Remarque 2

On a : $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$



Dans le cas de l'exemple précédent, l'univers Ω est un triplet de l'ensemble {F ; P} le cardinal de l'univers Ω est : $2^3 = 8$.
La loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Exercice de fixation

20 On lance un dé cubique à six (6) faces numérotées de 1 à 6 et on note le nombre apparu sur la face supérieure. Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur 1 si le nombre lu est pair, −2 si le nombre lu est 5 et 0 sinon.
Détermine la loi de probabilité de X.

4 ESPÉRANCE MATHÉMATIQUE D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE

Définition

Soit X la variable aléatoire de loi de probabilité :

x_i	x_1	x_2	…	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2		p_n

On appelle espérance mathématique ou moyenne de X, le nombre réel noté E(X) défini par :
$x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n$.

Dans l'exemple précèdent,

$E(X) = 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8}$



$E(X) = 1{,}5$.

Exercice de fixation

21 La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau ci-dessous :

x_i	−2	1	6	9	10	14
$P(X = x_i)$	0,1	0,5	0,07	0,06	0,08	0,19

Calcule l'espérance mathématique de X

SPECIMEN

Variance et écart-type

Soit X la variable aléatoire de loi de probabilité :

x_i	x_1	x_2	…	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2		p_n

Définition

• On appelle variance de X, le nombre réel positif ou nul noté V(X) défini par :

$(x_1 - E(X))^2 p_1 + (x_2 - E(X))^2 p_2 + \ldots + (x_n - E(X))^2 p_n$

• On appelle écart-type de X, le nombre réel positif ou nul noté σ (X) défini par : $\sqrt{V(X)}$

Remarque

$V'(X) = x_1^2\, p_1 + x_2^2\, p_2 + \ldots + x_n^2\, p_n - [E(X)]^2$.
On a écrit aussi : $V'(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$



Dans l'exemple précédent,

$V(X) = (0^2 \times \frac{1}{8} + 1^2 \times \frac{3}{8} + 2^2 \times \frac{3}{8} + 3^2 \times \frac{1}{8}) - (1{,}5)^2$

$V(X) = 0{,}75$.

Exercice de fixation

22 La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau ci-dessous :

x_i	−2	1	6	9	10	14
$P(X = x_i)$	0,1	0,5	0,07	0,06	0,08	0,19

E(X) = 4,72
Calcule V(X) et σ(X).

SPÉCIMEN

1 Dans une classe de terminale A, il y a 30 élèves : 12 garçons et 18 filles. Chaque lundi matin, cette classe a seulement trois matières. Ces matières sont : la philosophie, les mathématiques et le français dans cet ordre.
A la fin de chaque cours de lundi, le professeur de la discipline désigne au hasard un élève pour faire la synthèse de la séance de leçon.
On admettra que pour chaque cours les élèves ont la même chance d'être désignés.

1. Calcule le nombre de manières possibles de désigner trois élèves le lundi.
2. Calcule la probabilité qu'au moins une fille soit désignée pour faire la synthèse de l'une des leçons.
3. Calcule la probabilité que mademoiselle Konan soit désignée pour faire la synthèse de l'une des leçons.

2 Deux maladies M_1 et M_2 sévissent parmi une population donnée.
On rencontre au hasard un individu de cette population.
On désigne par A l'événement : " l'individu est atteint de la maladie M_1" et par B l'évènement : " l'individu est atteint de la maladie M_2 " .
Définis par une phrase chacun des événements suivants : $A \cup B$; $A \cap B$.

3 Le conseil d'Enseignement d'EPS de ton établissement a organisé une enquête auprès de 350 élèves de terminale. Cette enquête porte sur la pratique du football, du basket-ball et du rugby. Les résultats sont les suivants :
161 élèves pratiquent le football ; 145 pratiquent le basket-ball; 131 pratiquent le rugby ; 10 pratiquent à la fois les trois sports, 48 élèves pratiquent à la fois le basket et le rugby et enfin 27 élèves pratiquent à la fois le football et le rugby, 22 élèves pratiquent à la fois le football et le basket-ball.
On choisit au hasard un élève parmi les élèves enquêtés.
Calcule la probabilité pour qu'il pratique :

1. Uniquement le football.
2. Uniquement le rugby.
3. A la fois le football et le rugby mais pas le basket-ball.
4. Au moins deux sports.

SPÉCIMEN

4 Le club de santé d'un lycée comporte 15 membres répartis selon les promotions comme suit :
4 membres en 6e dont 3 filles ;
3 membres en 5e dont 2 filles ;
2 membres en 4e dont une fille;
4 membres en 2nde dont une fille ;
2 membres en 1ère tous des garçons.
Le bureau du club issu des membres comporte : un président, un trésorier et un secrétaire .
Pour des missions de sensibilisation, le club envoie sur le terrain un comité de 5 membres pris au hasard parmi les membres. On admet que tous les membres ont la même chance de faire partie du comité.

1. Détermine le nombre de façons de former ce bureau
2. Calcule la probabilité de l'évènement : A
« le comité comporte un membre de chaque promotion ».
3. Calcule la probabilité de l'évènement : B
« le bureau comporte exactement deux membres de la 6^{e} ».
4. Calcule la probabilité de l'évènement : C
« le bureau comporte au moins un membre de la 2de ».
5. Calcule la probabilité de l'évènement : D
« le bureau est composé uniquement de filles ».
6. Calcule la probabilité de l'évènement : E
« le bureau comporte au moins un garçon ».

5 Lors de la dernière édition de la journée mondiale des lépreux, une municipalité a organisé la vente de 200 timbres numérotés différemment. Parmi ces 200 timbres, seuls 3 sont gagnants et donnent droit chacun à un lot.
Les numéros gagnants sont tirés au sort dans la soirée lors d'un gala de bienfaisance.
Une personne a acheté 5 timbres.

1. Calcule la probabilité qu'elle gagne un lot et un seulement
2. Calcule la probabilité qu'elle gagne deux lots et deux seulement
3. Calcule la probabilité qu'elle gagne les trois lots

SPÉCIMEN

(A_1 seulement)

4. On note X la variable aléatoire qui, à tout achat de 5 timbres, associe le nombre de lots gagnés.

Détermine la loi de probabilité de X, puis calcule l'espérance mathématique de X.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

6 On tire au hasard et simultanément deux cartes dans un jeu de 32 cartes.
On considère les évènements R: « Tirer 2 rois» et C: « Tirer deux cœurs »
Réponds par vrai (V) ou par faux (F) à chacune des affirmations.

L'univers associé à cette expérience est l'ensemble des 32 cartes	
La cardinal de l'univers est 496	
$P(R) = \frac{1}{4}$	
L'univers de cette expérience aléatoire est l'ensemble des paires de cartes prises parmi les 32 cartes	
Le cardinal de l'univers est C_{32}^{2}	
$P(C) = \frac{7}{124}$	
R et C sont incompatibles, donc $P(R \cup C) = \frac{17}{248}$	

7 Un téléphone portable est muni de deux puces de deux réseaux différents. On s'intéresse à la défaillance de l'un ou l'autre des réseaux.
On considère les événements A :« Le réseau de la première puce est défaillant » et l'évènement B : « le réseau de la deuxième puce est défaillant ».
Des essais ont montré que $p(A) = 0,12$; $P(B) = 0,18$ et $P(A \cap B) = 0,07$
Réponds par vrai (V) ou par faux (F) à chacune des affirmations.

Les évènements A et B sont incompatibles	
La probabilité de l'évènement « au moins un des deux réseaux est défaillant » est 0,15	
La probabilité de l'évènement « les deux réseaux fonctionnent» est 0,7	

(A_1 seulement)

8 Un jeu consiste à tirer successivement et sans remise trois jetons d'un sac contenant 4 jetons bleus, 3 jetons verts et 1 jeton rose, tous indiscernables au toucher.
On note X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de jetons verts
obtenus. Pour chaque affirmation, une seule réponse est exacte. Entoure la.

1. Le cardinal de l'univers est :
   a) 8^3 b) C_8^3 c) A_8^3
2. La probabilité d'obtenir 3 jetons de même couleur est égale à :
   a) $\frac{1}{14}$ b) $\frac{1}{56}$ c) $\frac{5}{56}$
3. Les valeurs prises par X sont :
   a) 1 ; 2 ; 3 ;
   b) 0 ; 1 ; 2 ; 3 ;
   c) 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4.
4. La loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

a)

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	$\frac{21}{56}$	$\frac{19}{56}$	$\frac{17}{56}$	$\frac{1}{56}$

b)

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	$\frac{10}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{1}{56}$

SPÉCIMEN

9 On considère l'univers
U = {2 ; 3 ; 7 ; 4 ; 5 ; 9 ; 10} et les évènements A, B et C suivants de cet univers :
A = {5 ; 10 ; 4 ; 9 }, B = {2 ; 3 ; 7 } et C = {2 ; 3 ; 5 }.
On suppose une situation d'équiprobabilité .

1. a) Justifie que les évènements A et B sont incompatibles.
   b) Les évènements B et C sont-il incompatibles ? Justifie votre réponse.
2. Calcule la probabilité de chacun des évènements suivants : A ; B, A ∪ B, A∩B, C∪B et C∩B.

10 Le tableau suivant donne la répartition de 150 stagiaires d'un centre de formation en fonction de la formation reçue et de l'activité sportive choisie :

	football	Handball	Natation	Total
Mécanique auto	45	18	27	90
Bâtiment	33	9	18	60
Total	78	27	45	150

On choisi au hasard un stagiaire

1. Calcule la probabilité de l'évènement A « le stagiaire fait une formation en mécanique auto »
2. Calcule la probabilité de l'évènement B « le stagiaire fait une formation en mécanique auto et pratique la natation »
3. Calcule la probabilité de l'évènement C « le stagiaire pratique le football ou le handball »

11 Une banque délivre des cartes magnétiques à ses clients. Avec sa carte, un client peut faire un retrait d'un guichet automatique en composant son code secret qui lui a été communiqué par la banque. Chaque code secret est un nombre de quatre chiffres.
Ton oncle a son compte domicilié dans cette banque. Pour les vacances de Noël, il veut retirer de l'argent avec sa carte pour t'acheter un cadeau mais il a oublié son code secret. Il se rappelle que le code secret contient les 4 chiffres 2; 4; 5 et 8 mais il a oublié l'ordre des chiffres. Il a droit à trois essais.
Calcule la probabilité que tu aies ton cadeau de Noël.

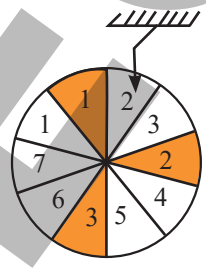
SPECIMEN

12 Une urne contient 5 boules blanches numérotées de 1 à 5, 4 boules rouges numérotées de 1 à 4 et 2 boules noires numérotées de 1 à 2 indiscernables au toucher.
On tire au hasard successivement trois boules de l'urne avec remise dans l'urne.

1. Calcule le nombre de cas possibles.
2. Calcule la probabilité des évènements suivants :
   A : « Les trois boules sont de même couleur ».
   B : « l'une au moins des trois boules tirées est blanche ».
   C : « les trois boules tirées sont de couleurs différentes ».

(A1 seulement)

13 On considère le jeu suivant :
Une roue est divisée en dix secteurs de même mesure comme l'indique la figure ci-dessous. La roue a trois secteurs hachurés et numérotés 1 ; 2; 3 et sept secteurs blancs numéroté 1 ; 2 ;3 ;4 ;5 ;6 ;7



On fait tourner la roue autour de son axe et lorsqu'elle s'arrête, on observe le secteur placé sous la flèche.

- lorsque la roue s'arrête sur le 1 ou le 3 du secteur hachuré le joueur gagne 1 500 Frs
- lorsque la roue s'arrête sur le numéro 7, le joueur gagne 2 000 Frs
- lorsque la roue s'arrête sur l'un des numéros 1 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 des secteurs blancs, le joueur ne gagne rien
- lorsque la roue s'arrête sur le 2 du secteur hachuré ou blanc le joueur gagne 500 Frs

1. Écris en extension l'univers lié à l'expérience.
2. On désigne par X l'application de E dans $\mathbb{R}$ qui, à chaque élément de E, associe le gain du joueur.
   a) Détermine l'ensemble des valeurs prises par X
   b) Détermine la loi de probabilité de X
3. Calcule l'espérance mathématique de X et interprète le résultat obtenu.

14 Une urne contient 3 boules blanches indiscernables au toucher, 3 boules rouges et 2 boules noires.
On tire simultanément trois boules et on observe les couleurs des boules tirées.

1. Calcule le nombre de tirages possibles.
2. Calcule la probabilité de tirer 3 boules de même couleur.
3. Calcule la probabilité d'obtenir aucune boule blanche.
4. On désigne par X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules blanches tirées.

(Série A1 seulement)

a) Écris l'ensemble des valeurs prises par X.
b) Détermine la loi de probabilité de la variable X.
c) Calcule l'espérance mathématique de X et interprète le résultat obtenu.

SPECIMEN

15 Un professeur de mathématiques a donné à ses élèves de Terminale A une interrogation écrite qui comporte quatre questions. Pour chaque question, deux réponses sont proposées : l'une juste et l'autre fausse, et l'élève doit choisir une parmi les deux. Chaque réponse juste rapporte 5 points et chaque réponse fausse enlève 3 points. L'absence de réponse ne rapporte ni ne retranche de points. Si le total des points est négatif, la note est 0 sur 20.

Après la composition, un élève dit à ses camarades de classe qu'il n'a rien appris et qu'il a répondu au hasard à chacune des quatre questions.

Un des camarades affirme que cet élève a plus de chance d'avoir tous les résultats faux que d'avoir au moins une réponse juste. Un deuxième prétend qu'avec le barème donné par le professeur, en moyenne chaque élève aura une note supérieure à 10.

N'étant pas convaincu de ces affirmations, tu décides de vérifier par le calcul.

A l'aide de tes connaissances, vérifie l'affirmation de chacun des élèves

16 Un jeu de "pile ou face " consiste à lancer plusieurs fois de suite une pièce de monnaie et à noter le nombre de "faces" obtenu à l'issu des lancers.

L'organisateur du jeu te propose deux options.

Option 1 : tu lances trois fois de suite la pièce de monnaie. Tu ne gagnes que si tu obtiens exactement deux fois "face" à l'issu des trois lancers.

Option 2 : tu lances quatre fois de suite la pièce de monnaie. Tu ne gagnes que si tu obtiens au moins trois fois "face" à l'issu des quatre lancers.

Avant ta participation au jeu, tu décides de te retirer pour réfléchir à l'option susceptible de te permettre d'avoir le plus de chance de gagner.

Détermine cette option en basant ton raisonnement sur tes connaissances mathématiques.

SPÉCIMEN

EXEMPLE DE DEVOIR DE NIVEAU



1re TRIMESTRE

SPÉCIMEN

DEVOIR DE NIVEAU 1

Durée : 2h (A2) ; 3h(A1)

SPÉCIMEN

Exercice 1

Réponds par Vrai et par faux à chacune des affirmations suivantes.

1) Si une fonction est dérivable et décroissante sur un intervalle I, alors on est sûr que sa fonction dérivée est négative sur cet intervalle .

2) Si les fonctions f et g sont croissantes sur un intervalle I, alors la fonction $f+g$ est croissante sur I.

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2-x+1}{x-1}=+\infty$.

Exercice 2

A l'occasion d'un sondage, une enquête portant sur 300 élèves de Terminale du Lycée Pythalès à Mathville a montré que :

- 200 de ces élèves pratiquent un sport ;
- 180 jouent d'un instrument de musique ;
- 60 ne pratiquent ni sport ni ne joue à aucun instrument de musique;

On choisit au hasard un élève parmi les 300 sondés.

Choisis la bonne réponse.

		A	B	C
1	La probabilité que cet élève pratique un sport et ne joue pas d'un instrument de musique est	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$
2	La probabilité que cet élève joue de la musique mais ne pratique pas de sport est	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{15}$
3	La probabilité que cet élève pratique sport et musique est	$\frac{4}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{8}{15}$

Exercice 3

Soit f est une fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-3\}$ par : $f(x)=\dfrac{x^2+4x+8}{x+3}$.

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J)

1. Démontre que la droite d'équation $x=-3$ est une asymptote à (C).
2. On suppose que f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-3\}$.

a) Détermine $f'(x)$ pour tout nombre réel x différent de -3.

b) Étudie le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.

c) Dresse le tableau de variation de f.

3. a) Démontre que la droite (D) d'équation $y=x+1$ est une asymptote à (C) en $+\infty$ et $-\infty$.

b) Détermine une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point A d'abscisse 0.

4. Construis (T) et (C) dans le plan muni du repère (O, I, J) sur $]-3\ ;\ 8[$.

Exercice 4

Pour une loterie, on émet des carnets de 20 billets tels que dans chaque carnet, un billet gagne 3 000 F, deux billets gagnent 1 000 F, 5 billets gagnent 500 F et 12 billets ne gagnent rien.
Des élèves de Terminale, avant d'acheter des billets de cette loterie, souhaitent évaluer leurs chances de gagner s'ils achètent deux billets d'un même carnet.

a. Détermine la probabilité de ne rien gagner.
b. Détermine la probabilité de gagner 3 000 F.
c. Détermine la probabilité qu'un billet au moins soit gagnant.

Exercice 5

(Série A1 seulement)

A la kermesse du lycée, un exposant propose un jeu qui consiste à tirer un jeton parmi 5 jetons contenus dans un sac. Les jetons sont numérotés 0F ; 100F ; 200F ; 300 F : 400 F. Pour jouer il faut payer 200 F.
A chaque tirage, on associe un gain ou une perte définis de la façon suivante :
Si on tire 0 F, on perd 200 F
Si on tire 100 F, on perd 100F
Si on tire 200 F, on perd 0F
Si on tire 300 F, on gagne 100 F
Si on tire 400 F, on gagne 200 F
Ton ami ne veut participer à ce jeu que si son gain moyen après plusieurs participations est supérieur à 100 F. Il hésite et se confie à toi.
Produis une argumentation basée sur tes connaissances mathématiques pour éclairer la décision de ton ami.

SPÉCIMEN

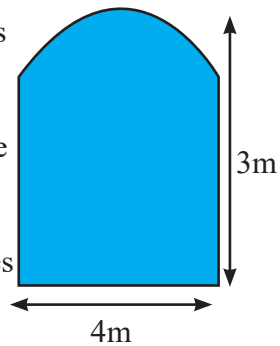
3 SÉRIE A1 UNIQUEMENT
PRIMITIVES ET CALCUL INTÉGRAL

Tableau des habiletés et contenus

HABILETÉS	CONTENUS
CONNAITRE	- la définition d'une primitive - les primitives des fonctions de référence - la définition de l'intégrale d'une fonction continue - l'interprétation graphique d'une intégrale
DÉTERMINER	- les primitives d'une fonction en utilisant les primitives des fonctions de référence ; - la primitive d'une fonction qui prend une valeur donnée en un point donné; - les primitives des fonctions du type : - $au + bv$, (a,b) $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$; - $u' \times u^m$, $(m \in \mathbb{Q}\backslash\{-1\})$.
CALCULER	- une intégrale en utilisant les primitives des fonctions de référence ; - l'aire d'une partie du plan limitée par : • la courbe représentative d'une fonction, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$; • les courbes représentatives de deux fonctions et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.
TRAITER UNE SITUATION	faisant appel aux primitives et au calcul intégral

Situation d'apprentissage

Lors de la visite d'un musé, les élèves d'une classe de Terminale A sont impressionnés par la forme parabolique de la porte métallique de ce musé. Le Directeur du musé les informe que cette porte a une hauteur de 3 m et une largeur à la base de 4 m.
Les élèves veulent donner des indications à un ferronnier pour leur fabriquer une porte semblable pour le poulailler du lycée. Pour cela, ils ont besoin de l'aire de cette porte mais ont des difficultés pour déterminer cette aire. Le professeur de mathématique leur dit qu'il est possible de calculer l'aire de cette porte avec les informations données par le Directeur. Les élèves s'organisent pour apprendre à déterminer cette aire.



SPÉCIMEN

1 NOTION DE CONTINUITÉ

Définition

Lorsqu'une fonction f est définie en un point a et admet une limite en a, cette limite est égale à $f(a)$. On dit que f est continue en a.



Toute fonction polynôme est continue en tout point de $\mathbb{R}$.
Toute fonction rationnelle est continue en tout point de son ensemble de définition.

Propriété

- La somme de deux fonctions continues en a est une fonction continue en a.
- Le produit de deux fonctions continues en a est une fonction continue en a.
- Le quotient d'une fonction f continue en a par une fonction g continue en a telle que $g(a)$ soit différent de zéro est une fonction continue en a.

Exercices de fixation

1 Parmi les fonctions ci-dessous, cite celles qui sont continues en 0.

a) $f(x) = x^2 + x + 5$; b) $g(x) = \frac{1}{x}$; c) $h(x) = \frac{x+2}{x-4}$.

.....

.....

.....

.....

2 Les fonctions f et g sont continues en 2 et $f(2) = 0$ et $g(2) \neq 0$.
Parmi les fonctions ci-dessous, cite celles qui sont continues en 2

1) $f + g$; 2) $f - g$; 3) fg ; 4) $\frac{f}{g}$;
5) $\frac{1}{f}$; 6) $\frac{g}{f}$

.....

.....

.....

.....

Définition

On dit qu'une fonction est continue sur un intervalle I si elle est continue en tout point de I.

Exercice de fixation

3 Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes:

a) La fonction $f : x \mapsto x^2 + 4x$ est continue sur $\mathbb{R}$.....

b) La fonction $g : x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]-1 ; 1[$.....

c) La fonction $g : x \mapsto \frac{x}{x+3}$ est continue sur $]-3 ; +\infty[$.



Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.
Toute fonction rationnelle est continue sur tout intervalle ouvert de son ensemble de définition.

Propriété

Si une fonction est dérivable en un point, alors elle est continue en ce point.

2 PRIMITIVE

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On appelle primitive de f sur I, toute fonction F dérivable sur I telle que f soit la dérivée de F.



Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x - 3$ et $g(x) = x^2 - 3x + 7$.
g est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ car g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme toute fonction polynôme et pour tout nombre réel x, on a :
$g'(x) = 2x - 3$. Ce qui donne : $g'(x) = f(x)$.

Propriété

Toute fonction continue sur un intervalle I admet au moins une primitive sur I.

SPÉCIMEN

Exercice de fixation

4 Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

1. Toute fonction polynôme admet au moins une primitive sur $\mathbb{R}$..... .
2. Si les fonctions F et G sont deux primitives de la fonction f sur intervalle I, alors elles ont deux fonctions dérivées différentes sur I .....

5 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = 2x + 5$.
Soient F, G, H, P et $\mathbb{Q}$ les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que :
$F(x) = x^2$; $G(x) = x^2 + 5x - 7$; $H(x) = x^2 + 5x$;
$P(x) = x^2 + 5x + \frac{1}{x}$; $Q(x) = \frac{5x^2 + 25x - 13}{5}$.
Parmi les fonctions F, G, H, P et Q, indique ceux qui sont des primitives de f sur $\mathbb{R}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Propriété

Si la fonction F est une primitive f sur un intervalle I, alors toutes les primitives de f sur I sont de la forme : $x \mapsto F(x) + C$ où C'est une constante réelle.



On considère les fonctions F et f définies sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = x^4 + 1$ et $f(x) = 4x^3$.
La fonction f étant une fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$. Elle admet une primitive sur $\mathbb{R}$.
La fonction F étant une fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, on a :
$\forall\, x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = f(x)$. D'où F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. La fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par : $G(x) = F(x) + 25$ est une autre primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice de fixation

6 Soit F une primitive f sur un intervalle I.
Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes.

	Affirmation	Vrai/Faux
1	$x \mapsto F(x) + x$, est une primitive de f.	
2	$x \mapsto F(x) + k$, ($k \in \mathbb{R}$) est une primitive de f.	
3	$x \mapsto F(x) - k$, ($k \in \mathbb{R}$) est une primitive de f.	
4	$x \mapsto k\,F(x)$, ($k \in \mathbb{R}$) est une primitive de f.	

7 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - x$.
Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$ définie par :
$F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$.
Trouve deux autres primitives G et H de f sur $\mathbb{R}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Primitive de fonctions de référence

Fonction f	Une primitive de f	Sur l'intervalle
$x \mapsto a$ $(a \in \mathbb{R})$	$x \mapsto ax$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^r$ $(r \in \mathbb{Q}^+)$	$x \mapsto \frac{1}{r+1}x^{r+1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x^r}$ $(r \in \mathbb{Q}^+ \setminus \{0;1\})$	$x \mapsto \frac{-1}{(r-1)x^{r-1}}$	$]-\infty\,;\,0[$ ou $]0\,;\,+\infty[$



Les primitive de la fonction de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}$ sur $]0\,;+\infty[$ sont :
les fonctions : $F : x \longmapsto 3x^{\frac{1}{3}} + C$ où C est un nombre réel quelconque.
Déterminons la primitive de f qui prend la valeur 0 en 1.

$F(1) = 0$ donc $C + 3 = 0$ soit $C = -3$. Donc la primitive de f sur $]0\,;+\infty[$ sur qui prend la valeur 0 en 1 est la fonction $F : x \longmapsto 3x^{\frac{1}{3}} - 3$.

SPÉCIMEN

1 NOTION DE CONTINUITÉ

Définition

Lorsqu'une fonction f est définie en un point a et admet une limite en a, cette limite est égale à $f(a)$. On dit que f est continue en a.



Toute fonction polynôme est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

Toute fonction rationnelle est continue en tout point de son ensemble de définition.

Propriété

- La somme de deux fonctions continues en a est une fonction continue en a.
- Le produit de deux fonctions continues en a est une fonction continue en a.
- Le quotient d'une fonction f continue en a par une fonction g continue en a telle que $g(a)$ soit différent de zéro est une fonction continue en a.

Propriété

- Si F et G sont des primitives des fonctions f et g sur un intervalle I, alors F + G est une primitive de $f + g$ sur I.
- Si F est une primitive de la fonction f sur un intervalle I et a un nombre réel, alors aF est une primitive de af sur I.
- Si F et G sont des primitives des fonctions f et g sur un intervalle I, a et b deux nombres réels, alors aF + bG est une primitive de $af + bg$ sur I.

Exercices de fixation

1 Parmi les fonctions ci-dessous, cite celles qui sont continues en 0.

a) $f(x) = x^2 + x + 5$; b) $g(x) = \frac{1}{x}$; c) $h(x) = \frac{x+2}{x-4}$; d) $k(x) = \frac{x+2}{x}$; e) $l(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

2 Les fonctions f et g sont continues en 2 et $f(2) = 0$ et $g(2) \neq 0$.

Parmi les fonctions ci-dessous, cite celles qui sont continues en 2

1) $f + g$; 2) $f - g$; 3) fg ; 4) $\frac{f}{g}$; 5) $\frac{1}{g}$; 6) $\frac{g}{f}$.

Exercice de fixation

3 Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes:

a) La fonction $f : x \mapsto x^2 + 4x$ est continue sur $\mathbb{R}$

b) La fonction $g : x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]-1 ; 1[$

c) La fonction $g : x \mapsto \frac{x}{x+3}$ est continue sur $]-3 ; +\infty[$.



Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.

Toute fonction rationnelle est continue sur tout intervalle ouvert de son ensemble de définition.

Exercice de fixation

4 Dans chacun des cas suivants, f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Détermine la primitive F de f telle que :

Propriété

Si une fonction est dérivable en un point, alors elle est continue en ce point.

b) $f(x) = 4x + 2$; $x_0 = 3$; $y_0 = -5$;

c) $f(x) = x + 2x^2$; $x_0 = 12$; $y_0 = 2$;

d) $f(x) = 1 + 2x + 3x^2$; $x_0 = 0$; $y_0 = 8$.

2 PRIMITIVE

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On appelle primitive de f sur I, toute fonction F dérivable sur I telle que f soit la dérivée de F.



Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x - 3$ et $g(x) = x^2 - 3x + 7$.

g est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ car g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme toute fonction polynôme et pour tout nombre réel x, on a : $g'(x) = 2x - 3$. Ce qui donne : $g'(x) = f(x)$.

Propriété

Toute fonction continue sur un intervalle I admet au moins une primitive sur I.

Exercice de fixation

5 Dans chacun des cas, détermine les primitives de la fonction f définie sur l'intervalle I par :

a) $f(x) = 3 + x$; I = $\mathbb{R}$; b) $f(x) = 7x$; I = $\mathbb{R}$

c) $f(x) = 2x + 4x^2$; I = $\mathbb{R}$; d) $f(x) = 1 + 2x + 9x^2$; I = $\mathbb{R}$; e) $f(x) = x - \frac{1}{x^2}$; I = $]0 ; +\infty[$.

SPECIMEN

3 CALCUL INTÉGRAL

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, F est une primitive de f sur I, a et b des éléments de I. Le nombre réel F(b) – F(a) est indépendant de la primitive choisie, il est appelé intégrale de a à b de f.

On note : $\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_b^a$

$= F(b) - F(a)$

Exemples

La fonction carrée est continue sur l'intervalle [0 ; 1]. Elle admet sur [0 ; 1] une intégrale. On a : $\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$.

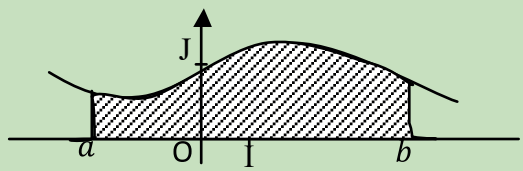
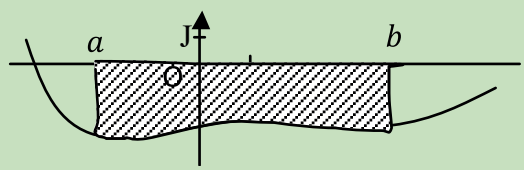
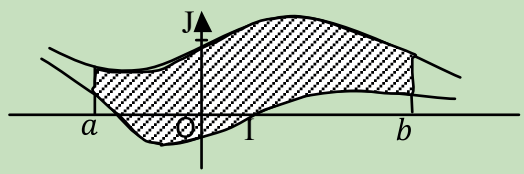
On a : $\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}\cdot 1^3 - \frac{1}{3}\cdot 0^3$.

D'où : $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$.

4 CALCUL D' AIRE

Propriété

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I.
Soient a et b deux éléments de I, tels que $a \leq b$.
Soient (C_f) et (C_g) les courbes représentatives de f et de g dans le plan muni d'un repère orthogonal.

• Si f est positive sur $[a\,;b]$, alors l'aire en unité d'aire de la partie du plan délimitée par (C_f), les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est : $\int_a^b f(t)\,dt$	
• Si f est négative sur $[a\,;b]$, alors l'aire en unité d'aire de la partie du plan délimitée par (C_f), les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est : $-\int_a^b f(t)\,dt$	
• Si $f \leq g$ sur $[a\,;b]$, alors l'aire en unité d'aire de la partie du plan délimitée par (C_f), (C_g), les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est : $\int_a^b (g(t) - f(t))\,dt$	

Exercice de fixation

11 Calcule :

a) $\int_0^1 (x+2)\,dx$; b) $\int_{-2}^4 (5x-3)\,dx$;

c) $\int_2^5 (3t^2+4t-5)\,dt$.

SPECIMEN

L'unité d'aire u.a vaut : 1. u.a = OI×OJ.
Si OI = 3cm et OJ = 2cm, alors 1. u.a = 3×2 cm² soit 6 cm².

1 NOTION DE CONTINUITÉ

Définition

Lorsqu'une fonction f est définie en un point a et admet une limite en a, cette limite est égale à $f(a)$. On dit que f est continue en a.

Exemples

de la partie du plan délimitée par les droites
is $x = 0$ et $x = 1$ et la courbe représentative
tion carré.

Toute fonction polynôme est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

Toute fonction rationnelle est continue en tout point de son ensemble de définition.

La fonction carré est continue et positive sur l'intervalle [0 ; 1]. Donc elle est intégrable sur [0 ; 1].

Propriété

- La somme de deux fonctions continues en a est une fonction continue en a.
- Le produit de deux fonctions continues en a est une fonction continue en a.
- Le quotient d'une fonction f continue en a par une fonction g continue en a telle que $g(a)$ soit différent de zéro est une fonction continue en a.

est : $\frac{1}{3} \times 9$ cm². Soit 3 cm².

Exercices de fixation

2 f et g désignent respectivement les fonctions carré et cube et (C_f) et (C_g) sont les courbes représentatives de f et g dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 2 cm.

Calculons en cm² l'aire de la partie du plan délimitée par les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$ et les courbes représentatives de f et g.

L'aire $\mathcal{A}$ cherchée en unité d'aire est :

$\int_0^2 |f(x) - g(x)|\,dx$.

Sur l'intervalle [0 ; 1], (C_f) est au dessus de (C_g) et sur l'intervalle [1 ; 2], (C_g) est au dessus de (C_f).

Donc :

$A = \int_0^1 [f(x) - g(x)]\,dx + \int_1^2 [g(x) - f(x)]\,dx$.

D'où :

$A = [\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4]_0^1 + [\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3]_1^2$. On trouve en unité d'aire : $\mathcal{A} = \frac{3}{2}$. L'unité d'aire est 4 cm².

On en déduit que l'aire cherchée est 6 cm².

Exercices de fixation

Définition

On dit qu'une fonction est continue sur un intervalle I si elle est continue en tout point de I.

est ab.

Exercice de fixation

3 Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes:

a) La fonction $f : x \mapsto x^2 + 4x$ est continue sur $\mathbb{R}$

b) La fonction $g : x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]-1 ; 1[$

c) La fonction $g : x \mapsto \frac{x}{x+3}$ est continue sur $]-3 ; +\infty[$

Exemples

Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.
Toute fonction rationnelle est continue sur tout intervalle ouvert de son ensemble de définition.

13 Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J)
hique 3 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm

Propriété

Si une fonction est dérivable en un point, alors elle est continue en ce point.

Soit f une fonction continue et positive sur [1 ; 2], telle que : $f(x) = x^2 + x - 2$.

e, en cm², l'aire de la partie du plan délimitée
par la courbe (C_f) de f, la droite (OI) et les droites
= 1 et $x = 2$.

2 PRIMITIVE

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On appelle primitive de f sur I, toute fonction F dérivable sur I telle que f soit la dérivée de F.

Exemples

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x - 3$ et $g(x) = x^2 - 3x + 7$.
g est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ car g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme toute fonction polynôme et pour tout nombre réel x, on a :
$g'(x) = 2x - 3$. Ce qui donne : $g'(x) = f(x)$.

Propriété

Toute fonction continue sur un intervalle I admet au moins une primitive sur I.

SPECIMEN

14 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 2 cm.

Soit f une fonction continue et négative sur $[-2 ; 0]$, telle que : $f(x) = x^2 + x - 2$.

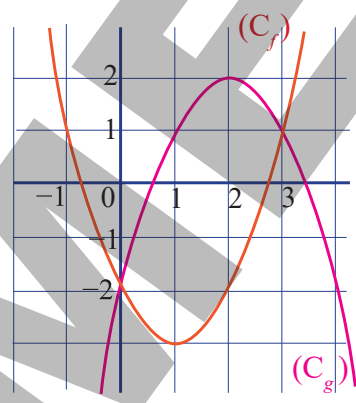
Calcule, en cm², l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C_f) de f, la droite (OI) et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 0$.

15 Soient f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$, telles que : $f(x) = x^2 - 2x - 2$ et $g(x) = -x^2 + 4x - 2$.

Les courbes représentatives de (C_f) et (C_g) sont représentées sur la figure ci-contre.

Pour tout x élément de $[0 ; 3]$, $f(x) \leq g(x)$.

Calcule l'aire de la partie du plan délimitée par (C_f) et (C_g) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 3$.



SPÉCIMEN

1 NOTION DE CONTINUITÉ

On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -2x + 1$.

Définition

Lorsqu'une fonction f est définie en un point a et admet une limite en a, cette limite est égale à $f(a)$. On dit que f est continue en a.



Toute fonction polynôme est continue en tout point de $\mathbb{R}$.
Toute fonction rationnelle est continue en tout point de son ensemble de définition.

Propriété

- La somme de deux fonctions continues en a est une fonction continue en a.
- Le produit de deux fonctions continues en a est une fonction continue en a.
- Le quotient d'une fonction f continue en a par une fonction g continue en a telle que $g(a)$ soit différent de zéro est une fonction continue en a.

Détermine la primitive F de f qui prend la valeur 3 en 1.

Exercices de fixation

1 Parmi les fonctions ci-dessous, cite celles qui sont continues en 0.

a) $f(x) = x^2 + x + 5$; b) $g(x) = \frac{1}{x}$; c) $h(x) = \frac{x+2}{x-4}$.

2 Les fonctions f et g sont continues en 2 et $f(2) = 0$ et $g(2) \neq 0$.
Parmi les fonctions ci-dessous, cite celles qui sont continues en 2 :
1) $f + g$; 2) $f - g$; 3) fg ; 4) $\frac{f}{g}$; 5) $\frac{1}{f}$; 6) $\frac{g}{f}$.

3 Calcule chacune des intégrales suivantes :
$A = \int_1^3 2x\,dx$; $B = \int_0^2 (2x-1)\,dx$; $C = \int_1^2 \frac{-1}{x^2}\,dx$; $D = \int_1^2 \frac{2}{(2x+1)^2}\,dx$.

Définition

On dit qu'une fonction est continue sur un intervalle I si elle est continue en tout point de I.

Exercice de fixation

3 Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes:

a) La fonction $f : x \mapsto x^2 + 4x$ est continue sur $\mathbb{R}$

b) La fonction $g : x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]-1 ; 1[$

c) La fonction $g : x \mapsto \frac{x}{x+3}$ est continue sur $]-3 ; +\infty[$

On donne la fonction f définie de $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - 2 + \frac{5}{(x+2)^2}$

Calcule $\int_1^3 f(x)dx$.



Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.
Toutes les primitives de elle est continue sur tout intervalle ouvert de son ensemble de définition.

Propriété

Si une fonction est dérivable en un point, alors elle est continue en ce point.

2 PRIMITIVE

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On appelle primitive de f sur I, toute fonction F dérivable sur I telle que f soit la dérivée de F.



Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x - 3$ et $g(x) = x^2 - 3x + 7$.
g est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ car g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme toute fonction polynôme et pour tout nombre réel x, on a : $g'(x) = 2x - 3$. Ce qui donne : $g'(x) = f(x)$.

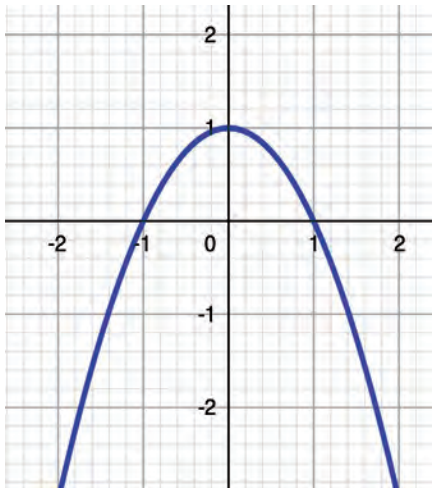
Propriété

Toute fonction continue sur un intervalle I admet au moins une primitive sur I.

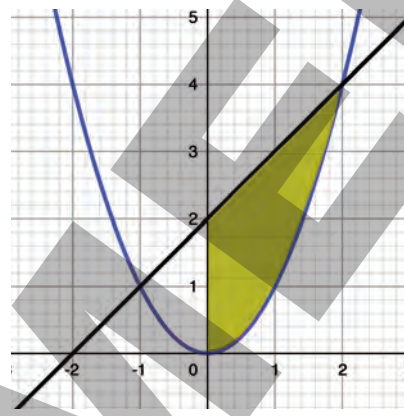
SPECIMEN

5 Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J). Unité graphique 1,5 cm. On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^2 + 1$.

1. Calcule l'aire comprise entre la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 1$.
2. Calcule en cm² l'aire comprise entre la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$.



6 Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J). Unité graphique 1 cm.
On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$.
Calcule en cm² l'aire comprise entre la courbe de f, la droite d'équation $y = x + 2$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$.



SPÉCIMEN

1 NOTION DE CONTINUITÉ

Définition

Lorsqu'une fonction f est définie en un point a et admet une limite en a, cette limite est égale à $f(a)$. On dit que f est continue en a.



Toute fonction polynôme est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

Toute fonction rationnelle est continue en tout point de son ensemble de définition.

Propriété

- La somme de deux fonctions continues en a est une fonction continue en a.
- Le produit de deux fonctions continues en a est une fonction continue en a.
- Le quotient d'une fonction f continue en a par une fonction g continue en a telle que $g(a)$ soit différent de zéro est une fonction continue en a.

Exercices de fixation

1 Parmi les fonctions ci-dessous, cite celles qui sont continues en 0.

a) $f(x) = x^2 + x + 5$; b) $g(x) = \frac{1}{x}$; c) $h(x) = \frac{x+2}{x-4}$.

2 Les fonctions f et g sont continues en 2 et $f(2) = 0$ et $g(2) \neq 0$.

Parmi les fonctions ci-dessous, cite celles qui sont continues en 2

1) $f + g$; 2) $f - g$; 3) fg ; 4) $\frac{f}{g}$;

5) $\frac{1}{f}$; 6) $\frac{g}{f}$

8 Une entreprise veut construire un pont de forme [illegible] reliant deux quartiers A et B distants de [illegible] été ajustée à une hauteur h définie par la relation :

$h(d) = \frac{d^2}{1600} - \frac{d}{4} + 125$.

En attendant la fin des travaux et pour empêcher tout passage en dessous du pont, le maître d'œuvre doit couvrir la surface OABC avec un grillage synthétique. Il confit la tâche à un ouvrier. Celui-ci veut savoir combien de mètres carrés de grillage il faut pour cette couverture. Ne sachant comment s'y [illegible] lui une solution argumentée en utilisant tes connaissances mathématiques.



Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.

Toute fonction rationnelle est continue sur tout intervalle ouvert de son ensemble de définition.

Définition

On dit qu'une fonction est continue sur un intervalle I si elle est continue en tout point de I.

Exercice de fixation

3 Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

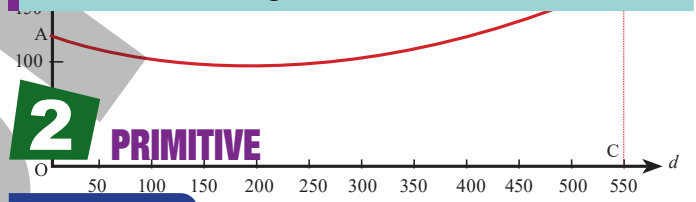
a) La fonction $f : x \mapsto x^3 - 4x$ est continue sur $\mathbb{R}$.

b) La fonction $g : x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]-1 ; 1[$.

c) La fonction $g : x \mapsto \frac{x}{x+3}$ est continue sur $]-3 ; +\infty[$.

Propriété

Si une fonction est dérivable en un point, alors elle est continue en ce point.



2 PRIMITIVE

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On appelle primitive de f sur I, toute fonction F dérivable sur I telle que f soit la dérivée de F.



Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x - 3$ et $g(x) = x^2 - 3x + 7$.

g est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ car g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme toute fonction polynôme et pour tout nombre réel x, on a :

$g'(x) = 2x - 3$. Ce qui donne : $g'(x) = f(x)$.

Propriété

Toute fonction continue sur un intervalle I admet au moins une primitive sur I.

SPECIMEN

4 FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

Tableau des habiletés et contenus

HABILETÉS	CONTENUS
CONNAÎTRE	- la définition de la fonction logarithme népérien - le signe de la fonction logarithme népérien sur : •]0 ;1[•] 1 ;+∞[- la dérivée de la fonction logarithme népérien - le sens de variation de la fonction logarithme népérien - la dérivée d'une fonction de chacun des types : $x \mapsto ax + b + \ln x$ $x \mapsto ax + b - \ln x$ $x \mapsto \ln(ax^2+bx+c)$ où $(a\ ;\ b) \neq (0\ ;\ 0)$ - le nombre e - une valeur approchée du nombre e - les résultats $\ln e = 1$ et $\ln 1 = 0$ - les propriétés algébriques de la fonction logarithme népérien - les résultats suivants : $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$; $\lim\limits_{x\to a} \ln x = \ln a (a>0)$ les primitives des fonctions de chacun des types : $x \mapsto \dfrac{1}{x}$; $x \mapsto \dfrac{a}{cx+d}$; $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$; (A1)
NOTER	- le logarithme népérien
CALCULER	- en utilisant les propriétés algébriques de la fonction logarithme népérien - des limites de fonctions comportant la fonction logarithme népérien
RÉSOUDRE	- des équations faisant intervenir le logarithme népérien - des inéquations faisant intervenir le logarithme népérien
	- la fonction dérivée d'une fonction de chacun des types : • $x \mapsto ax + b + \ln x$ • $x \mapsto ax + b - \ln x$ • $x \mapsto \ln(ax^2 + bx + c)$ où $(a\ ;\ b) \neq (0\ ;\ 0)$ - le signe de la dérivée de chacune des fonctions des types : • $x \mapsto ax + b + \ln x$ • $x \mapsto ax + b - \ln x$ • $x \mapsto \ln(ax^2 + bx + c)$ où $(a\ ;\ b) \neq (0\ ;\ 0)$ - le sens de variation de chacune des fonctions des types : • $x \mapsto ax + b + \ln x$ • $x \mapsto ax + b - \ln x$ • $x \mapsto \ln(ax^2 + bx + c)$ où $(a\ ;\ b) \neq (0\ ;\ 0)$ - des limites d'une fonction de chacun des types : • $x \mapsto ax + b + \ln x$ • $x \mapsto ax + b - \ln x$ • $x \mapsto \ln(ax^2 + bx + c)$ où $(a\ ;\ b) \neq (0\ ;\ 0)$

SPÉCIMEN

1 NOTION DE CONTINUITÉ

Définition

Lorsqu'une fonction f est définie en un point a et admet une limite en a, cette limite est égale à $f(a)$. On dit que f est continue en a.

Exemples

Toute fonction polynôme est continue en tout point de son ensemble de définition.

Toute fonction rationnelle est continue en tout point de son ensemble de définition.

Propriété

- La somme de deux fonctions continues en a est une fonction continue en a.
- Le produit de deux fonctions continues en a est une fonction continue en a.
- Le quotient d'une fonction f continue en a par une fonction g continue en a telle que $g(a)$ soit différent de zéro est une fonction continue en a.

Définition

On dit qu'une fonction est continue sur un intervalle I si elle est continue en tout point de I.

Exemples

Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.
Toute fonction rationnelle est continue sur tout intervalle ouvert de son ensemble de définition.

Propriété

Si une fonction est dérivable en un point, alors elle est continue en ce point.

Exercice de fixation

3 Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes.

a) La fonction $f : x \mapsto x^2 + 4x$ est continue sur $\mathbb{R}$ .....

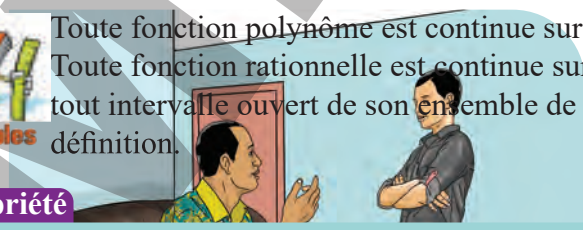
b) La fonction $g : x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]-1 ; 1[$ .....

c) La fonction $g : x \mapsto \frac{x}{x+3}$ est continue sur $]-3 ; +\infty[$.

Situation d'apprentissage

Pour une situation de référence faisant appel à la fonction logarithme népérien.

combien d'années il pourra avoir accès à son compte sollicite ses amis de classe. Ceux-ci décident de faire des calculs pour aider leur camarade.



Exercices de fixation

1 Parmi les fonctions ci-dessous, cite celles qui sont continues en 0.

a) $f(x) = x^2 + x + 5$; b) $g(x) = \frac{1}{x}$; c) $h(x) = \frac{x+2}{x-4}$.

.....

.....

.....

.....

2 Les fonctions f et g sont continues en 2 et $f(2) = 0$ et $g(2) \neq 0$.
Parmi les fonctions ci-dessous, cite celles qui sont continues en 2

1) $f + g$; 2) $f - g$; 3) fg ; 4) $\frac{f}{g}$;
5) $\frac{1}{f}$; 6) $\frac{g}{f}$

.....

.....

.....

.....

2 PRIMITIVE

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On appelle primitive de f sur I, toute fonction F dérivable sur I telle que f soit la dérivée de F.

Exemples

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x - 3$ et $g(x) = x^2 - 3x + 7$.
g est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ car g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme toute fonction polynôme et pour tout nombre réel x, on a :
$g'(x) = 2x - 3$. Ce qui donne : $g'(x) = f(x)$.

Propriété

Toute fonction continue sur un intervalle I admet au moins une primitive sur I.

SPÉCIMEN

1 DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS

Définition

On appelle fonction logarithme népérien, la fonction définie sur]0 ; +∞[, s'annulant en 1 et qui a pour dérivée la fonction définie sur]0 ; +∞[qui à x associe $\frac{1}{x}$.



Notation :
On la note : ln

Exercice de fixation

1 Pour chaque ligne du tableau suivant, trois réponses A, B et C sont proposées dont une seule est exacte. Entoure la bonne réponse sur chaque ligne

		A	B	C
1	L'ensemble de définition de ln est :	$\mathbb{R}$	$]-\infty ; 0[$	$]0 ; +\infty[$
2	$(\ln)'(x) =$	x	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
3	$\ln 1 =$	n'existe pas	0	1

Conséquences de la définition

- L'ensemble de définition de la fonction ln est]0 ; +∞[;
- ln est dérivable sur]0 ; +∞[et on a : $\forall x > 0$, $(\ln)'(x) = \frac{1}{x}$;
- $\ln 1 = 0$

Propriété

Pour tous nombres réels a et b strictement positifs, on a :

- $\ln ab = \ln a + \ln b$
- $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
- $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln a$
- $\ln(a^r) = r\ln a, (r \in \mathbb{Q})$



ln (2×3) = ln 2 + ln 3.
Donc ln 6 = ln 2 + ln 3.

$$\ln\sqrt{5} + \ln\sqrt{\frac{9}{5}} = \ln\left(\sqrt{5}\cdot\sqrt{\frac{9}{5}}\right)$$
$$= \ln\sqrt{9}$$
$$= \ln 3$$

Exercices de fixation

2 Pour chaque ligne du tableau suivant, trois réponses A, B et C sont proposées dont une seule est exacte. Écris le numéro de la ligne suivi de la lettre correspondant à la réponse exacte.

		A	B	C
1	$\ln(ab) =$	$\ln a \times \ln b$	$\ln a + \ln b$	$\ln a - \ln b$
2	$\ln(\frac{a}{b}) =$	$\frac{\ln a}{\ln b}$	$\ln a + \ln b$	$\ln a - \ln b$
3	$\ln(\frac{1}{a}) =$	$-\ln a$	$\frac{1}{\ln a}$	$\ln a$
4	$\ln(a^n) =$	$\ln a$	$n\ln a$	$n + \ln a$

.....

.....

.....

3 Entoure la bonne réponse dans chacun des cas suivants.

	A	B	C	D
$\ln 16 + \ln 3$	$\ln 19$	$\ln\left(\frac{16}{3}\right)$	$\ln 48$	$\ln 13$
$\ln\left(\frac{1}{2}\right)$	$\ln 2$	$-\ln 2$	$\frac{1}{\ln 2}$	0
$\ln\left(\frac{13}{7}\right)$	$\ln 6$	$\ln 20$	$\ln 13+\ln 7$	$\ln 13-\ln 7$
$\ln(\sqrt{5})$	$\sqrt{\ln 5}$	$\frac{1}{2}\ln 5$	$\ln\frac{5}{2}$	$\ln 5-\ln 2$
$\ln 2^3$	$3\ln 2$	$2\ln 3$	$\ln 2-\ln 3$	$\ln 2+\ln 3$

SCIMEN

1 NOTION DE CONTINUITÉ

Définition

Lorsqu'une fonction f est définie en un point a et admet une limite en a, cette limite est égale à $f(a)$. On dit que f est continue en a.



Toute fonction polynôme est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

Toute fonction rationnelle est continue en tout point de son ensemble de définition.

Propriété

- La somme de deux fonctions continues en a est une fonction continue en a.
- Le produit de deux fonctions continues en a est une fonction continue en a.
- Le quotient d'une fonction f continue en a par une fonction g continue en a telle que $g(a)$ soit différent de zéro est une fonction continue en a.

Exercices de fixation

1 Parmi les fonctions ci-dessous, cite celles qui sont continues en 0.

a) $f(x) = x^2 + x + 5$; b) $g(x) = \frac{1}{x}$; c) $h(x) = \frac{x+2}{x-4}$.

2 Les fonctions f et g sont continues en 2 et $f(2) = 0$ et $g(2) \neq 0$.

Parmi les fonctions ci-dessous, cite celles qui sont continues en 2.

2 LIMITES

Propriété

$\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$;

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.



Calculons les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x - \ln x)$; b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\ln x}{1+x}$.

a) $x - \ln x = x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)$. Or : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$,

donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} (x - \ln x) = +\infty$.

b) On a :

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln x = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (1+x) = 1$. Donc : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x\ln x}{1+x} = 0$

Exercice de fixation

3 Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes:

a) La fonction $f : x \mapsto x^2 + 4x$ est continue sur $\mathbb{R}$.

b) La fonction $g : x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]-1 ; 1[$.

c) La fonction $g : x \mapsto \frac{x}{x+3}$ est continue sur $]-3 ; +\infty[$.

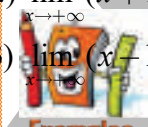
Exercices de fixation

6 Détermine chacune des limites suivantes:

1) $\lim\limits_{x\to 0} (x + \ln x)$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x + \ln x)$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x - \ln x)$



Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.

Toute fonction rationnelle est continue sur tout intervalle ouvert de son ensemble de définition.

7 Calcule les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x + 2 + \ln x)$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x - 1 - \ln x)$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} (-x + 5 + \ln x)$; 4) $\lim\limits_{x\to+\infty} (-4x - \ln x)$.

Propriété

Si une fonction est dérivable en un point, alors elle est continue en ce point.

5 Écris les expressions suivantes sous la forme $\ln a + \ln b$ où a et b sont des nombres réels strictement positifs.

a) $\ln(4 \times 9)$; b) $\ln(4 \times \sqrt{2})$; c) $\ln(7\pi)$

2 PRIMITIVE

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On appelle primitive de f sur I, toute fonction F dérivable sur I telle que f soit la dérivée de F.



Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x - 3$ et $g(x) = x^2 - 3x + 7$.

g est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ car g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme toute fonction polynôme et pour tout nombre réel x, on a :

$g'(x) = 2x - 3$. Ce qui donne : $g'(x) = f(x)$.

Propriété

Toute fonction continue sur un intervalle I admet au moins une primitive sur I.

SPÉCIMEN

Propriété 1

Si $\lim\limits_{x\to+\infty}(ax^2+bx+c)=+\infty$,

alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(ax^2+bx+c)=+\infty$

Si $\lim\limits_{x\to-\infty}(ax^2+bx+c)=+\infty$,

alors $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(ax^2+bx+c)=+\infty$



Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x^2-x+1)$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-x+1)=+\infty$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x^2-x+1)=+\infty$

Exercice de fixation

8 Calcule les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x^2+x+1)$; 2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(x^2+x+1)$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x^2+x-6)$; 4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(x^2+x-6)$.

Propriété 2

Si lorsque x tend vers x_0 à gauche ou à droite, ax^2+bx+c tend vers zéro par valeurs supérieures, alors $\ln(ax^2+bx+c)$ tend vers $-\infty$.



Calculons $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}}\ln(1-x^2)$

$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}}\ln(1-x^2)=0$ et

$\forall x\in]-1\,;1[,\ 1-x^2>0$

donc $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}}\ln(1-x^2)=-\infty$

Exercice de fixation

9 Calcule les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{\substack{x\to2\\>}}\ln(x^2+x-6)$; 2) $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\<}}\ln(x^2+x-6)$

3 DÉRIVÉE

Propriété

- La fonction ln est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et sa dérivée est la fonction de $]0\,;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ qui à x associe $\frac{1}{x}$.
- La fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.
- La fonction $x\mapsto\ln(ax^2+bx+c)$ est dérivable en tout point de son ensemble de définition et a pour fonction dérivée la fonction qui à x associe $\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}$.

Exercices de fixation

10 Calcule les dérivées des fonctions f, g et h définies sur $]0\,;+\infty[$ par :

a) $f(x)=-\ln x$; b) $g(x)=7x+\ln x$;

c) $h(x)=-9x+12-\ln x$.

SPÉCIMEN

11 Écris pour chaque ligne, le numéro et la lettre correspondant à la bonne réponse.

Affirmations	A	B	C
1 Si f est la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \ln x$, alors $f'(x) =$	$\frac{1}{x}$	x	$\frac{1}{x^2}$
2 Si f est la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = 2x + 3 - \ln x$, alors $f'(x) =$	$\frac{1}{x}$	$2-\frac{1}{x^2}$	$2-\frac{1}{x}$
3 Si f est la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = -5x + 2 + \ln x$, alors $f'(x) =$	$-5+\frac{1}{x}$	$-5+\frac{1}{x^2}$	$-5-\frac{1}{x}$
4 Si f est la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \ln(3x^2 + 2)$, alors $f'(x) =$	$\frac{2}{3x+2}$	$\frac{x}{x^2+3}$	$\frac{3}{3x+2}$
5 Si f est la fonction définie sur $]-\frac{2}{3} ; +\infty[$ par : $f(x) = \ln(3x + 2)$, alors $f'(x) =$	$\frac{4x+1}{2x^2+x+3}$	$\frac{2x+1}{2x^2+x+3}$	$\frac{2x+3}{2x^2+x+3}$
6 Si f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \ln(2x^2+x+3)$, alors $f'(x) =$			

1 NOTION DE CONTINUITÉ

Définition

Lorsqu'une fonction f est définie en un point a et admet une limite en a, cette limite est égale à $f(a)$. On dit que f est continue en a.



3 Toute fonction polynôme est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

4 Toute fonction rationnelle est continue en tout point de son ensemble de définition.

Propriété

- La somme de deux fonctions continues en a est une fonction continue en a.
- Le produit de deux fonctions continues en a est une fonction continue en a.
- Le quotient d'une fonction f continue en a par une fonction g continue en a telle que $g(a)$ soit différent de zéro est une fonction continue en a.

12 Calcule dans chaque cas la dérivée de la fonction f définie sur l'intervalle I.

a) $f : x \mapsto \ln(x+4)$, $I =]-4 ; +\infty[$

b) $f : x \mapsto \ln(-2x+1)$, $I =]-\infty ; \frac{1}{2}[$

c) $f : x \mapsto \ln(x^2+x+5)$, $I = \mathbb{R}$.

Exercices de fixation

1 Parmi les fonctions ci-dessous, cite celles qui sont continues en 0.

a) $f(x) = x^2 + x + 5$; b) $g(x) = \frac{1}{x}$; c) $h(x) = \frac{x+2}{x-4}$.

2 Les fonctions f et g sont continues en 2 et $f(2) = 0$ et $g(2) \neq 0$.

Parmi les fonctions ci-dessous, cite celles qui sont continues en 2

1) $f + g$; 2) $f - g$; 3) fg ; 4) $\frac{f}{g}$; 5) $\frac{1}{f}$; 6) $\frac{g}{f}$

Définition

On dit qu'une fonction est continue sur un intervalle I si elle est continue en tout point de I.

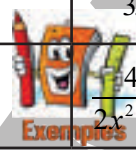
Exercice de fixation

3 Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes:

a) La fonction $f : x \mapsto x^2 + 4x$ est continue sur $\mathbb{R}$.....

b) La fonction $g : x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]-1 ; 1[$.....

c) La fonction $g : x \mapsto \frac{x}{x+3}$ est continue sur $]-3 ; +\infty[$.



Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.

Toute fonction rationnelle est continue sur tout intervalle ouvert de son ensemble de définition.

Propriété

Si une fonction est dérivable en un point, alors elle est continue en ce point.

2 PRIMITIVE

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On appelle primitive de f sur I, toute fonction F dérivable sur I telle que f soit la dérivée de F.



Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x - 3$ et $g(x) = x^2 - 3x + 7$.

g est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ car g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme toute fonction polynôme et pour tout nombre réel x, on a : $g'(x) = 2x - 3$. Ce qui donne : $g'(x) = f(x)$.

Propriété

Toute fonction continue sur un intervalle I admet au moins une primitive sur I.

SPÉCIMEN

4 REPRÉSENTATION GRAPHIQUE DE LA FONCTION LN

1. Sens de variation

La fonction ln est dérivable et strictement croissante sur]0 ; + ∞[. Elle est une bijection de]0 ; + ∞[sur ℝ.
Donc : pour tous nombres réels a et b strictement positifs,

- $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$
- $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$



- a étant un nombre réel strictement positif, si $\ln a < \ln 5$ alors, $a < 5$; si $a < 5$ alors, $\ln a < \ln 5$.
- b étant un nombre réel strictement positif, $\ln b = \ln 8 \Leftrightarrow b = 8$.

Exercices de fixation

13 Compare les nombres réels suivants :

1. $\ln 7$ et $\ln 5$; 2. $\ln\sqrt{3}$ et $\ln\frac{1}{2}$;
3. $\ln 29$ et $\ln 4\sqrt{5}$.

2. Le nombre réel e

La fonction ln est une bijection de]0 ; + ∞[sur ℝ.
On appelle e, l'unique nombre réel élément de]0 ; + ∞[tel que : $\ln e = 1$.
e est appelé la base du logarithme népérien.
Une valeur approchée de e est : 2,718 281 828 456.

Remarque

La notation e a été donnée par le mathématicien EULER. Il a démontré que ce nombre est irrationnel.



$\ln e^3 = 3\ln e$.
$\ln e = 1$, donc : $\ln e^3 = 3$.

Exercices de fixation

14 Calcule : $\ln e^{-5}$; $\ln e^2 + (\ln e)^2 + 2\ln e^3$; $\ln e^{-5} + (\ln e^3)^2 + 2\ln e^{-1}$.

3. Limites de la fonction ln

Limites de référence

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$
3. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \ln x = -\infty$
4. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x\ln x = 0$

SPÉCIMEN

1 NOTION DE CONTINUITÉ

Définition

Lorsqu'une fonction f est définie en un point a et admet une limite en a, cette limite est égale à $f(a)$. On dit que f est continue en a.

Exemples

Toute fonction polynôme est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

Toute fonction rationnelle est continue en tout point de son ensemble de définition.

Propriété

- La somme de deux fonctions continues en a est une fonction continue en a.
- Le produit de deux fonctions continues en a est une fonction continue en a.
- Le quotient d'une fonction f continue en a par une fonction g continue en a telle que $g(a)$ soit différent de zéro est une fonction continue en a.

Exercices de fixation

1 Parmi les fonctions ci-dessous, cite celles qui sont continues en 0.

a) $f(x) = x^2 + x + 5$; b) $g(x) = \frac{1}{x}$; c) $h(x) = \frac{x+2}{x-4}$.

2 Les fonctions f et g sont continues en 2 et $f(2) = 0$ et $g(2) = 0$.

Parmi les fonctions ci-dessous, cite celles qui sont continues en 2

1) $f + g$; 2) $f - g$; 3) fg ; 4) $\frac{f}{g}$; 5) $\frac{1}{f}$; 6) $\frac{g}{f-1}$

3 Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes:

a) La fonction $f : x \mapsto x^2 + 4x$ est continue sur $\mathbb{R}$

b) La fonction $g : x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]-1 ; 1[$

c) La fonction $g : x \mapsto \frac{x}{x+3}$ est continue sur $]-3 ; +\infty[$

Exemples

Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$. Toute fonction rationnelle est continue sur tout intervalle ouvert de son ensemble de définition.

Propriété

Si une fonction est dérivable en un point, alors elle est continue en ce point.

2 PRIMITIVE

4. Courbe représentative

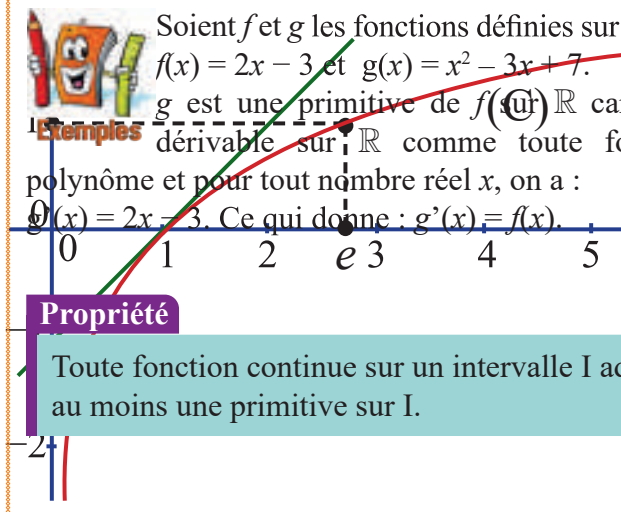
Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On appelle primitive de f sur I, toute fonction F dérivable sur I telle que f soit la dérivée de F.

Exemples

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x - 3$ et $g(x) = x^2 - 3x + 7$.

g est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ car g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme toute fonction polynôme et pour tout nombre réel x, on a : $g'(x) = 2x - 3$. Ce qui donne : $g'(x) = f(x)$.



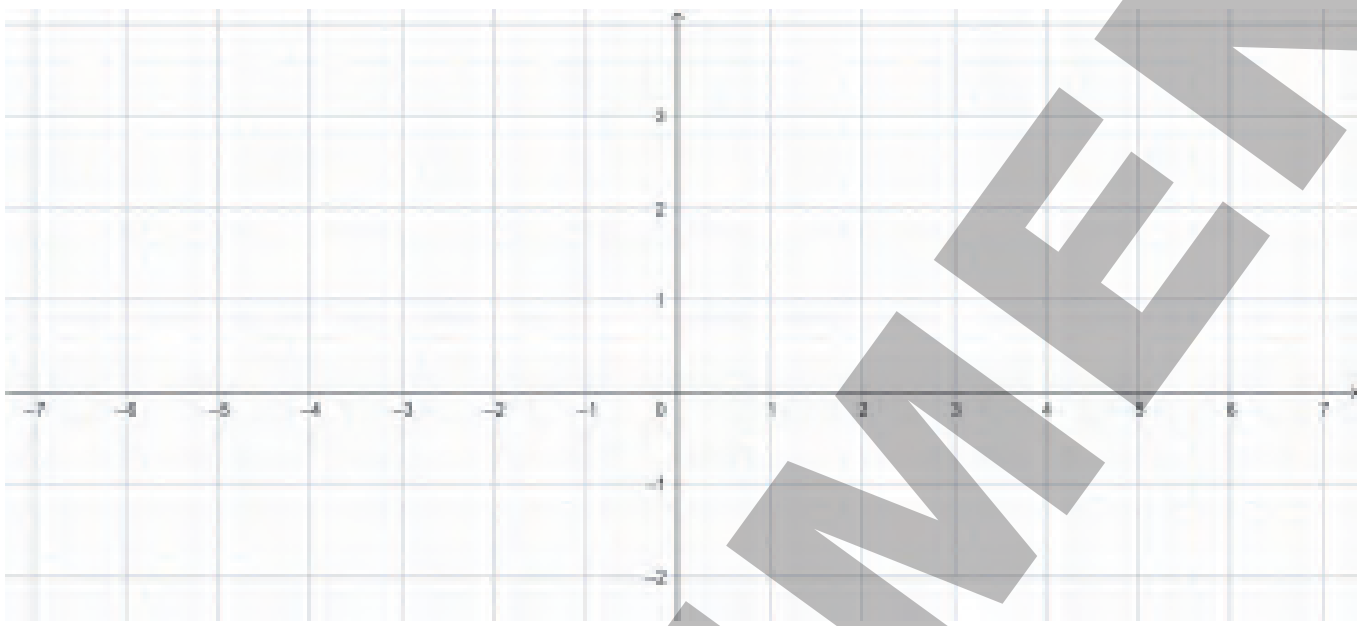
Propriété

Toute fonction continue sur un intervalle I admet au moins une primitive sur I.

SPÉCIMEN

Exercices de fixation

18 Déduis-en la courbe représentative de la fonction g définie sur $]-\infty ; 0[$ par : $g(x) = \ln(-x)$.



5 ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS FAISANT INTERVENIR LA FONCTION LN

1. Équations faisant intervenir la fonction ln

Point méthode

Pour résoudre une équation comportant des logarithmes, on peut utiliser la méthode suivante :
- déterminer les contraintes sur l'inconnue ;
- se ramener à une ou plusieurs égalités de la forme : $\ln a = \ln b$.



1. Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'équation :
$\ln(3x-2) + \ln(x-1) = \ln(4x+2)$

Contrainte sur l'inconnue :

$3x - 2 > 0$

$x - 1 > 0 \qquad x \quad 1 ; +\infty$

$4x + 2 > 0$

Soit x un élément de $]1 ; +\infty[$, on a :
$\ln(3x-2) + \ln(x-1) = \ln(4x+2) \Leftrightarrow$
$\ln[(3x-2)(x-1)] = \ln(4x+2).$
$\ln[(3x-2)(x-1)] = \ln(4x+2) \Leftrightarrow$
$(3x-2)(x-1) = 4x+2$
$(3x-2)(x-1) = 4x+2 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 3$.

0 n'appartient pas à l'intervalle $]1 ; +\infty[$ et 3 appartient à $]1 ; +\infty[$, donc l'ensemble de solutions de l'équation $\ln(3x-2) + \ln(x-1) = \ln(4x+2)$ est : $\{3\}$

2. Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^3 = 7$

Contrainte sur l'inconnue : $x > 0$

$x^3 = 7 \Leftrightarrow \ln x^3 = \ln 7$ donc $3\ln x = \ln 7$ donc $\ln x = \dfrac{\ln 7}{3}$ soit $\ln x = \ln e^{\frac{\ln 7}{3}}$. On a donc $x = e^{\frac{\ln 7}{3}}$.

On peut aussi écrire que : $x^3 = 7 \Leftrightarrow x = 7^{\frac{1}{3}}$.

L'ensemble des solutions de l'équation proposée est : $\{ e^{\frac{\ln 7}{3}} \}$.

Exercices de fixation

19 Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\ln(1-x) = -2$; b) $\ln(3x-4) = \ln(x^2-4)$;

c) $2e \ln x + 1 = 0$; d) $\ln(x+5) = 2\ln 2 - \ln(x-2)$;

e) $(x^2-1)\ln x = 0$.

.....

.....

.....

.....

.....

SPECIMEN

1 NOTION DE CONTINUITÉ

Définition

Lorsqu'une fonction f est définie en un point a et admet une limite en a, cette limite est égale à $f(a)$. On dit que f est continue en a.



Toute fonction polynôme est continue en tout point de $\mathbb{R}$.
Toute fonction rationnelle est continue en tout point de son ensemble de définition.

Propriété

- La somme de deux fonctions continues en a est une fonction continue en a.
- Le produit de deux fonctions continues en a est une fonction continue en a.
- Le quotient d'une fonction f continue en a par une fonction g continue en a telle que $g(a)$ soit différent de zéro est une fonction continue en a.

2.

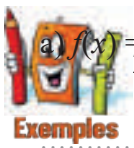
P… logarithmes, on peut utiliser la méthode suivante :

- déterminer les contraintes sur l'inconnue ;
- se ramener à une ou plusieurs inégalités de la forme : $\ln a < \ln b$.

Exercices de fixation

1 Parmi les fonctions ci-dessous, cite celles qui sont continues en 0.

a) $f(x) = x^2 + x + 5$; b) $g(x) = \frac{1}{x}$; c) $h(x) = \frac{x+2}{x-4}$.



1. Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'inéquation : $\ln(3x-2) + \ln(x-1) < \ln(4x+2)$.
Contrainte sur l'inconnue :
$3x - 2 > 0$
$x - 1 > 0$ $x \in]1 ; +\infty[$.
$4x + 2 > 0$

Soit x un élément de $]1 ; +\infty[$, on a : $\ln(3x-2) + \ln(x-1) < \ln(4x+2) \Leftrightarrow \ln[(3x-2)(x-1)] < \ln(4x+2)$.
$\ln[(3x-2)(x-1)] < \ln(4x+2) \Leftrightarrow (3x-2)(x-1) < 4x+2$.
$(3x-2)(x-1) < 4x+2 \Leftrightarrow x(3x-9) < 0$
$x(3x-9) < 0 \Leftrightarrow x \in]0 ; 3[$.
L'ensemble des solutions de l'inéquation $\ln(3x-2) + \ln(x-1) < \ln(4x+2)$ est : $]0 ; 3[\cap]1 ; +\infty[$; c'est-à-dire : $]1 ; 3[$.

2 Les fonctions f et g sont continues en 2 et $f(2) = 0$ et $g(2) \neq 0$.
Parmi les fonctions ci-dessous, cite celles qui sont continues en 2 :
1) $f + g$; 2) $f - g$; 3) fg ; 4) $\frac{f}{g}$; 5) $\frac{1}{f}$; 6) $\frac{g}{f}$

3. Résolvons dans $\mathbb{N}$, l'équation d'inconnue n,
$5^n \leq 1000$
Il n'y a aucune constraint… l'inconnue.
$5^n \leq 1000 \Leftrightarrow \ln 5^n \leq \ln 1000$

$n \ln 5 \leq \ln 1000$. Or $\ln 5 > 0$ donc
$n \leq \frac{\ln 1000}{\ln 5}$

Un… ent…

Définition

On dit qu'une fonction est continue sur un intervalle I si elle est continue en tout point de I.

Exercices de fixation

3 Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

a) La fonction f : $x \mapsto \ln(x^2 + 4x^2)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
b) La fonction $g : x \mapsto \ln(x-e) + \ln(x-e) \leq \frac{1}{x} + \ln 3$ est continue sur $]-1 ; 1[$.
c) La fonction $g : x \mapsto \frac{x^2}{\ln 3}$ est continue sur $]-3 ; +\infty[$.

20 Résous les inéquations suivantes :

a) $\ln(1-x) > 1$; b) $\ln(x^2 + 4e^2) < \ln(3x)$;
c) $\ln(x+e) + \ln(x-e) \leq 2 + \ln 3$;
d) $\ln(2-x) > 2$; e) $\frac{x}{1-x} < \ln x$.



Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.
Toute fonction rationnelle est continue sur tout intervalle ouvert de son ensemble de définition.

Propriété

Si une fonction est dérivable en un point, alors elle est continue en ce point.

2 PRIMITIVE

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On appelle primitive de f sur I, toute fonction F dérivable sur I telle que f soit la dérivée de F.

21 $1 - \frac{\ln}{4} > 0{,}95$.



Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x - 3$ et $g(x) = x^2 - 3x + 7$.
g est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ car g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme toute fonction polynôme et pour tout nombre réel x, on a :
$g'(x) = 2x - 3$. Ce qui donne : $g'(x) = f(x)$.

Propriété

Toute fonction continue sur un intervalle I admet au moins une primitive sur I.

SPÉCIMEN

Série A1 uniquement

6 PRIMITIVES DES FONCTIONS DU TYPE : $\frac{1}{x}$; $x \mapsto \frac{c}{cx+d}$; $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$

Tableau de primitives

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

Fonction f	Une primitive de f	Sur l'intervalle
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto \ln x$	$]0 ; +\infty[$
$x \mapsto \frac{c}{cx+d}$	$x \mapsto \ln(\lvert cx+d \rvert)$	I sur lequel $cx+d \neq 0$
$x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$	$x \mapsto \ln(\lvert u(x) \rvert)$	I sur lequel $u(x) \neq 0$



Une primitive sur $]0 ; 2[$ de la fonction : $x \mapsto \frac{2x}{x^2-4}$ est la fonction : $x \mapsto \ln|x^2-4|$.

Exercice de fixation

22 Dans chaque cas, détermine une primitive de la fonction f sur l'intervalle I :

1 - $f(x) = \frac{1}{x+2}$; $I =]-2 ; +\infty[$

2 - $f(x) = \frac{3}{3x-1}$; $I =]\frac{1}{3} ; +\infty[$

3 - $f(x) = \frac{-5}{-5x+1}$; $I =]-\infty ; \frac{1}{5}[$

4 - $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+5}$; $I = \mathbb{R}$

23 Dans chacun des cas, détermine les primitives de la fonction f sur l'intervalle I considéré.

1. $f(x) = \frac{2}{2x-3'}$, $I = \frac{3}{2} ; +\infty$;
2. $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$, $I = \mathbb{R}$.

SPÉCIMEN

1 NOTION DE CONTINUITÉ

1. Résous dans ℝ, l'équation $(E_1) : 2x^2 - 7x + 6 = 0$.
2. ...olynôme P tel que :
...que : $P(x) = (x+1)(ax^2 + bx + c)$
3. ...e la question 2.b), la résolution de ... $P(x) = 0$.
4. ...de la question 3, la résolution dans ℝ de l'équation $(E_3) : 2(\ln x)^3 - 5(\ln x)^2 - \ln x + 6 = 0$.

Définition

Lorsqu'une fonction f est définie en un point a et admet une limite en a, cette limite est égale à $f(a)$. On dit que f est continue en a.

Exemples Toute fonction polynôme est continue en tout point de ℝ.
Toute fonction rationnelle est continue en tout point de son ensemble de définition.

Propriété

- La somme de deux fonctions continues en a est une fonction continue en a.
- Le produit de deux fonctions continues en a est une fonction continue en a.
- Le quotient d'une fonction f continue en a par une fonction g continue en a telle que $g(a)$ soit différent de zéro est une fonction continue en a.

Exercices de fixation

1 Parmi les fonctions ci-dessous, cite celles qui sont continues en 0.

a) $f(x) = x^2 + x + 5$; b) $g(x) = \frac{1}{x}$; c) $h(x) = \frac{x+2}{x-4}$.

2 Les fonctions f et g sont continues en 2 et $f(2) = 0$ et $g(2) \neq 0$.
Parmi les fonctions ci-dessous, cite celles qui sont continues en 2

1) $f + g$; 2) $f - g$; 3) fg ; 4) $\frac{f}{g}$;
5) $\frac{1}{f}$; 6) $\frac{g}{f}$

Définition

On dit qu'une fonction est continue sur un intervalle I si elle est continue en tout point de I.

Exemples Toute fonction polynôme est continue sur ℝ.
Toute fonction rationnelle est continue sur tout intervalle ouvert de son ensemble de définition.

Exercices de fixation

3 Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes.

a) La fonction $f : x \mapsto x^2 + 4x$ est continue sur ℝ.

b) La fonction $g : x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]-1 ; 1[$.

c) La fonction $g : x \mapsto \frac{x}{x+3}$ est continue sur $]-3 ; +\infty[$.

4. a) Complète le tableau de valeurs suivant :

x	2,5	3	5	7	10
$f(x)$					

...truis (C) sur l'intervalle]2 ; 10].

Propriété

Si une fonction est dérivable en un point, alors elle est continue en ce point.

2 PRIMITIVE

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On appelle primitive de f sur I, toute fonction F dérivable sur I telle que f soit la dérivée de F.

Exemples Soient f et g les fonctions définies sur ℝ par : $f(x) = 2x - 3$ et $g(x) = x^2 - 3x + 7$.
g est une primitive de f sur ℝ car g est dérivable sur ℝ comme toute fonction polynôme et pour tout nombre réel x, on a : $g'(x) = 2x - 3$. Ce qui donne : $g'(x) = f(x)$.

Propriété

Toute fonction continue sur un intervalle I admet au moins une primitive sur I.

SPÉCIMEN

3 On considère la fonction f définie sur $]-\infty ; 3[$ par : $f(x) = \ln(3 - x)$.
(C) est la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité graphique 1 cm.

1. a) Détermine $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

   b) Détermine $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} f(x)$ puis interprète graphiquement le résultat.

2. On suppose que f est dérivable sur $]-\infty ; 3[$.
Détermine la fonction dérivée f' de f sur $]-\infty ; 3[$.
3. Étudie le sens de variation de f puis dresse son tableau de variation.
4. On désigne par (T) la tangente à (C) au point d'abscisse 2.
Détermine une équation de (T).
5. a) Complète le tableau de valeurs suivant :
(On donnera l'arrondi d'ordre 1 des résultats)

x	−5	−3	0	1	2	2,25	2,5	2,75
$f(x)$								

b) Construis (T) et (C) sur l'intervalle $[-5 ; 3[$.

4 On considère la fonction f définie sur $]-\infty ; -1[\cup]3 ; +\infty[$ par : $f(x) = \ln(x^2 - 2x - 3)$.
(C) est la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité graphique 1 cm.

1. a) Détermine $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

   b) Détermine $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} f(x)$

   puis interprète graphiquement le résultat.
2. On suppose que f est dérivable sur $]-\infty ; -1[$ et sur $]3 ; +\infty[$. Détermine la fonction dérivée f' de f sur $]-\infty ; -1[\cup]3 ; +\infty[$.
3. Étudie le sens de variation de f puis dresse son tableau de variation.
4. Démontre que la droite d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie de (C).
5. Construis (C) sur les intervalles $[-8 ; -1[$ et $]3 ; 10]$.

SPÉCIMEN

= ln(x^2 + 2x +2).
(C) courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité gra

1 NOTION DE CONTINUITÉ

Définition

Lorsqu'une fonction f est définie en un point a et admet une limite en a, cette limite est égale à $f(a)$. On dit que f est continue en a.

1.
2. Dé
3. Etudie le sens de variation de f puis dresse son
4. é variation.
   tout point de ℝ.
   e que la droite d'équation $x = -1$ est un
   ymétrie de (C).
5. Construis (C) sur l'intervalle [−10 ; 9].

Exemples
Toute fonction polynôme est continue en tout point de son ensemble de définition.
Toute fonction rationnelle est continue en tout point de son ensemble de définition.

Propriété

- La somme de deux fonctions continues en a est une fonction continue en a.
- Le produit de deux fonctions continues en a est une fonction continue en a.
- Le quotient d'une fonction f continue en a par une fonction g continue en a telle que g(a) soit différent de zéro est une fonction continue en a.

Exercices de fixation

1 Parmi les fonctions ci-dessous, cite celles qui sont continues en 0.

a) $f(x) = x^2 + x + 5$; b) $g(x) = \frac{1}{x}$; c) $h(x) = \frac{x+2}{x-4}$.

2 Les fonctions f et g sont continues en 2 et $f(2) = 0$ et $g(2) \neq 0$.
Parmi les fonctions ci-dessous, cite celles qui sont continues en 2

1) $f + g$; 2) $f - g$; 3) fg ; 4) $\frac{f}{g}$;
5) $\frac{1}{f}$; 6) $\frac{g}{f}$

On considère la fonction f définie sur]0 ; +∞[par : $f($ $)$ $= \ln(x)$.
(C) représentative de f dans le plan muni d'u
gra
La fonction dérivée de f est noté f'.

1. a) Déterm $\lim_{x \to 0}$ $f(x)$.
   Donne une interprétation graphique de ce résultat.
2. a) Détermine $f'(x)$ pour tout nombre réel x appartenant à]0 ;+∞[.
   b) Justifie que f est strictement décroissante sur]1 ;+∞[et strictement croissante sur]0 ; 1[.
   c) Justifie que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle]0 ; +∞[, $f(x) \leq 2$
3. tableau de variation de f sur]1 ;5].
4. ue l'équation $f(x) = 0$ admet une solution
   notée α comprise entre 4 et 5.
5. Construis la courbe (C) sur l'intervalle]0 ; 5].

Exercice de fixation

3 Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes:

a) La fonction $f : x \mapsto x^2 - 4x$ est continue sur ℝ
b) La fonction $g : x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur]−1 ; 1[
c) La fonction $g : x \mapsto \frac{x}{x+3}$ est continue sur]−3 ; + ∞[.

Exemples
Toute fonction polynôme est continue sur ℝ.
Toute fonction rationnelle est continue sur tout intervalle ouvert de son ensemble de définition.

Propriété

Si une fonction est dérivable en un point, alors elle est continue en ce point.

2 PRIMITIVE

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On appelle primitive de f sur I, toute fonction F dérivable sur I telle que f soit la dérivée de F.

Exemples
Soient f et g les fonctions définies sur ℝ par : $f(x) = 2x - 3$ et $g(x) = x^2 - 3x + 7$.
g est une primitive de f sur ℝ car g est dérivable sur ℝ comme toute fonction polynôme et pour tout nombre réel x, on a : $g'(x) = 2x - 3$. Ce qui donne : $g'(x) = f(x)$.

Propriété

Toute fonction continue sur un intervalle I admet au moins une primitive sur I.

SPÉCIMEN

7 Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par
$f(x) = \ln(2+x)$.
(C_f) est la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité graphique 1 cm sur les axes.

1. Détermine l'ensemble de définition de f.
2. Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
3. Détermine $\lim\limits_{x\to-2} f(x)$ puis interprète graphiquement le résultat.
4. On suppose que f est dérivable sur]−2 ; +∞[.Détermine la fonction dérivée f' de f sur]−2 ; +∞[.
5. Étudie le sens de variation de f puis dresse son tableau de variation.
6. Détermine une équation de la tangente (T) au point d'abscisse 2.
7. Résous l'équation $f(x) = 0$.

8 On considère la fonction f définie sur l'intervalle]0,+∞[par : $f(x)=\dfrac{-x+1}{2}+\ln x$

1. a) Calcule la limite de f en 0. Interprète graphiquement ce résultat.

   b) On admet que, pour tout nombre réel x strictement positif, $f(x)=x(\dfrac{-1}{2}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{\ln x}{x})$.

   Calcule la limite de f en +∞.
2. a) On suppose que f est dérivable sur]0,+∞[. Démontre que, pour tout nombre réel x strictement positif, $f'(x)=\dfrac{-x+2}{2x}$

   b) Déduis-en les variations de f.

   c) Établis le tableau de variation de f.
3. a) Vérifie que : $f(1) = 0$.

   b) Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle]3,5 ; 4[. On note α cette solution.

   c) Donne un encadrement de α par deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 1.
4. Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J) d'unités : OI = 2 cm ; OJ = 5 cm.
5. On note (C) la courbe représentative de f.
6. Sur la feuille en annexe, est tracée la droite (Δ) tangente à la courbe au point d'abscisse $x = e$.

SPÉCIMEN

Utilise le tableau de valeur ci-dessous pour tracer (C) sur [0,25 ; 8]. On prendra : α=3,5

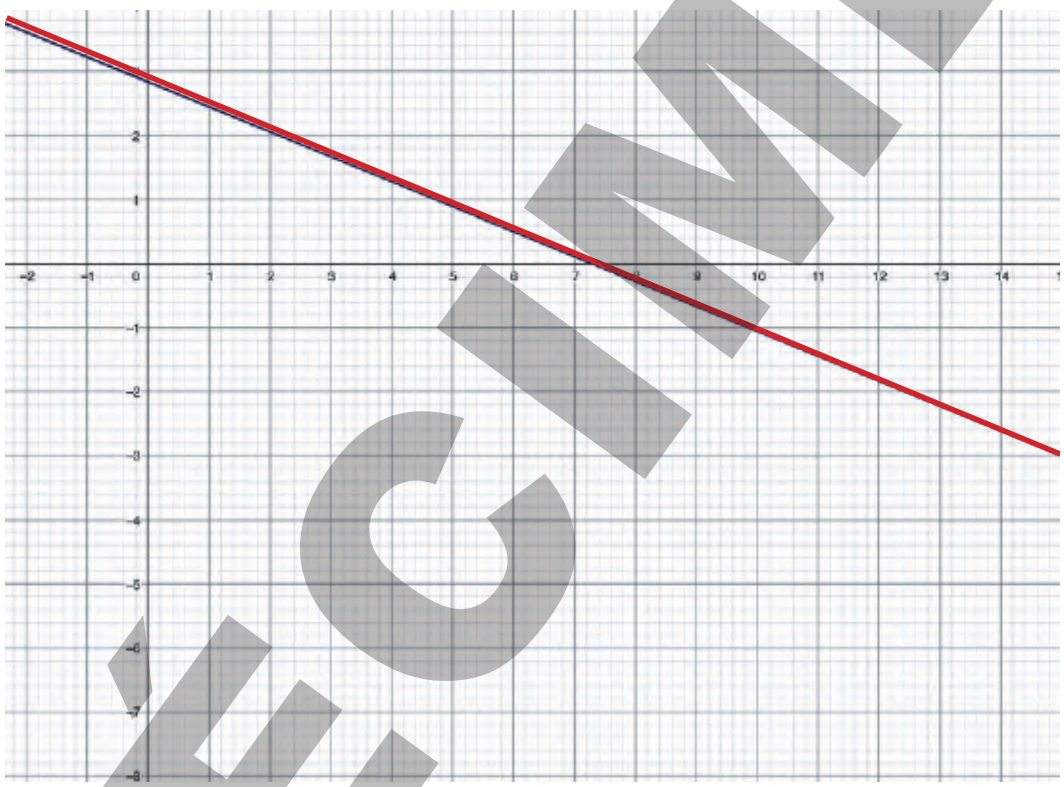
x	0,25	0,5	1	2	3	4	5	6	7	8
Arrondi d'ordre 1 de $f(x)$	−0,1	−0,4	0	0,2	0,1	−0,1	−0,4	−0,7	−1,1	−1,4

(Série A1 uniquement)

5 - a) Justifie que la fonction F définie par : $F(x)=\frac{-x^2}{4}-\frac{1}{2}x+x\ln x$ est une primitive de f sur $]0,+\infty[$.

b) Calcule en fonction de e, l'aire A en cm² de la partie du plan délimitée par la courbe (C) l'axe (OI) et les droites d'équations respectives $x=1$, $x=e$.

c) En prenant $e = 2,7$, justifie que : A = 2,775 cm².



SPÉCIMEN

9 Des élèves d'une classe de Terminale A ont lu le texte suivant dans une revue.
Les archéologues et les paléontologues datent les objets découverts contenant du carbone en mesurant la proportion de carbone 14 encore présent dans l'objet.
En effet, à la mort d'un être vivant, le carbone 14 présent dans son organisme se désintègre au fil des années, de sorte que, si p est la proportion de carbone 14 restant au bout de N années (par rapport à la quantité initiale), on ait : $N = -8130\ln(p)$.
Deux hommes historiques ont des proportions p_1 et p_2 de carbone telles que $0 < p_1 < p_2 < 1$
Bintou affirme que c'est celui qui a le pourcentage p_1 a le fossile le plus ancien tandis que Karidja affirme le contraire.
Tu es sollicité pour les départager. Mais avant que tu fournisses tes arguments sery te donne les informations suivantes :
Le squelette de l'homme de Cro-Magnon contient 5% du carbone 14 initial, la momie
Hibernatus contenait 52,8% du carbone 14 initial lors de sa découverte dans un glacier en 1991.

1. Détermine l'âge du squelette de l'homme de Cro-Magnon et de celui la momie d'hibernatus.
2. Départage Bintou et Karidja en fournissant tes arguments.

10 Dans le cadre de la lutte contre le réchauffement climatique, un pays décide de réduire de 8% chaque année sa consommation de charbon estimé en 2019 à 10 000 tonnes.
Lors d'une conférence de presse, le Ministre des Eaux et Forêt estime que cette lutte sera considérée comme gagnée si le pays réduit avant l'année 2030, sa consommation de charbon à moins de 2 000 tonnes.
Ayant assisté à cette conférence de presse, ton papa, sceptique, te demande si oui ou non, le pays gagnera la lutte contre le réchauffement climatique.
Donne ton avis en le motivant grâce à tes connaissances mathématiques.

SPÉCIMEN

5 FONCTION EXPONENTIELLE NÉPÉRIENNE

Tableau des habiletés et contenus

HABILETÉS	CONTENUS
CONNAÎTRE	- la définition de la fonction exponentielle népérienne - le signe de la fonction exponentielle népérienne - la dérivée de la fonction exponentielle népérienne - le sens de variation de la fonction exponentielle népérienne - la dérivée d'une fonction de chacun des types : • $x \mapsto ax + b + e^x$ • $x \mapsto ax + b - e^x$ • $x \mapsto (ax+b)e^x$ • $x \mapsto \dfrac{e^x}{ax+b}$ • $x \mapsto \exp(ax^2+bx+c)$, où $(a\ ;\ b) \neq (0\ ;\ 0)$ -le résultat $e^0=1$ - les propriétés algébriques de la fonction exponentielle népérienne - Les résultats suivants : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0,\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty,$ $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0,\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty.$ - les primitives des fonctions de chacun des types : $x \mapsto e^x$ (A_1 uniquement) $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$
NOTER	- la fonction exponentielle népérienne
RECONNAITRE	- la courbe de la fonction exponentielle népérienne
CALCULER	- en utilisant les propriétés algébriques de la fonction exponentielle népérienne - des limites de fonctions comportant la fonction exponentielle népérienne
RÉSOUDRE	- des équations faisant intervenir la fonction exponentielle népérienne - des inéquations faisant intervenir la fonction exponentielle népérienne
	-la fonction dérivée d'une fonction de chacun des types : • $x \mapsto ax + b + e^x$ • $x \mapsto ax + b - e^x$ • $x \mapsto (ax + b)e^x$ • $x \mapsto \dfrac{e^x}{ax+b}$ -les limites de fonctions de chacun des types : • $x \mapsto ax + b + e^x$ • $x \mapsto ax + b - e^x$ • $x \mapsto (ax + b)e^x$ • $x \mapsto \dfrac{e^x}{ax+b}$

SPÉCIMEN

ÉTUDIER	les variations d'une fonction de chacun des types : • $x \mapsto ax + b + e^x$ • $x \mapsto ax + b - e^x$ • $x \mapsto (ax + b)e^x$ • $x \mapsto \dfrac{e^x}{ax+b}$ en utilisant le signe de la fonction dérivée
DRESSER	le tableau de variation d'une fonction de chacun des types : • $x \mapsto ax + b + e^x$ • $x \mapsto ax + b - e^x$ • $x \mapsto (ax + b)e^x$ • $x \mapsto \dfrac{e^x}{ax+b}$
REPRÉSENTER	graphiquement une fonction de chacun des types : • $x \mapsto ax + b + e^x$ • $x \mapsto ax + b - e^x$ • $x \mapsto (ax + b)e^x$ • $x \mapsto \dfrac{e^x}{ax+b}$
TRAITER UNE SITUATION	faisant appel à la fonction exponentielle népérienne

Situation d'apprentissage

Un élève en classe de Terminale a mis en ligne une vidéo de son chien. Un mail l'informe que la fonction qui modélise le nombre de vues de sa vidéo n jours après sa mise en ligne est donnée par la fonction exponentielle.
Pour déterminer le nombre de vues n jours après sa mise en ligne, les élèves de sa classe décident d'étudier la fonction exponentielle népérienne.



SPÉCIMEN

1 DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS

1. Définition

La fonction exponentielle népérienne est la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien.

Notation

La fonction exponentielle népérienne est notée exp. exp(x) est aussi notée e^x.

Conséquences de la définition

$x \quad \mathbb{R} \qquad y \quad 0;+\infty$

$y = \exp(x) \qquad x = \ln y$

L'ensemble de définition de la fonction exponentielle népérienne est $\mathbb{R}$.
La fonction exponentielle népérienne est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
La fonction exponentielle népérienne est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0 ; +\infty[$.

- $e^0 = 1$
- $x \quad \mathbb{R}, \ln(\exp(x)) = x$. On écrit aussi : $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(e^x) = x$.
- $x \quad 0;+\infty \quad , \exp(\ln(x)) = x$.

On écrit aussi : $\forall x \in]0 ; +\infty[, e^{\ln x} = x$.

Exercice de fixation

1 Réponds par vrai ou par faux.

N°	Affirmations	Réponses
1	La fonction exponentielle népérienne est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.	
2	La fonction exponentielle népérienne est la réciproque de la fonction : $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$.	
3	L'ensemble de définition de la fonction exponentielle népérienne est $\mathbb{R}$.	
4	La fonction exponentielle népérienne est une fonction strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.	
5	–20 est inférieur à 0 donc exp(–20) est inférieur à 0.	
6	$\ln e^{\ln 4} = \ln 4$.	
7	$e^{\ln 2} = 2\ln 2$.	
8	$e^{\ln 3} = 3$.	
9	$y = \ln 4 \Leftrightarrow e^y = 4$.	

Propriété

Pour tous nombres réels a et b, on a : $e^{a+b} = e^a \times e^b$.



$e^5 \times e^2 = e^7$
$e^{-4} = e^{-2} \times e^{-2}$

Exercice de fixation

2 Écris sous la forme e^a où a est un nombre réel, les nombres réels suivants :

a) $e^6 \times e^{-4}$; b) $e^8 \times e^3$; c) $e^{-3} \times e^{-4}$;

d) $e^{-5} \times e^3$.

SPECIMEN

Propriété

Pour tous nombres réels a et b et pour tout nombre rationnel r, on a :

1) $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$ 2) $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$ 3) $e^{ar} = \left(e^a\right)^r$



$e^{-4} = \dfrac{1}{e^4}$; $\dfrac{e^{-2}}{e^8} = e^{-2-8}$, *donc* $\dfrac{e^{-2}}{e^8} = e^{-10}$; $\left(e^{-5}\right)^3 = e^{-5\times 3}$, *donc* $\left(e^{-5}\right)^3 = e^{-15}$.

Exercice de fixation

3 Écris sous la forme e^a, où a est un nombre réel, les nombres réels suivants :

a) $\dfrac{e^7}{e^3}$; b) $\left(e^{-5}\right)^6 \cdot e^3$; c) $\dfrac{e^7 \cdot e^{-4}}{e^3}$;

d) $\dfrac{e^{1+\ln 3}}{e^{2+\ln 3}}$.

4 Écris sous la forme e^a, où a est un nombre réel, les nombres réels suivants :

a) $\dfrac{1}{\left(e^{-3}\right)^2} \times \dfrac{\left(e^4\right)^{-1}}{e^2 \times e^{-6}}$; b) $\left(e^{-2}\right)^{-3} \cdot \left(e^{-4}\right)^2$.

2 ÉTUDE DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

1. Propriétés

- *La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel x, on a : (exp)'(x) = exp(x).*
- *Pour tous nombres réels a et b strictement positifs, $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$; $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$.*



- $e^x = e^{-5} \Leftrightarrow x = -5$
- $e^x < e^{-5} \Leftrightarrow x < -5$

SPÉCIMEN

Exercice de fixation

5 Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

	Affirmations	Réponses
a	$e^x = 2 \Leftrightarrow x = 2$	
b	$e^x > 2 \Leftrightarrow \ln 2 < x$	
c	$\ln e^x < 3 \Leftrightarrow x > 3$	
d	$x > -1 \Leftrightarrow e^{-1} < e^x$	

2. Limites de fonction exp

Propriété

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$
4. $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$

Exemples

Calculons : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^x - x\right)$.

$e^x - x = x\left(\dfrac{e^x}{x} - 1\right)$. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$,

donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{e^x}{x} - 1\right) = +\infty$;

Or : $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ d'où :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^x - x\right) = +\infty$.

Exercice de fixation

6 Calcule chacune des limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-2e^x + x\right)$; b) $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x}$;

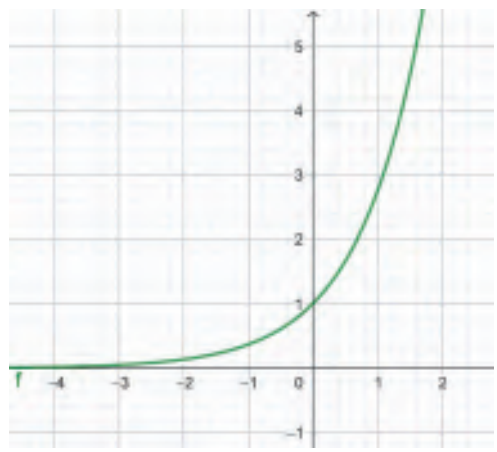
c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(e^x - x\right)$; d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 + e^x}{e^x}$;

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(-x + 4e^x\right)$.

3. Courbe représentative

Tableau de variation

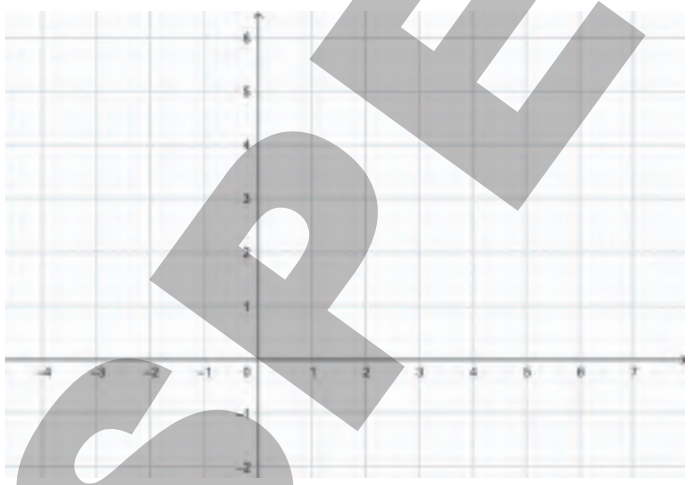
x	$-\infty$		$+\infty$
$(\exp)'(x)$		$+$	
$\exp(x)$	0	↗	$+\infty$



SPÉCIMEN

Exercice de fixation

7 Construis la courbe représentative de la fonction $x \mapsto e^{-x}$. Explique ta méthode.



3 ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS FAISANT INTERVENIR LA FONCTION *exp*

1. Équations faisant intervenir la fonction *exp*

Exemples

Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'équation :
$e^{2x} - 2e^x = 15$.
$e^{2x} - 2e^x = 15 \Leftrightarrow (e^x)^2 - 2e^x - 15 = 0$.
Posons : $X = e^x$; $X > 0$.

On a : $X^2 - 2X - 15 = 0 \Leftrightarrow (X - 5)(X + 3) = 0$
$(X - 5)(X + 3) = 0 \Leftrightarrow X = 5$ ou $X = -3$
Comme X est positif, on a : $X = 5$. D'où : $e^x = 5$.
Par suite, $x = \ln 5$.
L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $e^{2x} - 2e^x = 15$ est : $\{\ln 5\}$.

Exercice de fixation

8 Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $e^{3x} - 5e^x = 0$; b) $e^{3x+4} = 2$;

c) $e^{-x} = 2e^x$; d) $e^{2x} - 3e^x + 3 = 0$;

e) $e^{3x}(e^{x+3} - 1) = 0$.

SPÉCIMEN

2. Inéquations faisant intervenir la fonction *exp*



Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'inéquation :
$2e^{2x} - 3e^x - 2 < 0$
Posons : $X = e^x$; $X > 0$.

On a : $2e^{2x} - 3e^x - 2 < 0 \Leftrightarrow 2X^2 - 3X - 2 < 0$
$2X^2 - 3X - 2 < 0 \Leftrightarrow (2X + 1)(X - 2) < 0$
$X > 0$ et $(2X + 1)(X - 2) < 0 \Leftrightarrow 0 < X < 2$.
$e^x < 2 \Leftrightarrow x < \ln 2$.
Dans $\mathbb{R}$, l'ensemble de solutions de l'inéquation :
$2e^{2x} - 3e^x - 2 < 0$ est : $]-\infty ; \ln 2[$

Exercice de fixation

9 Résous dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $3e^{2x} - 16e^x + 5 \geq 0$; b) $e^{2x+3} < \ln 3$;

c) $\dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} < -1$; d) $2e^{2x+1} - 3e^x + 1 < 2e$.

Série A1 uniquement

4 PRIMITIVES DES FONCTIONS DU TYPE : $x \mapsto e^x$; $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$ (A_1)

Tableau de primitives

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

Fonction f	Une primitive de f	Sur l'intervalle
$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$	$x \mapsto e^{u(x)}$	I

Exercice de fixation

10 Dans chaque cas, détermine une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

1 - $f(x) = e^x$;
2 - $f(x) = 2e^{2x+1}$;
3 - $f(x) = (2x + 3)e^{x^2+3x-5}$.

SPÉCIMEN

1

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ >}} \dfrac{e^x}{(x-3)^2}$; 2) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} \dfrac{e^x}{-x+2}$; 3) $\lim\limits_{\substack{x\to \frac{1}{2}\\ <}} \dfrac{e^x}{2x-1}$; 4) $\lim\limits_{\substack{x\to \frac{2}{3}\\ >}} \dfrac{e^x}{2-3x}$.

2 Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par :
$P(x) = x^3 - 7x + 6$.

1. Justifie que 1 est un zéro du polynôme P.
2. Détermine les nombres réels a et b tels que :
3. pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x-1)(x^2 + ax + b)$.
4. Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2 + x - 6 = 0$.
5. Déduis des questions précédentes les solutions dans $\mathbb{R}$:
   a) l'équation : $P(x) = 0$;
   b) l'inéquation : $P(x) \leq 0$.
6. Déduis - en la résolution dans $\mathbb{R}$ l'équation :
   a) $e^{3x} - 7e^x + 6 = 0$;
   b) $e^{3x} - 7e^x + 6 \leq 0$.

3 Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$f(x) = e^{-2x+1}$
(C_f) est la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité graphique 1 cm sur les axes.

1. a) Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
   b) Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et interprète graphiquement ce résultat.
2. a) On suppose que f est dérivable $\mathbb{R}$. Détermine la dérivée f' de f.
   b) Étudie le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.
3. Construis (C_f).

SPÉCIMEN

4 Soit la fonction numérique f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x - 2 + e^x$
(C) est la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité graphique 1 cm sur les axes.

1. Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2. a) On suppose que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Détermine la dérivée f' de f.
   b) Étudie le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.
3. a) Démontre que l'équation $x - 2 + e^x = 0$ admet une unique solution notée dans l'intervalle $]0 ; 1[$.
   b) Justifie que : $0{,}44 < \alpha < 0{,}45$.
4. a) Démontre que la droite d'équation $y = x - 2$ est une asymptote à la courbe de f en $-\infty$.
   b) Étudie la position relative de (C) et (D).
   Construis (C) et (D) dans un même repère.

5 Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = -x + 1 + e^x$
(C) est la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité graphique 1 cm sur les axes.

1. Calcule : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2. a) On suppose que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Détermine la dérivée f' de f.
   b) Étudie le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.
3. a) Démontre que la droite (D) d'équation $y = -x + 1$ est une asymptote à la courbe de f en $-\infty$.
   b) Étudie la position relative de (C) et (D).
4. Construis (D) et (C) dans un même repère.

SPÉCIMEN

6 Soit la fonction numérique f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = e^{x^2+2x-1}$

(C) est la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité graphique 1 cm sur les axes.

1. a) Détermine l'ensemble de définition de f.
   b) Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
2. a) On suppose que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Détermine la dérivée f' de f.
   b) Étudie le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.
3. Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 1$
4. a) Détermine une équation de la tangente à (C) au point d'abscisse 1.
   b) Construis (C):

7 On donne la fonction f définie en tout élément x de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par: $f(x) = \dfrac{e^x}{x-1}$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé (0, I, J).

L'unité graphique est le centimètre

1. a) Calcule la limite de f en $-\infty$ puis interprète graphiquement le résultat.
   b) Calcule la limite de f en $+\infty$.
   c) Calcule $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ x<1}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ x>1}} f(x)$ puis interprète graphiquement les résultats.
2. a) On suppose que f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Détermine $f'(x)$ pour tout x élément de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$
   b) Étudie le sens de variation de f puis dresse son tableau de variation.
3. Construis la courbe (C).

SPÉCIMEN

8 On donne la fonction f définie en tout élément x de $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2x+1)e^x$.
On note (C) la courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J).
l'unité graphique est le centimètre

1. Calcule les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. a) On suppose que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Détermine $f'(x)$ pour tout x élément de $\mathbb{R}$.
   b) Étudie le sens de variation de f puis dresse son tableau de variation.
   c) Construis la courbe (C).

9 On donne la fonction f dérivable en tout élément x de $\mathbb{R}$ et définie par : $f(x) = xe^x$.
On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J).
L'unité graphique est le centimètre.

1. Calcule les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$
2. On suppose que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   a) Détermine $f'(x)$ pour tout x élément de $\mathbb{R}$.
   b) Étudie le sens de variation de f puis dresse son tableau de variation .
3. Construis la courbe (C).

SPÉCIMEN

10 On donne la fonction f dérivable en tout élément x de $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ et définie par : $f(x) = \dfrac{e^x}{-x+2}$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J).
L'unité graphique est le centimètre.

1. a) Calcule la limite de f en $-\infty$ puis interprète graphiquement le résultat.
   b) Calcule la limite de f en $+\infty$.
   c) Calcule $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ puis interprète graphiquement les résultats.
2. a) On suppose que f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$. Détermine $f'(x)$ pour tout x élément de $\mathbb{R}\backslash\{2\}$.
   b) Étudie le sens de variation de f puis dresse son tableau de variation. Construis la courbe (C).

11 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = (-2x + 1)e^x$.
On désigne par (C) sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé
(O, I, J). L'unité graphique est 2 cm.

1. Calcule la limite de f en $+\infty$
2. En remarquant que $f(x) = -2xe^x + e^x$, calcule la limite de f en $-\infty$ et interprète graphiquement le résultat.
3. a) On suppose que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Démontre que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = -(2x+1)e^x$.
   b) Justifie que, pour tout x élément de $]-\infty ; \dfrac{1}{2}[$, $f'(x) > 0$.
   c) Justifie que, pour tout x élément de $]-\dfrac{1}{2} ; +\infty[$, $f'(x) < 0$.
   d) Déduis des questions précédentes les variations de f
4. Détermine une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.
5. a) Recopie et complète le tableau de valeurs ci-dessous :

x	-5	-3	-1	$-0,5$	0	0,5	1
Arrondi d'ordre 1 de $f(x)$	0,3	1,1	1	2,7			

   b) Construis (T) et (C)

(Série A1 uniquement)

6. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $F(x) = -(2x-3)e^x$.
7. a) On suppose que F est dérivable sur $\mathbb{R}$.
8. Démontre que F est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f.
9. b) Déduis - en l'aire de la partie du plan délimitée par (C), l'axe des abscisses et les droitesd'équations respectives $x = -1$ et $x = 0$.
10. c) Sachant que l'unité d'aire est égale à 4 cm², exprime l'arrondi de la valeur de l'aire à1'unité.

SPÉCIMEN

SPÉCIMEN

12 Pendant les vacances, tu travailles dans une grande chaîne de magasin. Ce magasin veut informer la population des nouvelles offres promotionnelles. Le service marketing a observé que la proportion P de la population qui est au courant de ces nouvelles offres après t jours d'annonces publicitaires est donnée par la fonction: $P(t) = 1 - e^{-0,21t}$.

Le magasin veut arrêter cette publicité lorsque 90% de la population sera au courant des nouvelles offres. Elle te sollicite pour savoir après combien de jours elle pourra arrêter sa publicité.

1. Détermine la proportion de la population qui sera informée après 3 jours.
2. Détermine le nombre de jours nécessaires à la grande chaîne de magasins pour faire la publicité de ces nouvelles offres.

SPÉCIMEN

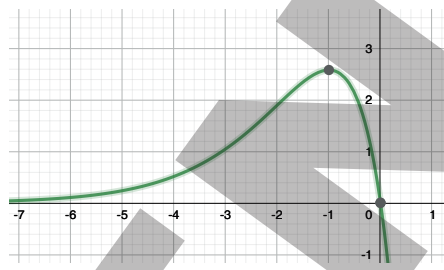
EXEMPLE DE DEVOIR DE NIVEAU



2e TRIMESTRE

SPÉCIMEN

Polynôme – fraction rationnelle ; ln ; exp ; calcul intégral ; probabilité



Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = -7xe^x$.
Cette fonction admet sur $\mathbb{R}$ une dérivée f'. On donne ci-contre la courbe (C_f) représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité 1 cm.
Pour chacune des affirmations suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, l'absence de réponse ne rapportent, ni n'enlèvent aucun point.
Indique sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

1)
a. f' est positive sur l'intervalle $[-6 ; 0]$
b. f' est positive sur l'intervalle $[-1 ; 0]$
c. f' est positive sur l'intervalle $[-6 ; -1]$
d. f' est nulle sur $[-6 ; 0]$

2) L'expression de la fonction dérivée f' de f est :
a. $f'(x) = -7xe^x$; b. $f'(x) = = 7(-x + 1)e^x$; c. $f'(x) = 7(-x - 1)e^x$; d. $f'(x) = 7(x - 1)e^x$.

3) **(Série A1 seulement)**
Une primitive F de f est telle que :
a. $F(x) = -7xe^x$ b. $F(x) = 7(-x + 1)e^x$ c. $F(x) = 7(-x - 1)e^x$ d. $F(x) = 7(x - 1)e^x$.

4) **(Série A1 seulement)**
L'aire A en cm² de la partie du plan délimitée par (C), l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = -3$ et $x = 0$ vérifie :
a. $A = 3$ b. $3 < A < 4$ c. $4 < A < 5$ d. $5 < A < 6$.

Exercice 2

On considère le polynôme P tel que $P(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 16$
1) Calcule $P(1)$.
2) Justifie que : $P(x) = (x-1)(x - 4)^2$
3) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation : $P(x) = 0$
4) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\ln(x)^3 - 9(\ln x)^2 + 24\ln x - 16 = 0$.

Exercice 3

On considère la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x - 1}{x - 1}$
(C) est la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé (O , I, J) d'unité 1 cm.
1) Détermine l'ensemble de définition de f .
2) Étudie les limites aux bornes de l'ensemble de définition de f.
3) Justifie que la droite d'équation $x = 1$ est asymptote à (C).
4) a) Détermine les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction d définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par ; $d(x) = f(x) - (2x - 1)$
b) Interprète graphiquement les résultats des limites précédentes.
5) Étudie la position de la droite (D) d'équation $y = 2x - 1$ par rapport à la courbe (C).

SPÉCIMEN

5) a) Vérifie que pour tout x élément de $\mathbb{R}\setminus\{1\}, f'(x) = 2 + \frac{2}{(x-1)^2}$

b) Étudie les variations de f sur son ensemble de définition et dresse son tableau de variation.

6) Donne une équation de la tangente à la courbe (C) en 2.

7) Trace les asymptotes, la tangente en 2 et la courbe (C) dans le plan.

Exercice 4

(Série A1 seulement)

Un jeune crée une entreprise de fabrication de jus de fruits dont le coût total journalier de production de x litres, selon un expert de passage dans son pays est donné par la fonction C définie sur l'intervalle [1; 50] par:

$C(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 200$.

Les coûts sont exprimés en centaines de francs CFA. Le prix de vente d'un litre de ce jus est de 2 300 FCFA.
Pour la bonne marche de son entreprise qui emploie dix(10) salariés, le jeune a deux préoccupations:

- ✦ Détermine le nombre de litres de jus pour lequel le bénéfice journalier est maximum.
- ✦ Détermine le nombre de litres de jus pour lequel le coût total moyen journalier est minimum.

Le jeune entrepreneur te sollicite pour l'aider a trouver des réponses à ses préoccupations.
Produis pour lui une solution argumentée.

SPÉCIMEN

6 SÉRIE STATISTIQUE DOUBLE

Tableau des habiletés et contenus

TA2

HABILETÉS	CONTENUS
CONNAÎTRE	- la définition du nuage de points d'une série statistique double` - la définition du point moyen d'un nuage de points d'une série statistique double - une équation de la droite d'ajustement linéaire par la méthode de Mayer
REPRÉSENTER	- un nuage de points dans le plan muni d'un repère orthogonal - une droite d'ajustement de Y en fonction de X - une droite d'ajustement de X en fonction de Y
CALCULER	les coordonnées du point moyen
PLACER	le point moyen d'un nuage de points dans le plan muni d'un repère orthogonal
DÉTERMINER	une équation d'une droite d'ajustement linéaire par la méthode de Mayer
ESTIMER	la valeur de l'un des caractères connaissant la valeur correspondante de l'autre caractère : • à l'aide d'une équation d'une droite d'ajustement • à l'aide de la représentation graphique d'une droite d'ajustement
TRAITER UNE SITUATION	faisant appel à la statistique à deux variables

TA1

HABILETÉS	CONTENUS
CONNAÎTRE	- la définition d'une série statistique à deux caractères - la définition du point moyen - les tableaux de fréquences marginales - la formule de la covariance - la formule du coefficient de corrélation linéaire - les formules de calcul de a et b (resp. a' et b') dans l'équation $y = ax + b$ (resp. $x = a'y+b'$) d'une équation de la droite de régression par la méthode des moindres carrées de y en x (resp. x en y).
ETABLIR	- les séries marginales à partir d'un tableau à double entrée représentant une série statistique à deux caractères
REPRÉSENTER	- un nuage de points dans le plan muni d'un repère orthogonal - une droite d'ajustement de Y en fonction de X - une droite d'ajustement de X en fonction de Y
CALCULER	- les coordonnées du point moyen - la variance - la covariance - le coefficient de corrélation linéaire
PLACER	le point moyen d'un nuage de points dans le plan muni d'un repère orthogonal
INTERPRÉTER	le coefficient de corrélation linéaire
DÉTERMINER	- une équation d'une droite d'ajustement linéaire par la méthode de Mayer - une équation d'une droite d'ajustement linéaire par la méthode des moindres carrés
ESTIMER	la valeur de l'un des caractères connaissant la valeur correspondante de l'autre caractère : • à l'aide d'une équation d'une droite d'ajustement • à l'aide de la représentation graphique d'une droite d'ajustement
TRAITER UNE SITUATION	faisant appel à la statistique à deux variables

SPÉCIMEN

Situation d'apprentissage

Le professeur de philosophie d'une classe de terminale A a relevé dans le tableau ci-dessous les moyennes annuelles de dix de ses élèves au cours de l'année scolaire 2016-2017 et leurs notes obtenues au Bac 2017 série A.

Moyenne annuelle en Philosophie	12	13	12	14	12	14	12	11	11	14
Note de philosophie au Bac	13	15	14	16	13	13	12	11	12	15

Un élève de l'année en cours affirme qu'il y a un lien entre la moyenne annuelle de philosophie en classe et la note de philosophie du BAC. Les élèves décident alors de faire des calculs en statistique pour vérifier cette affirmation.

SPÉCIMEN

1 DÉFINITION ET NUAGE DE POINTS

a) Série statistique double

On suppose que, suite à une étude faite, on s'intéresse à deux caractères quantitatifs X et Y sur une population donnée.
À chaque individu i de cette population, on associe le couple $(x_i ; y_i)$ de nombres réels où x_i est la valeur de la première variable X pour l'individu considéré et y_i est la valeur de la seconde variable Y pour le même individu.
L'ensemble de ces couples forme une série statistique à deux variables (X, Y) ou encore série statistique double.

X	x_1	x_2	…	x_n
Y	x_1	x_2	…	x_n



Tableau linéaire

La taille moyenne d'un jeune enfant est donnée, en fonction de son âge (en mois), dans le tableau suivant :

Age x_i (en mois)	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33
Taille y_i (en cm)	66	71	74	77	80	83	85	88	90	92

La taille d'un enfant de 12 mois est de 74 cm.
Tous les caractères considérés dans la suite sont quantitatifs et les tableaux seront linéaires.

b) Nuage de points

On appelle nuage de points d'une série statistique double (X, Y), l'ensemble des points de coordonnées $(x_i ; y_i)$ représentés dans un repère orthogonal.

Exercice de fixation

1 Un responsable de ventes de magasin analyse l'évolution de son chiffre d'affaires sur la dernière période. Il relève pour cela le montant des frais de publicité engagés sur la même période. Il dresse le tableau suivant (les montants sont exprimés en centaines de mille)

Frais de publicité x_i	10	6	6,5	11,5	11	8	7	6,5	11	9
Chiffre d'affaires y_i	250	220	228	262	268	244	240	222	259	246

Représente le nuage de points de cette série.

SPÉCIMEN

2 POINT MOYEN D'UN NUAGE

Définition

On appelle point moyen d'un nuage de N points M*i* de coordonnées (*xi* ;*yi*) associé à une série statistique double (X, Y), le point G de coordonnées $(\overline{X}; \overline{Y})$ telles que :

$$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n}{N}$$

$$\overline{Y} = \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + y_n}{N}$$



Une distribution statistique relatant les résultats d'une étude sur les parcelles de 6 paysans se présente comme suit :

Superficie en ha (X_i)	2	4	6	8	10	12
Production en tonnes (Y_i)	2	5	8	12	15	21

N = 6. Soit G le point moyen du nuage de points associé à cette série statistique.

On a :

$\overline{X} = \frac{2+4+6+8+10+12}{6}$; $\overline{X} = 7$.

$\overline{Y} = \frac{2+5+8+12+15+21}{6}$; $\overline{Y} = 10{,}5$.

Donc G (7 ; 10,5).

Exercices de fixation

2 Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

1. Les coordonnées du point moyen $G(\overline{X}; \overline{Y})$ d'un nuage de N points d'une série statistique double (X, Y) sont telles que $\overline{X} = x_1 + x_2 + x_3 \ldots + x$; $\overline{Y} = y_1 + y_2 + y_3 \ldots + y_n$
2. Les coordonnées du point moyen $G(\overline{X}; \overline{Y})$ d'un nuage de N points d'une série statistique double (X, Y) sont telles que : $\overline{X} = \frac{x_1}{N} + \frac{x_2}{N} + \ldots + \frac{x_n}{N}$; $\overline{Y} = \frac{y_1}{N} + \frac{y_2}{N} + \ldots + \frac{y_n}{N}$
3. Les coordonnées du point moyen $G(\overline{X}; \overline{Y})$ d'un nuage de N points d'une série statistique double (X, Y) sont telles que $\overline{X} = \frac{x_1 + x_n}{N}$; $\overline{Y} = \frac{y_1 + y_n}{N}$

3 Les données sont les mêmes que celles de l'exercice de fixation du paragraphe 1.

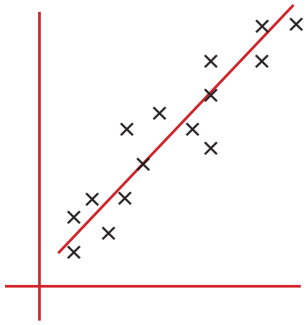
Calcule les coordonnées du point moyen de cette série statistique double.

3 AJUSTEMENT AFFINE

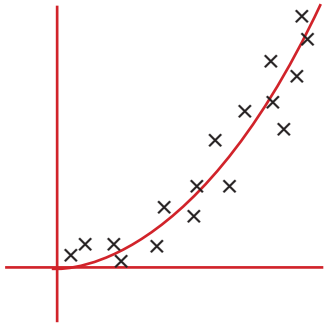
Le principe de l'ajustement

Suivant la forme du nuage de points, on peut essayer de trouver une fonction *f* qui modélise le lien entre les deux caractères (c'est-à-dire que la courbe d'équation $y = f(x)$ passe le plus près possible du maximum des points du nuage).

SPÉCIMEN



Ajustement par une droite (ou affine)



Ajustement par une parabole



La forme du nuage de points ci-dessus ne permet pas de tenter un ajustement…

(Série A2 uniquement)

Ajustement linéaire par la méthode de Mayer

Pour déterminer la droite d'ajustement linéaire par la méthode de Mayer, on peut procéder comme suit :

- partager suivant les valeurs croissantes de x_i le nuage en deux sous nuages d'égal effectif ;
- calculer les coordonnées des points moyens G_1 et G_2 de ces deux sous nuages ;

la droite (G_1G_2) est une droite d'ajustement.
Cette droite est appelée la droite de Mayer. Elle passe par le point moyen G.



En reprenant l'exemple précedent, déterminons une équation de la droite d'ajustement linéaire par la méthode de Mayer.
Considérons les sous séries suivantes :
Sous-série 1

X_i	2	4	6
Y_i	2	5	8

Sous-série 2

X_i	8	10	12
Y_i	12	15	21

Soit G1 le point moyen de la sous-série1, on a :
$\overline{X}_1 = \frac{2+4+6}{3}$; $\overline{Y}_1 = \frac{2+5+8}{3}$. $G_1(4 ; 5)$.
Soit G2 le point moyen de la sous-série2, on a :
$\overline{X}_2 = \frac{8+10+12}{3}$; $\overline{Y}_2 = \frac{12+15+21}{3}$. $G_2(10 ; 16)$.
La droite de Mayer est la droite $(G_1 G_2)$.
Le coefficient directeur a de la droite $(G_1 G_2)$ est donné par : $a = \frac{\overline{Y}_2 - \overline{Y}_1}{\overline{X}_2 - \overline{X}_1}$.
Donc $a = \frac{11}{6}$. $b = \overline{Y}_1 - a\overline{X}_1$ soit $b = \frac{-7}{3}$
Une équation de la droite d'ajustement selon la méthode de Mayer est : $y = \frac{11}{6}x - \frac{7}{3}$.

Exercice de fixation

4 Les données sont les mêmes que celles de l'exercice de fixation du paragraphe 1.
Détermine une équation de la droite d'ajustement par la méthode de Mayer.

SPECIMEN

(Série A1 uniquement)

AJUSTEMENT PAR LA MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS

le principe de l'ajustement est le même que précedement.

1. Covariance d'une série statistique double

Soit une série statistique à deux variables $(x_i ; y_i)$ $(1 \leq i \leq n)$.
On appelle covariance de la série statistique double de variables X et Y, le nombre réel :
$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})(y_i - \overline{Y})$. *On la note :* $Cov(X ; Y)$.

Remarques

- $Cov(X ; Y) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \overline{X}.\overline{Y}$
- $Cov(X ; Y) = Cov(Y ; X)$



Une distribution statistique relatant les résultats d'une étude sur les parcelles de 6 paysans se présente comme suit :

Superficie en ha (X_i)	2	4	6	8	10	12
Production en tonnes Y_i	2	5	8	12	15	21

On a : $\overline{X} = 7$; $\overline{Y} = 10,5$

$Cov(X ; Y) = \frac{1}{6}(2\times 2 + 4\times 5 + 6\times 8 + 8\times 12 + 10\times 15 + 12\times 21) - 7\times 10,5$.

$Cov(X ; Y) = 21,5$

2. Variance d'une série statistique

Soit une série statistique à deux variables $(x_i ; y_i)$ $(1 \leq i \leq n)$.
On appelle variance de la série statistique X le nombre réel : $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{X}^2$. *On la note : V(X).*

Remarque

$V(X) = Cov(X ; X)$



$V(X) = COV(X ; X)$

$V(X) = \frac{1}{6}(2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + 10^2 + 12^2) - 7^2$.

$V(X) = \frac{35}{3}$

L'arrondi d'ordre 2 de V(X) est : 11, 67

3. Écart-type

Soit une série statistique à deux variables $(x_i ; y_i)$ $(1 \leq i \leq n)$.
On appelle écart-type de la série statistique X, la racine carrée de la variance de X.
On la note : σ_X.

Remarques

L'Écart-type s'exprime dans la même unité que les valeurs observées.



L'écart type de cette série statistique est :

$\sigma_X = \sqrt{\frac{35}{3}}$

4. Coefficient de corrélation linéaire

Soit V(X) la variance de la série statistique de caractère X, V(Y) la variance de la série statistique de caractère Y et Cov(X,Y) la covariance de X et Y.
On appelle coefficient de corrélation linéaire entre les caractères X et Y le nombre réel noté r, tel que :

$$r = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}.$$

Ce coefficient permet d'évaluer la dépendance linéaire des deux caractères X et Y.

Remarques

- *Le coefficient de corrélation linéaire r est un nombre réel de même signe que Cov(X,Y) et on a:* $-1 \leq r \leq 1$.
- *Si* $|r|$ *est proche de 1, c'est-à-dire:*
- $0,87 \leq r < 1$ *ou* $-1 < r \leq -0,87$, *alors on dit qu'il y a une bonne corrélation linéaire ou une forte corrélation linéaire entre les deux caractères.*

SPECIMEN

Exemple (après la définition du coefficient de corrélation linéaire)

$V(X) = \frac{35}{3}$; $V(Y) = \frac{1}{6}(2^2 + 5^2 + 8^2 + 12^2 + 15^2 + 21^2) - (10{,}5)^2$

$V(Y) = 40{,}25$

$r = \frac{Cov(X;Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$ donc $r = \frac{21{,}5}{\sqrt{11{,}67 \times 40{,}25}}$

donc une valeur approchée de r est 0,99.

Il existe donc une forte corrélation linéaire entre les caractères X et Y.

5. Droites de régressions

Soit V(X) la variance de la série statistique de caractère X, V(Y) la variance de la série statistique de caractère Y et Cov(X,Y) la covariance de X et Y.

La droite (Δ) d'équation : $y = ax + b$ où

$a = \frac{Cov(X,Y)}{V(X)}$ *et* $b = \overline{Y} - a\overline{X}$ *est appelée la droite de régression de Y en X.*

La droite (Δ') d'équation : $x = a'y + b'$ avec :

$a' = \frac{Cov(X,Y)}{V(Y)}$ *et* $b' = \overline{X} - a'\overline{Y}$ *est appelée la droite de régression de X en Y.*

Chacune des équations de droite a été obtenue par la méthode dite des moindres carrés.

Remarques

- *Les droites (Δ) et (Δ') passent par le point moyen G du nuage de points.*

Si r est le coefficient de corrélation linéaire, on a :

- $aa' = r^2$ *et* $|r| = \sqrt{aa'}$;
- *Si* $a > 0$, *et* $a' > 0$, *alors* $r = \sqrt{aa'}$;
- *Si* $a < 0$, *et* $a' < 0$, *alors* $r = -\sqrt{aa'}$;
- *Si* $r^2 = 1$, *alors* $a = \frac{1}{a'}$ *et les deux droites sont confondues.*

Les derniers recensements de la population d'une ville de Côte d'Ivoire ont abouti aux données suivantes :

Année	1993	1995	1999	2002	2004	2006	2009
Nombre d'années x_i depuis1992	1	3	7	10	12	14	17
Population y_i (en milliers d'habitants)	4,4	4,7	4,8	4,9	5,5	5,5	5,7

On cherche à déterminer à partir de ces données la population de cette ville en 2020.

1. Représentons le nuage de points de la série statistique double (X ; Y).

1 cm pour le nombre d'années après 1992

1 cm pour mille habitants

2. a) Calculons les coordonnées du point moyen G de la série $(x_i ; y_i)$.

b) Déterminons la covariance Cov(X ; Y) de la série $(x_i ; y_i)$.

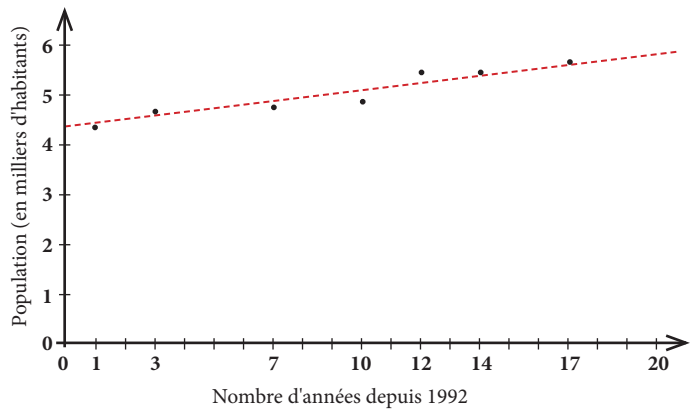
c) Déterminons les variances respectives V(X) et V(Y) des séries statistiques X et Y.

d) Calculons le coefficient de corrélation linéaire de la série $(x_i ; y_i)$.

Un ajustement affine est-il approprié ?

3. Déterminons, par la méthode des moindres carrés une équation de la droite de régression de y en x, ainsi qu'une estimation de la population de cette ville en 2020.

1.



SPECIMEN

2. a) Calculons les coordonnées du point moyen G de la série $(x_i ; y_i)$.

$\overline{X} = \frac{1+3+7+10+12+14+17}{7} = \frac{64}{7} \approx 9{,}1429$ et

$\overline{Y} = \frac{4{,}4+4{,}7+4{,}8+4{,}9+5{,}5+5{,}5+5{,}7}{7} = \frac{35{,}5}{7} \approx 5{,}0714$

b) Déterminons la covariance Cov(X ; Y) de la série $(x_i ; y_i)$.

$\text{Cov}(X ;Y) = \frac{1}{7}(1\times4{,}4 + 3\times4{,}7 + 7\times4{,}8 + 10\times4{,}9 + 12\times5{,}5 + 14\times5{,}5+17\times5{,}7) - 9{,}1429 \times 5{,}0714 = 2{,}347$

c) Déterminons les variances respectives V(X) et V(Y) des statistiques X et Y.

$V(X) = \frac{1}{7}(1^2 + 3^2 + 7^2 + 10^2 + 12^2 + 14^2 + 17^2) - (9{,}1429)^2 = 28{,}9796$

$V(Y) = \frac{1}{7}((4{,}4)^2 + (4{,}7)^2 + (4{,}8)^2 + (4{,}9)^2 + (5{,}5)^2 + (5{,}5)^2 + (5{,}7)^2) - (5{,}0714)^2 = 0{,}2078.$

d) Calculons le coefficient de corrélation linéaire de la série $(x_i ; y_i)$.

Un ajustement affine est-il approprié ?

$r = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} = \frac{2{,}347}{5{,}383\times0{,}456} = 0{,}956.$

Oui, un ajustement linéaire est approprié car :
$0{,}87 \leq r < 1$.

3. Déterminons, par la méthode des moindres carrés une équation de la droite de régression de y en x, ainsi qu'une estimation de la population de cette ville en 2020.

On a : $a = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{V(X)} = \frac{2{,}347}{28{,}9796} = 0{,}081.$

On a : $b = \overline{Y} - a\overline{X} = 5{,}0714 - 0{,}81 \times 9{,}1429 \approx 4{,}331.$
Une équation de la droite de régression est :
$y = 0{,}081x + 4{,}331.$
$2020 - 1992 = 28.$
On a : $y = 0{,}081 \times 28 + 4{,}331.$
$Y = 6{,}599.$
La population est estimée à 6 599 habitants en 2020.

Exercice de fixation

5 Un pharmacien observe, durant les 6 premiers mois de l'ouverture de son officine, le chiffre d'affaires en millions de Francs CFA. Le résultat de l'observation est résumé dans le tableau suivant où x désigne le numéro du mois et y le chiffre d'affaires correspondant.

x	1	2	3	4	5	6
y	12	13	15	19	21	22

1. Détermine Cov(X, Y).
2. Détermine V(X) puis V(Y).
3. Détermine le coefficient de corrélation r entre X et Y.

Interprète le résultat obtenu.

4. a) Détermine une équation de la droite de régression de Y en X par la méthode des moindres carrés.

   b) Détermine une équation de la droite (D) de régression de X en Y par la méthode des moindres carrés.
5. En utilisant la droite (D), détermine une estimation du chiffre d'affaires de cette pharmacie à la fin du 7e mois.

SPÉCIMEN

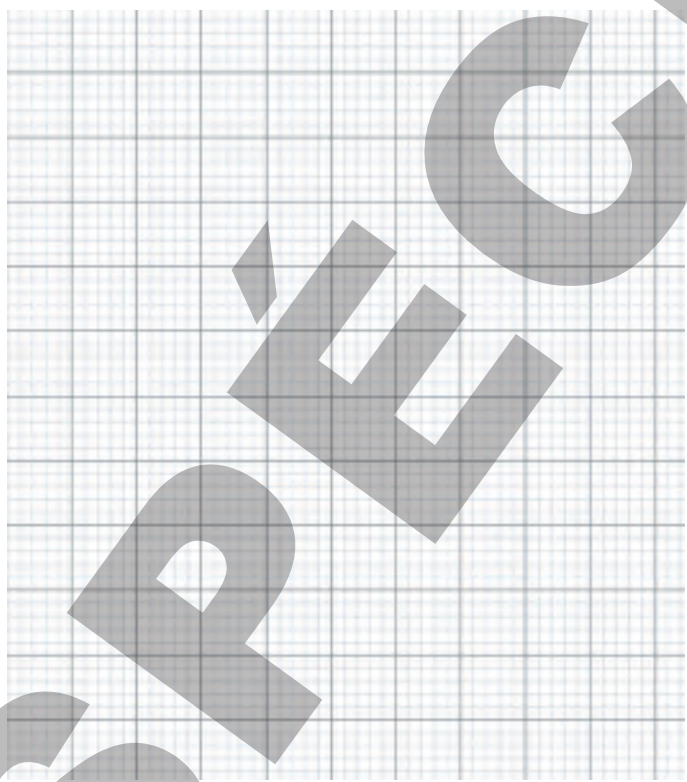
1 Les dépenses x_i et les chiffres d'affaires y_i d'un grossiste sont consignés dans le tableau ci-dessous :

x_i (*en millions de francs*)	13	17	11	20	12	31
y_i (*en millions de francs*)	100	120	85	130	90	140

1. Représente le nuage de points associé à la série (X, Y) dans un repère orthonormé (O, I, J).

Tu prendras:
- en Abscisse 1 cm pour 5 millions ;
- en ordonnées 1 cm pour 10 millions.

2. Détermine puis place le point moyen G du nuage de points.
3. Détermine une équation de la droite de régression (D) de Y en X par la méthode de Mayer.
4. Sur la base de l'ajustement linéaire ainsi réalisé, calcule:
   a) les dépenses si le chiffre d'affaires est de 240 millions;
   b) le chiffre d'affaires pour une dépense de 50 millions.



2 Le tableau ci-dessous donne les notes sur 20 obtenues en Mathématiques et en Physique - Chimie par huit candidats de la série D au Baccalauréat 2005.

x_i est la note de Mathématique, y_i la note de Physique - Chimie.

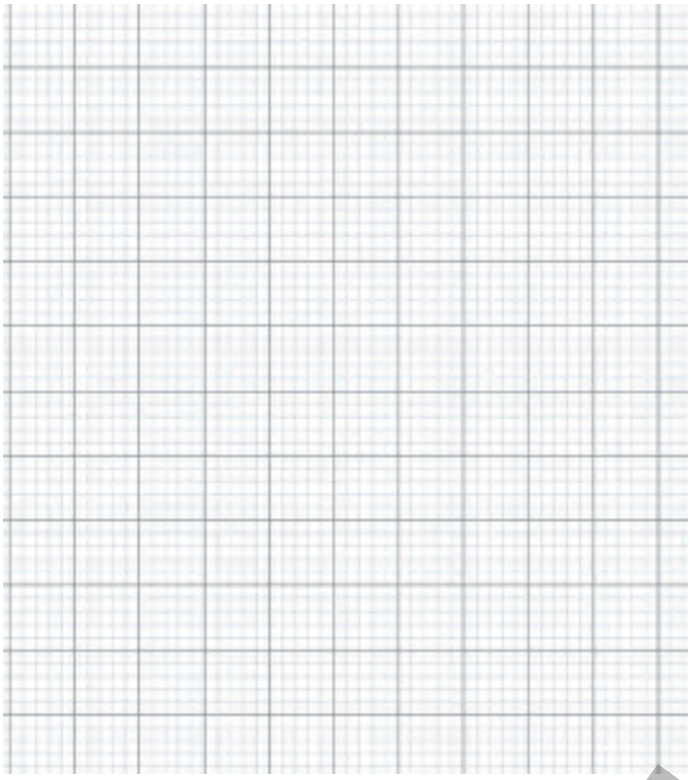
x_i	4	6	7	9	11	14	12	17
y_i	3	4	6	8	10	12	9	14

1. Représente le nuage de points associé à la série (X, Y) dans un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 1 cm.
2. Détermine le point Moyen G puis place G.

Démontre qu'une équation de la droite de régression (D) de Y en X par la méthode de Mayer est : $y = \frac{6}{7}x - \frac{9}{28}$

3. Sur la base de l'ajustement linéaire ainsi réalisé, calcule la note probable :
   a) de Mathématiques d'un candidat qui a 15 sur 20 en Physique-chimie;
   b) de Physique-Chimie pour un candidat qui a 16 sur 20 en Mathématiques.

SPÉCIMEN



3 Le tableau ci-dessous donne l'ancienneté x_i en année et le salaire y_i en milliers de francs CFA par mois de chacun des huit ouvriers d'une exploitation agricole.

x_i	3	5	7	9	12	14	16	18
y_i	68	74	89	101	120	130	135	155

1. Représente le nuage de points en portant en abscisse les valeurs x_i et en ordonnées les valeurs y_i. Sur le graphique, on prendra pour unités : 1 cm pour 1 an en abscisse et 1 cm pour 10 milliers de francs CFA en ordonnées.
2. a) Calcule les coordonnées du point moyen G du nuage de points.
   b) Place G sur le graphique.
3. a) Vérifie que la covariance de la série double $(x_i ; y_i)$ est égale à 145.
   b) Démontre qu'une équation de la droite de régression de y en fonction de x par la méthode des moindres carrés est : $y = \frac{580}{101}x + \frac{4919}{101}$.
   c) Détermine le coefficient de corrélation linéaire r.
   d) Utilise l'ajustement linéaire réalisé pour déterminer le salaire d'un ouvrier dans sa 24ème année.

SPÉCIMEN

4 L'entreprise « Ivoire bois », spécialisée dans l'industrie du bois, envisage de faire des prévisions pour l'année 2019 du coût de production des feuilles de contre-plaqués en fonction du chiffre d'affaires. Elle dispose à cet effet de statistiques résumées dans le tableau ci-dessous :

Années	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Chiffres d'affaires (en millions)	350	380	500	450	580	650	700
Coût de production (en millions)	40	45	50	55	60	65	70

1. Représente le nuage de points associé à la série (X, Y) dans un repère orthonormé (O, I, J)
   - en Abscisse : 1 cm pour 50 millions ;
   - en ordonnée : 1 cm pour 5 millions.
2. a) Calcule le chiffre d'affaires moyen $\overline{X}$
   b) Calcule le cout de production moyen $\overline{Y}$
3. Détermine une équation de la droite de régression (D) de Y en X par la méthode deMayer .

Série A1

4. a) Calcule le coefficient de corrélation linéaire puis interprète ce résultat.
   b) Détermine une équation de la droite de régression (D) de Y en X par la méthode de des moindres carrés.

Pour les séries A1 et A2

5. Sur la base de l'ajustement linéaire ainsi réalisé, calcule;
   a) le coût de production si le chiffre d'affaires en 2019 est de 800 millions.
   b) le chiffre d'affaires si le coût de production est de 90 millions.

SPÉCIMEN

5 Le tableau suivant donne les bénéfices exprimés en millions de francs CFA d'un magasin de riz de 2001 à 2010.

Rang x_i de l'année	0	1	2	3	4
Bénéfices y_i en millions de FCFA	8,13	9,23	10,97	12,85	12,5

5	6	7	8	9
13,15	14,02	14,71	15,20	16

1. a) Représente le nuage de points M(x_i, y_i) dans un repère orthogonal.
   b) Calcule les coordonnées du point moyen G et place-le sur le graphique.
2. En divisant la série (X, Y) en deux séries (X_1,Y_1) et (X_2,Y_2) comme suit :

série (X_1,Y_1)

Rang x_i de l'année	0	1	2	3	4
Bénéfices y_i en millions de FCFA	8,13	9,23	10,97	12,85	12,5

série (X_2,Y_2)

Rang x_i de l'année	5	6	7	8	9
Bénéfices y_i en millions de FCFA	13,15	14,02	14,71	15,20	16

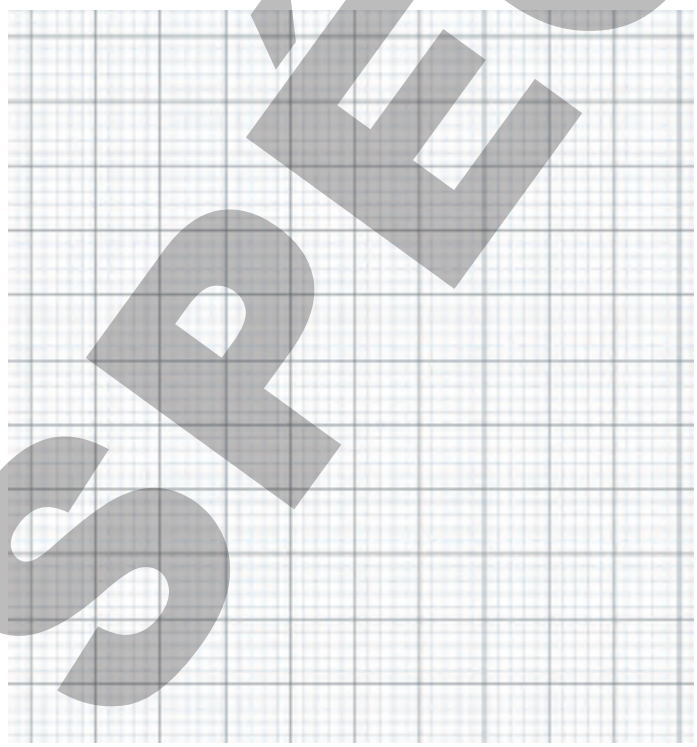
a) Détermine une équation de la droite de régression (D) de y en x par la méthode de Mayer.
b) Trace cette droite dans le repère.

SPÉCIMEN

6 Le tableau ci-dessous donne les superficies x_i de six cultivateurs de riz et les masses de leurs récoltes y_i. Les superficies cultivées sont exprimées en hectares et les masses des récoltes sont exprimées en tonnes.

x_i	1	2	3	4	6	8
y_i	3	5	8	11	17	25

1. a) Représente le nuage de points M(x_i, y_i) dans un repère orthonormé (O, I, J).
2. Partage cette série en deux séries de même effectif.
3. Détermine une équation de la droite de régression selon la méthode de Mayer.
4. Détermine la récolte de riz en tonnes cultivé sur une superficie de 10 hectares.



SPÉCIMEN

7 En Côte d'Ivoire, le gouvernement, par décret N° 2013-327 mai 2013, a interdit la production,l'importation, la commercialisation, la détention et l'utilisation des sachets plastiques.
L'application du décret a été reportée au 22 novembre 2014. Au début du mois de juin 2013, un magasin de distribution disposait d'un stock de 740 cartons de sachets plastiques. Depuis lors, l'entreprise a arrêté d'acquérir de nouveaux cartons de sachets plastiques et a suivi l'évolution de son stock pendant six mois en notant, au début de chaque mois, le nombre de cartons de sachets plastiques disponibles.
Le tableau suivant donne les résultats obtenus.

Mois	Juin 2013	Juillet 2013	Août 2013	Septembre 2013	Octobre 2013	Novembre 2013
Rang x_i du mois	1	2	3	4	5	6
Nombre y_i de cartons de sachets	740	680	650	580	500	450

Le responsable du magasin de distribution se demande si son stock sera épuisé avant la date d'entrée en vigueur du décret. Il te sollicite.
Répond à sa préocupation en basant ton raisonnement sur tes connaissances mathématiques.

SPÉCIMEN

8 Le tableau ci-dessous donne le nombre total d'adhérents au club de mathématique en 2018.

Mois x_i de l'année 2018	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nombre d'adhérents y_i	1100	1160	1220	1370	1620	1550	1600	1500	1790	1940	2060	1980

Une fondation veut octroyer une aide financière au club si le nombre d'adhérents dépasse 3 000 élèves. Les élèves veulent déterminer quand ils pourront recevoir ce don.

Faisant partie de ce club, tu es sollicité par tes camarades pour déterminer la période (mois et l'année) à laquelle le club pourrait recevoir ce don.

Exploite le tableau ci-dessus pour répondre à la préoccupation des membres du club.

SPÉCIMEN

7 SUITES NUMÉRIQUES

Tableau des habiletés et contenus

HABILETÉS	CONTENUS
CONNAÎTRE	- la définition d'une suite arithmétique - la propriété relative à la variation d'une suite arithmétique - l'expression du terme général d'une suite arithmétique en fonction d'un terme quelconque et de la raison - la formule relative à la somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique - la définition d'une suite géométrique - la propriété relative à la variation d'une suite géométrique - l'expression du terme général d'une suite géométrique en fonction d'un terme quelconque et de la raison la formule relative à la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique
CALCULER	- la raison d'une suite arithmétique connaissant deux termes quelconques - un terme d'une suite arithmétique connaissant un autre terme et la raison - la somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique - la raison d'une suite géométrique connaissant deux termes quelconques - un terme d'une suite géométrique connaissant un autre terme et la raison - la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique
DÉMONTRER	- qu'une suite est arithmétique en utilisant la définition - qu'une suite est géométrique en utilisant la définition - qu'une suite arithmétique est croissante ou décroissante - qu'une suite géométrique est croissante ou décroissante
DÉTERMINER	- le sens de variation d'une suite arithmétique - le sens de variation d'une suite géométrique
EXPRIMER	- le terme général u_n d'une suite arithmétique en fonction de n - le terme général u_n d'une suite géométrique en fonction de n
TRAITER UNE SITUATION	faisant appel aux suites arithmétiques ou aux suites géométriques

Situation d'apprentissage

Ton Papa veut placer pendant 10 ans dans une banque de la place la somme de 1.000.000 F CFA le premier janvier 2020.
Le banquier lui explique les conditions suivantes :
Condition 1 : placement à intérêts simples.
Chaque fin d'année, l'argent placé produira le même intérêt de 6,5% l'an.
Condition 2 : placement à intérêts composés.
Le taux d'intérêt est de 3% l'an, mais chaque fin d'année, l'intérêt acquis est pris en compte dans le calcul du capital de l'année suivante.
Ton papa retourne à la maison et te demande de lui proposer la condition la plus avantageuse.
N'ayant pas pu répondre à ton Papa, tu expliques la situation à ton professeur.
Celui-ci décide alors d'étudier avec la classe un autre type de fonction et leurs propriétés.

SPÉCIMEN

1 GÉNÉRALITÉS SUR LES SUITES

1-Définition

On appelle suite numérique toute fonction u de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$.



Notation:
La suite u est notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou simplement (u_n).
u_0 s'appelle le premier terme et u_n le terme de rang n ou terme général de la suite u.

Remarque

Selon le cas, le premier terme peut être u_1, u_2, etc. Sauf mention contraire, le premier terme de la suite u est u_0 dans toute la suite.



Soit v l'application de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $\forall$ n $\in \mathbb{N}$, $v(n) = 2n^2 + 1$.
L'application v est une suite numérique.
On peut la noter (v_n)
$v_n = 2n^2 + 1$ est le terme général de la suite (v_n)

Exercices de fixation

1 Calcule les termes u_0, u_1, u_2 et u_3 de la suite u définie pour tout entier naturel n par : $u_n = 2n + 1$.

2 Calcule les termes u_1, u_2 et u_3 de la suite u définie par : $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n + 1$.

2 - DIVERSES DÉTERMINATIONS D'UNE SUITE

D'une manière générale, une suite est donnée par une des deux déterminations suivantes.
a) Suite déterminée par une formule explicite
Une suite est déterminée par une formule explicite s'il existe une fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que pour tout entier naturel n, on a : $u_n = f(n)$.
b) Suite déterminée par une formule de récurrence
Une suite est déterminée par une formule de récurrence lorsque :
- On donne le premier terme ;
- Il existe une fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = f(u_n)$.



La suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -2\,u_n + 5$ est définie par une formule de récurrence.

Exemple de calcul de quelques termes de la suite (u_n)
$u_1 = -2\,u_0 + 5$ or $u_0 = 1$ donc $u_1 = -2 \times 1 + 5$;
soit $u_1 = 3$

SPÉCIMEN

Exercice de fixation

3 Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes.

	Affirmations	Vrai /faux
1	La suite u définie par : $u_n = 2n + 1$ est donnée par une formule de récurrence	
2	La suite u définie par : $u_n = 2n + 1$ est donnée par une formule explicite	
3	La suite u définie par : $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n + 1$ est donnée par une formule de récurrence	
4	La suite u définie par : $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n - 5$ est donnée par une formule explicite	

3 - SUITE MAJORÉE, SUITE MINORÉE, SUITE BORNÉE

- On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée s'il existe un nombre réel M tel que pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leq M$.
- On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée s'il existe un nombre réel m tel que pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geq m$.
- On dit qu'une suite est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.



On considère la suite (u_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 + \frac{1}{n}$.

Démontrons que la suite (u_n) est bornée.

$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{n} > 0$ d'où $1 + \frac{1}{n} > 1$ donc la suite (u_n) est minorée par 1.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$ donc $\frac{1}{n} \leqslant 1$ d'où $1 + \frac{1}{n} \leqslant 2$.

La suite (u_n) est majorée par 2

$\forall n \in \mathbb{N}$, $1 < u_n \leqslant 2$ donc la suite (u_n) est bornée.

Exercices de fixation

4 Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes.

	Affirmations	Vrai /faux
1	Une suite dont tous les termes sont positifs est minorée	
2	Une suite dont tous les termes sont négatifs est majorée	
3	Une suite bornée n'est pas majorée	

5

1. Justifie que la suite u définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \frac{1}{n+1}$ est majorée par 1.
2. Justifie que la suite u définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \frac{1}{n+1}$ est minorée par 0.
3. Justifie que la suite de terme général $(-1)^n$ est bornée.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

SPÉCIMEN

4 - SENS DE VARIATION D'UNE SUITE

- On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leq u_{n+1}$.
- On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante si pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geq u_{n+1}$
- On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante si pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = u_n$.
- Lorsqu'une suite est croissante, décroissante ou constante, on dit qu'elle est monotone.

Methodes

Méthodes pour étudier le sens de variation d'une suite$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

a) Méthode algébrique (cas général)

Pour étudier le sens de variation d'une suite (u_n) on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$.

- Si $u_{n+1} - u_n$ est positif ou nul alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ;
- Si $u_{n+1} - u_n$ est négatif ou nul alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

b) Méthode fonctionnelle

Dans ce cas, la suite (u_n) $n\in\mathbb{N}$ est définie par une formule explicite : $u_n = f(n)$.

On suppose que tous les termes de la suite appartiennent à un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- Si f est croissante sur I alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ;
- Si f est décroissante sur I alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.



La suite (u_n) définie sur N par : $u_n = 2n - 4$ est une suite croissante.
En effet, $u_{n+1} - u_n = 2(n+1) - 4 - (2n - 4)$.
Donc $u_{n+1} - u_n = 4$; $4 > 0$ donc la suite (u_n) est croissante.

Exercices de fixation

6

1. Soit la suite u définie pour tout entier naturel n par : $u_n = 2n + 1$. Justifie que u est croissante.
2. Soit la suite v définie pour tout entier naturel n par : $v_n = 1 - 7n$. Justifie que v est décroissante.

7 Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes.

	Affirmations	Vrai /faux
1	Une suite constante est croissante	
2	Une suite décroissante ne peut jamais être croissante	
3	Une suite dont tous les termes sont positifs est forcément croissante	

2 SUITE ARITHMÉTIQUE

1- Définition

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite arithmétique s'il existe un nombre réel r, appelé la raison de la suite, tel que pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = u_n + r$.

Remarque

- Le nombre r qui apparaît dans la définition précédente ne dépend pas de n. Autrement dit, quand n varie, r est constant.
- Une suite (u_n) $n \in \mathbb{N}$ est une suite arithmétique si et seulement si pout tout entier naturel n , le nombre réel $u_{n+1} - u_n$ est constant.

(Voir exemple 2)

SPECIMEN



1. la suite (u_n) $n \in \mathbb{N}$ définie par $u_0 = -2$ et $u_{n+1} = u_n - 5$ est une suite arithmétique de raison -5 et de premier terme -2.
2. Soit (u_n) $n \in \mathbb{N}$ la suite numérique définie par $u_n = 3n + 4$.

Pout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 3(n + 1) + 4 - 3n - 4$
$u_{n+1} - u_n = 3$ donc (u_n) $n \in \mathbb{N}$ est une suite arithmétique de raison 3 et de premier terme 4.

Exercice de fixation

8 Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes.

	Affirmations	Vrai /faux
1	La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3 + 2n^2$ est une suite arithmétique	
2	La suite f définie sur $\mathbb{N}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = -3n + 1$ est une suite arithmétique	
3	La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -5 + u_n$ est une suite arithmétique	
4	La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} + 2u_n = 1 + 3u_n$ est une suite arithmétique	
5	La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -u_n + 3$ est une suite arithmétique	

9

1. On donne la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 2$. Justifie que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique.
2. On donne la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel n, $u_n = 1-3n$. Justifie que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique dont on déterminera la raison.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2) Formule explicite d'une suite arithmétique

Propriété

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ arithmétique de raison r.
- Pour tout entier naturel n, on a : $u_n = u_0 + nr$;
- Pour tout entier naturel n, on a : $u_n = u_1 + (n-1)r$;
- Pour tous entiers naturels n et p, on a : $u_n = u_p + (n-p)r$.

Remarque

Une suite arithmétique est parfaitement déterminée par la donné d'un terme quelconque et de sa raison



On considère La suite arithmétique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - 7$
On a : $u_n = u_0 + nr$; $r = -7$ et $u_0 = 2$
donc pour $n = 10$, $u_{10} = -7 \times 10 + 2$.
Donc $u_{10} = -68$.
Déterminons u_{17} à partir de u_{10}. On a :
$u_{17} = u_{10} + (17 - 10) \times (-7)$. On a donc $u_{17} = -117$

Exercices de fixation

10

1. On donne la suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme 1 et de raison 5.

Détermine la formule explicite de cette suite.

2. On donne la suite arithmétique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme 2 et de raison -3.

Détermine la formule explicite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

SPECIMEN

11

1. On donne la suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison -4, telle que $u_1 = 3$. Détermine la formule explicite de cette suite.
2. On donne la suite arithmétique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison 3 telle que $v_2 = 2$.
   Détermine la formule explicite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

12 On considère la suite arithmétique de premier terme 1 et de cinquième terme 11.
Détermine la raison de cette suite.

13 On considère la suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de deuxième terme u_2 égale à -5 et de raison -3.
Calcule u_1, u_3 et u_4

3) Sens de variation d'une suite arithmétique

Propriété

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une arithmétique de raison r.

- Si $r > 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ;
- Si $r < 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante ;
- Si $r = 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.



On considère La suite arithmétique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n + 1 = u_n - 7$

la raison r est égale à : -7 ; $r < 0$ donc la suite arithmétique (u_n) est décroissante.

Exercice de fixation

14

1. On donne la suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison 4. Justifie que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
2. On donne la suite arithmétique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison -3. Justifie que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

4) Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique

Propriété

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ arithmétique, p et n deux entiers naturels tels que $p \leq n$. On a :

- $u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n)$;
- $u_1 + u_1 + \ldots + u_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$;
- $u_p + u_1 + \ldots + u_n = \frac{n-p+1}{2}(u_p + u_n)$;

$n - p + 1$ étant le nombre de termes de la somme.

SPÉCIMEN



• $33+34+35+36+37+\ldots+67 = \dfrac{(33+67)\times(67-33+1)}{2}$

$= \dfrac{100\times 35}{2}$

$= 1750$

• Calculons la somme des n premiers naturels impairs. Soit n un entier naturel non nul,

$1+3+5+\ldots+2n-1 = \dfrac{2n\times n}{2}$.

Donc : $1+3+5+\ldots+2n-1 = n^2$.

Exercice de fixation

15

1. Calcule la somme des 10 premiers termes de la suite arithmétique (u_n) définie pour tout entier naturel n, par : $u_n = 2n+1$.
2. Calcule la somme des 100 premiers termes de la suite arithmétique (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = 2-3n$.

4 SUITE GÉOMÉTRIQUE

Définition

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite géométrique s'il existe un nombre réel q, appelé la raison de la suite, tel que pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = qu_n$

Remarque

- Le nombre q qui apparaît dans la définition précédente ne dépend pas de n. Autrement dit, quand n varie, q est constant.
- Soit (v_n) $n \in \mathbb{N}$, une suite de nombres réels ne s'annulant pas. (v_n) $n \in \mathbb{N}$ est une suite géométrique si et seulement si pout tout entier naturel n, le nombre réel $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ est constant.

Point méthode

Pour démontrer qu'une suite (v_n) est géométrique, on peut utiliser l'un des procédés suivants.

1. *Établir que le quotient de deux termes consécutifs quelconques est un nombre réel indépendant de n.*
2. *Écrire v_n sous la forme $v_n = a\,q^n$ où a et q sont deux nombres réels indépendants de n*



1. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_0 = -5$ et $v_{n+1} = 3v_n$ est une suite géométrique de raison 3 et de premier terme -5.
2. Soit (v_n) $n \in \mathbb{N}$, la suite numérique définie par $v_n = 3\times 2^n$. Pout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{3\times 2^{n+1}}{3\times 2^n}$.

Pour tout entier naturel n, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 2$, donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de premier terme 3 et de raison 2

Exercice de fixation

16 Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes.

	Affirmations	Vrai /faux
1	La suite (u_n) définie par : $u_0 = 10$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = nu_n$ est géométrique	
2	Une suite est géométrique si on obtient chaque terme, à l'exception du premier, en multipliant le terme précédent par un même nombre réel.	
3	Une suite est géométrique si on obtient chaque terme, à l'exception du premier, en ajoutant au terme précédent un même nombre réel.	

SPÉCIMEN

17

1 - On donne la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n$.

Justifie que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.

2 - On donne la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel n par : $u_n = 3^n$.

Justifie que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on déterminera la raison.

3 - On donne la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel n par $v_n = -5\times4^n$.

Justifie que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on déterminera la raison.

2) Formule explicite d'une suite géométrique

Propriété

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ géométrique de raison q, q étant non nulle.

- Pour tout entier naturel n, on a : $u_n = u_0q^n$;
- Pour tout entier naturel n, on a : $u_n = u_1q^{n-1}$;
- Pour tous entiers naturels n et p, on a : $u_n = u_pq^{n-p}$.

Remarque

Une suite géométrique de raison non nulle est parfaitement déterminée par la donnée d'un terme quelconque et de sa raison.

Exemples

On considère la suite géométrique (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$v_0 = -2$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = -6v_n$

On a : $v_n = v_0 \times q^n$; $q = -6$ et $v_0 = -2$
donc pour $n = 5$, $v_5 = (-6)^5 \times (-2)$.
Donc : $v_5 = 15552$

Déterminons v_8 à partir de v_5. On a :
$v_8 = v_5 \times (-6)^{8-5}$.
$v_8 = v_5 \times (-6)^3$. On a donc : $v_8 = -3359232$

Exercices de fixation

18

1 - On donne la suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme -1 et de raison -5.

Détermine la formule explicite de cette suite.

2 - On donne la suite géométrique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme 3 et de raison $\frac{3}{4}$.

Détermine la formule explicite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

19

1 - On donne la suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de deuxième terme -1 et de raison -5.

Détermine la formule explicite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2 - On donne la suite géométrique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de troisième terme 2 et de raison $\frac{1}{2}$.

Détermine la formule explicite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

SPÉCIMEN

20 On considère la suite géométrique (u_n) de troisième terme $u_2 = 12$ et de raison 2.
Détermine u_5.

21 On considère une suite géométrique (u_n).
Détermine la raison de cette suite sachant que $u_2 = 18$ et $u_5 = 486$.

3) Sens de variation d'une suite géométrique

Propriété

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 différent de 0.
On suppose que $u_0 > 0$
- Si $q > 1$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ;
- Si $0 < q < 1$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante ;
- Si $q = 1$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

On suppose $u_0 < 0$.
- Si $q > 1$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante ;
- Si $0 < q < 1$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ;
- Si $q = 1$, alors $(u_n)(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

Remarque

Si $q < 0$ alors les termes de la suite sont alternativement positifs et négatifs. La suite n'est ni croissante, ni décroissante.



On considère la suite géométrique (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$v_0 = -2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 4v_n$

$v_0 < 0$ et $q > 1$ donc la suite (v_n) est décroissante.

Exercices de fixation

22
1 - On donne la suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme 1 et de raison 5.
Détermine le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2 - On donne la suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme 2 et de raison $\frac{1}{2}$.
Détermine le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

23
1- On donne la suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme -2 et de raison 5. Détermine le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2 - On donne la suite géométrique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme -12 et de raison $\frac{1}{2}$.
Détermine le sens de variation de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

PRÉCIMEN

4) Limite d'une suite géométrique

Propriété

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une géométrique de terme général q^n.
Si $q > 1$, alors $\lim u_n = +\infty$;
Si $-1 < q < 1$, alors $\lim u_n = 0$;
Si $q = 1$ alors $lim\ u_n = 1$;
Si $q < -1$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

Conséquences

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une géométrique de raison q et de premier terme u_0 différent de 0.
On suppose que $u_0 < 0$.
- Si $q > 1$, alors $\lim u_n = -\infty$;
- Si $-1 < q < 1$, alors $\lim u_n = 0$.

On suppose que $u_0 > 0$.
- Si $q > 1$, alors $\lim u_n = +\infty$;
- Si $-1 < q < 1$, alors $\lim u_n = 0$.

Exemples

On considère la suite géométrique (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$v_0 = -2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = 4v_n$

$v_0 < 0$ et $q > 1$ donc la suite (v_n) est égale à : $-\infty$

5) Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique

Propriété

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ géométrique de raison q différent de 1, p et n deux entiers naturels tels que $0 \le p \le n$.
On a :

- $u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0 \times \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$;
- $u_1 + u_1 + \ldots + u_n = u_1 \times \dfrac{1-q^{n}}{1-q}$;
- $u_p + u_1 + \ldots + u_n = u_p \times \dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$.

Exemples

● $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{10} = \dfrac{1-2^{11}}{1-2}$

$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{10} = 2047$

● Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $u_0 = 2$.

Calculons la somme S tel que $S = u_4 + u_5 + \ldots + u_9$
$u_4 = \dfrac{1}{8}$

$S = \dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^6}{1-\frac{1}{2}} \times \dfrac{1}{8}$. On a : $S = \dfrac{63}{256}$

Exercice de fixation

24

1 - On donne la suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel n, $u_n = 3^n$.
Calcule la somme des 10 premiers termes de cette suite.
2 - On donne la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_n = -5\times4^n$.
Calcule la somme des 100 premiers termes de cette suite.

SPECIMEN

25 Un nénuphar de 3 cm² envahit un étang en doublant quotidiennement sa superficie. On note S_n la superficie de l'étang envahie par ce nénuphar au bout de n jours.

1 - Calcule S_1, S_2, S_3 et S_4.

2 - a) Exprime S_{n+1} en fonction de S_n.

b) Détermine la nature, la raison et le premier terme de la suite (S_n).

3- Exprime S_n en fonction de n.

4- Détermine la superficie de l'étang envahie pour le nénuphar au bout de 10 jours.

26 Pendant les congés de Noel, Séka a géré une cabine cellulaire dans son village. Sa recette a été de 1 500 F le premier jour et de 200 F de plus chacun des jours suivants. On désigne par R_n la recette du n-ième jour. Ainsi R_1=1500.

1 - Calcule R_2, R_3 et R_4.

2 - Exprime R_n en fonction de n.

3 - Détermine le rang du jour où la recette a été de 4 100 F.

4 - Seka a besoin de 35 000 F pour s'acheter des documents scolaires et des habits au bout des 14 jours de congés. Il se demande s'il aura les moyens et te sollicite. Donne ton avis en argumentant.

27 Yao place dans une caisse d'épargne 200 000 F à intérêts simples de 15 000 F par an. On note C_n la valeur du capital au bout de n années.

1 - Calcule C_1, C_2 et C_3.

2 - Démontre que la suite (C_n) ainsi définie est une suite arithmétique.

3 - Exprime C_n en fonction de C_0 et de n.

4 - Calcule le capital acquis au bout de 6 ans.

5 - Détermine le nombre d'années au bout duqel le capital acquis sera supérieur à 360 000 F.

SPÉCIMEN

28 Une commerçante veut acheter un magasin. A cet effet elle a ouvert un compte d'épargne. À l'ouverture du compte, elle a fait un versement dont le montant est égal à
20 000 F. Elle s'est engagée à alimenter ce compte par des versements mensuels et ce pendant 36 mois. Chaque versement mensuel augmente de 5 500 F par rapport au versement précédent.
On désigne par v_n le versement du n-ième mois.
Ainsi $v_0 = 20\,000$
1- Calcule v_1 et v_{36}.
2- Calcule le montant de la somme des versements effectués par la commerçante durant 36 mois.

29 Yapi a obtenu un emploi temporaire dans une société. Les closes du contrat sont les suivantes :
- la durée du contrat est de 18 mois ;
- le salaire du premier mois est de 150 000 F ;
- le salaire augmentera de 5% de mois en mois pendant la durée du contrat.

On désigne par S_n (n est un entier naturel compris entre 1 et 18) le salaire mensuel du n-ième mois.
1 - Calcule S_2 et S_3.
2 - Démontre que (S_n) est une suite géométrique.
3 - Calcule le salaire total de Yapi au terme du contrat.

30 Dans chacun des cas suivants, étudie le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$a) u_n = -5n$; b) $u_n = \dfrac{1}{3^n}$; c) $u_n = 2^n$;

d) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n \end{cases}$; e) $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n \end{cases}$; f) $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$.

SPÉCIMEN

31 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definie par :

$$\begin{cases} u_0 = 10 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{3}{4}u_n + 2 \end{cases}.$$

1. Calcule u_1, u_2, u_3, u_4.
2. Soit (v_n) $n\in\mathbb{N}$ la suite définie pour tout nombre entier naturel n par: $v_n = u_n - 8$.
   a) Calcule v_1, v_2, v_3, v_4.
   b)Démontre que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison.
   c)Démontre que: $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_n = 2(\frac{3}{4})^n$.
3. a) Exprime u_n en fonction de v_n.
   b) Déduis- en l'expression de u_n en fonction de n.

32 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b \end{cases}$$ où a et b sont deux nombres réels.

1. On suppose que $a = 1$ et $b = 2$
   a) Démontre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique dont on déterminera le premier terme et la raison.
   b) Calcule u_1, u_2, u_3, u_4.
   c) Étudie le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. On suppose que : $a = 2$ et $b = -3$
   Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout nombre entier naturel n par : $v_n = u_n - 3$.
   a) Calcule: v_1, v_2, v_3, v_4.
   b) Démontre que (v_n) est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme -2.
   c) Étudie le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. a) Exprime u_n en fonction de v_n.
   b) Déduis - en l'expression de u_n en fonction de n.

SPÉCIMEN

33 Les élèves des classes de terminale d'un lycée ont décidé de reboiser une forêt entièrement détruite par la population. Au 1er janvier 2018, cette forêt renferme 100 000 m^3 de bois plantés par les différentes promotions terminales, sous la conduite du club d'environnement. L'objectif fixé est d'atteindre 300 000 m^3 de bois. Chaque année, entre Janvier et Mai,
les élèves de Terminale font un reboisement pour un volume de 7% du volume total de l'année précédente. Votre professeur vous demande de déterminer le nombre d'années qu'il faudra pour atteindre 300 000 m^3 de bois.
Reponds à la requête du professeur.
(Tu justifieras toutes les étapes de ton raisonnement.)

34 Dans le cadre de la lutte contre la COVID-19, des chercheurs d'un pays ont modélisé l'évolution de la pandémie par une fonction f définie sur $\mathbb{N}$ par :
$f(t) = 120\ t + 1$.

$f(0)$ désigne le nombre de cas de contamination déclaré le jour de l'annonce de la découverte de la maladie dans le pays. Pour $t \neq 0$, $f(t)$ désigne le nombre de nouveau cas de contamination au $t^{ème}$ jour après la déclaration du premier cas.

À l'issu d'un point de presse, le Ministre de la santé, estime que le gouvernement instaurera un couvre-feu, si le nombre total de cas de contamination dans le pays dépasse l0 000 personnes.

Ayant écouté cette information, un de tes camarades de classe estime que si cette tendance se poursuit selon la modélisation décrite par les chercheurs, le couvre-feu interviendra 10 jours après la déclaration du premier cas de COVID-19 dans ce pays.

Dans le cas de cette modélisation et à l'aide d'une argumentation basée sur tes connaissances mathématiques, détermine le nombre de jours à partir duquel le couvre-feu interviendra, et dis si la déclaration de ton camarade de classe est oui ou non juste.

SPÉCIMEN

8 SYSTÈMES LINÉAIRES DANS $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

Tableau des habiletés et contenus

HABILETÉS	CONTENUS
RÉSOUDRE	des systèmes de deux équations faisant intervenir la fonction exponentielle népérienne ou la fonction logarithme népérien
REPRÉSENTER	graphiquement l'ensemble des solutions d'un système de deux ou trois inéquations du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$
TRAITER UNE SITUATION	faisant appel aux systèmes linéaires dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

Situation d'apprentissage

La coopérative du lycée produit deux types X et Y de yaourts à la fraise à partir de fraise, de lait et de sucre. Chaque yaourt doit respecter certaines proportions de matière premières. La coopérative dispose de matières premières en quantité limitée: 800 kg de fraises, 700 kg de lait et 300kg de sucre. La vente des yaourts X rapporte 240 F par kg et les yaourts Y rapportent 300 F par kg. En tenant compte des stocks limités, la coopérative doit déterminer les quantités de yaourts X et Y à produire. Pour cela les élèves décident de résoudre des systèmes linéaires dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.



SPECIMEN

1 SYSTÈMES DE DEUX ÉQUATIONS FAISANT INTERVENIR LA FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

$$(S_1)\begin{cases} a\ln x+b\ln y=c \\ a'\ln x+b'\ln y=c' \end{cases}$$

Point méthode

Pour résoudre un système de type (S) faisant intervenir la fonction logarithme népérien on peut procéder comme suit :

- Poser : X = ln x, où x est un nombre réel strictement positif et X un nombre réel
Y = ln y, où y est un nombre réel strictement positif et Y un nombre réel
- Résoudre le système en X et Y

$$(S')\begin{cases} aX + bY = c \\ a'X + b'Y = c \end{cases}$$

Soit $(X_0 ; Y_0)$ le couple solution de (S')

- Détermine x et y en résolvant les équations $X_0 = \ln x$ et $Y_0 = \ln y$.

Exemples

Résolvons le système.

$$(S)\begin{cases} 2\ln x+3\ln y=10 \\ 5\ln x+2\ln y=3 \end{cases}$$

Posons X = ln$x$ et Y = ln$y$.

On a donc : $(S)\begin{cases} 2X+3Y=10 \\ 5X+2Y=3 \end{cases}$.

La résolution du système (S) par la combinaison ou par substitution donne : $\begin{cases} X=-1 \\ Y=4 \end{cases}$

X = −1 donc ln$x$ = −1 soit $x = e^{-1}$

Y = 4 donc ln$y$ = 4 soit $y = e^4$, donc S = $\{(e^{-1} ; e^4)$.

Exercices de fixation

1 Résous le système $\begin{cases} 2lnx + lny = 3 \\ lnx + ln\,y = 1 \end{cases}$

2 Résous le système $\begin{cases} lnx + 3lny = 5 \\ 2lnx - ln\,y = 3 \end{cases}$

2 SYSTÈMES DE DEUX ÉQUATIONS FAISANT INTERVENIR LA FONCTION NÉPÉRIENNE (S)

$$\begin{cases} ae^x + be^y = c \\ a'e^x - b'e^y = c' \end{cases}$$

Point méthode

Pour résoudre un système de type (S) faisant intervenir la fonction exponentielle népérienne on peut
procéder comme suit :

SPECIMEN

• Poser : $X = e^x$, où x est un nombre réel et X un nombre réel strictement positif

$Y = e^y$, où x est un nombre réel et Y un nombre réel strictement positif

• Résoudre le système en X et Y

$$(S)\begin{cases} aX + bY = c \\ a'X + b'Y = c' \end{cases}$$

Soit $(X_0 ; Y_0)$ le couple solution de (S').

• Si l'un des nombres X_0 ou Y_0 est négatif ou nul, le système n'a pas de solution.

• Si les nombres X_0 et Y_0 trouvés sont tous positifs, on détermine x et y en résolvant les équations

$X_0 = e^x$ et $Y_0 = e^y$.

Exemples

$$(S):\begin{cases} -4e^x + 3e^y = -1 \\ 3e^x - 2e^y = 0 \end{cases}$$

On pose $X = e^x$ et $Y = e^y$.

$X > 0$ et $Y > 0$

$$(S'):\begin{cases} -4X + 3Y = -1 \\ 3X - 2Y = 0 \end{cases}$$

La résolution de (S') donne : $\begin{cases} X = 2 \\ Y = 3 \end{cases}$

$X = 2$ donc $e^x = 2$ soit $x = \ln 2$

$Y = 3$ donc $e^y = 3$ soit $y = \ln 3$, donc $S = \{(\ln 2 ; \ln 3)\}$.

Exercices de fixation

3 Résous le système $\begin{cases} e^x + 3e^y = 5 \\ 2e^x - e^y = 3 \end{cases}$

4 Résous le système $\begin{cases} 2e^x + e^y = 3 \\ e^x + e^y = 1 \end{cases}$

3 SYSTÈMES D'INÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ DANS R×R

1. Définition

• Soit n un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2. Un système de n inéquations du premier degré dans ℝ×ℝ est un système du type :

$$(S):\begin{matrix} (I_1) \\ (I_2) \\ \ldots\ldots \\ (I_n) \end{matrix}$$

où chacune des inéquations (I_k), $1 \leq k \leq n$, est une inéquation du premier degré dans ℝ×ℝ.

• Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), chaque inéquation (I_k), pour $1 \leq k \leq n$, est caractérisée par un demi-plan (P_k). L'ensemble des solutions de (S) est l'ensemble des couples de coordonnées des points communs à ces demi-plans.

• Résoudre un système d'inéquations, c'est chercher toutes les solutions communes à toutes les inéquations du système.

SPÉCIMEN

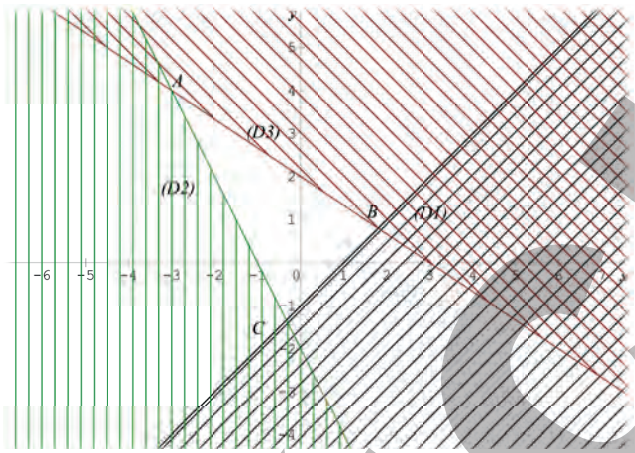
2. Exemples

Résolvons graphiquement le système d'inéquations :

$$(S)\begin{cases} x-y-1\leq 0 \\ 2x+y+2\geq 0 \\ 2x+3y-6\leq 0 \end{cases}$$

Notons (D_1) , (D_2) et (D_3) les droites d'équations respectives : $x-y-1=0$; $2x+y+2=0$ et $2x+3y-6=0$.

On vérifie que les coordonnées du point O(0, 0) satisfont aux trois inéquations. L'ensemble des solutions du système (S) est l'intérieur du triangle ABC, bords compris.





Programmation linéaire

Les élèves d'une classe de T^le A d'un Lycée font une visite dans une unité de production de sachets de graines d'arachide et de sachets de graines d'anacarde. Le responsable de l'unité leur donne les informations suivantes :

l'unité de production utilise deux machines M_1 et M_2. Pour produire un sachet d'arachide, il faut utiliser M_1 pendant 5 minutes et M_2 pendant 2 minutes. Pour produire un sachet d'anacarde, il faut utiliser M_1 pendant 8 minutes et M_2 pendant 4 minutes. Pour pouvoir faire l'entretien, M_1 est disponible 140 minutes par jour et M_2 est disponible 64 minutes par jour.

Par ailleurs l'unité réalise un bénéfice de 100 F par sachet d'arachide et 180 F par sachet d'anacarde.

Retournés en classe, les élèves désirent savoir le nombre de sachets de chaque sorte à produire pour réaliser un bénéfice maximum par jour. Ils désirent également savoir ce bénéfice.

1. *Établissons un tableau résumant les données du problème.*

	Machine M_1 (minutes)	Machine M_2 (minutes)	Profit (F)
Sachets d'arachide	5	2	100
Sachets de grains d'anacarde	8	4	180
Contraintes	140	64	

2. *Traduisons les données par un système d'inéquations*

Soit x le nombre de sachets d'arachide et y le nombre de sachets d'anacarde.

Les contraintes de la production sont :

$$(S)\begin{cases} x\geq 0 \\ y\geq 0 \\ 5x+8y\leq 140 \text{ (contraintes de } M_1) \\ 2x+4y\leq 64 \text{ (contraintes de } M_2) \end{cases}$$

3. *Déterminons le bénéfice*

Le bénéfice réalisé est : $b = 100x + 180y$.

4. *Résolvons graphiquement le système d'inéquations*

a) Déterminons les programmes réalisables

Tout couple (x,y) solution de (S) est appelé un programme réalisable (ici une production réalisable).

L'ensemble des productions réalisables est l'ensemble des points M(x,y), où x et y sont des entiers naturels, de la partie (P) non hachurée ci-dessous de sommets les points O, A, B et C.

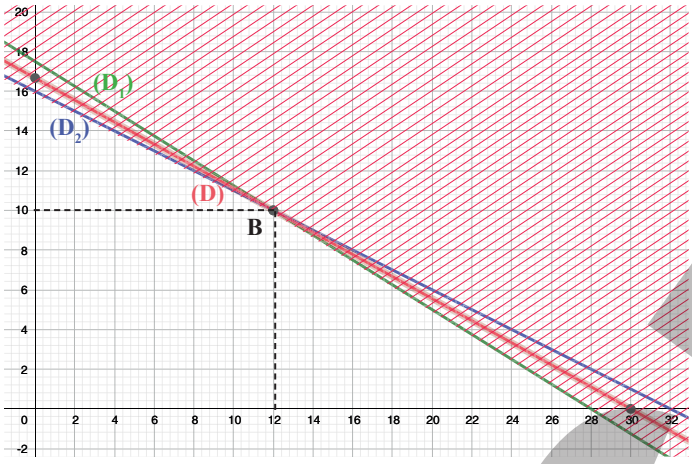


b) Déterminons les solutions du programme

Les coordonnées des points de la droite (D) d'équation $100x + 180y = b$ (ou encore $y = -\frac{5}{9}x + \frac{b}{180}$) correspondent aux

SPECIMEN

programmes (x,y) qui, si elles sont solutions du système (S), assurent à l'unité de production le bénéfice b. Ce bénéfice est d'autant plus grand que l'ordonnée à l'origine de la droite (D) (c'est-à-dire $\frac{b}{180}$*) est grande.*
Ainsi, parmi toutes les droites de coefficient $-\frac{5}{9}$ *et dont l'intersection avec le quadrilatère ABCO est non vide, celle dont l'ordonnée à l'origine est maximale donne la solution du problème. Graphiquement, l'intersection de la droite (D) et du quadrilatère ABCO est le point d'intersection B de* (D_1) *et* (D_2)*. Sur le graphique ci-dessous, cette droite est en rouge.*



Déterminons les coordonnées $(x\,;y)$ du point B.

Elles vérifient $\begin{cases} 5x+8y-140=0 \\ 2x+4y-64=0 \end{cases}$.

Vérifie que B(12, 10).

L'unité de production doit produire 12 sachets d'arachide et 10 sachets d'anacarde chaque jour pour réaliser un bénéfice maximal. Le bénéfice sera alors égal à : 100 × 12 + 180 × 10 = 3000 F.

Remarque

Lorsqu'on détermine les coordonnées du point M(*x*,*y*), M parcourant l'ensemble des productions réalisables, on dit qu'on a maximisé le bénéfice $100x + 180y$ en respectant les contraintes du système (S).

Exercices de fixation

5 Résous graphiquement dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ chacun des systèmes suivants :

(I_1) $\begin{cases} x+2y-3\geq 0 \\ 2x-y-2\geq 0 \end{cases}$ (I_2) $\begin{cases} 2x+3y-5\leq 0 \\ x-2y+3>0 \end{cases}$

6 Résous graphiquement dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ chacun des systèmes suivants :

a) $\begin{cases} 2x+3y+7<0 \\ 4x-2y-10>0 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 3x-2y\leq 4 \\ 6x-4y\geq 0 \end{cases}$

SPÉCIMEN

7 Résous graphiquement dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ le système suivant :

$x+2y-5<0$
$x-y+4>0$
$x+3y-4>0$

8 Traduis chacun des problèmes suivants par une inéquation dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

1. Un botaniste est en train d'arroser ses plants de cacaoyers et de caféiers. Il faut 0,7 litre d'eau à un cacaoyer et 0,5 litre à un caféier. La capacité de son arrosoir est de 11 litres.

   Détermine le nombre de plants de cacaoyers et de caféiers qu'il peut arroser avec un tel arrosoir empli.

2. Un ouvrier se fixe pour objectif de gagner strictement plus que 65 000 F cette semaine. Les jours où il exerce son métier de peintre en bâtiment, il gagne 17 000 F par jour, et les jours où il exerce son métier de carreleur, il gagne 12 000 F par jour.

   Détermine le nombre de jours de la semaine où il va exercer le métier de peintre et le nombre de ceux où il va exercer celui de carreleur pour que son objectif soit atteint.

9 Traduis chacun des problèmes suivants par un système d'inéquations dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

1. Un commerçant va chercher deux sortes de riz chez un grossiste. La première sorte est conditionnée en sacs de 10 kg, la deuxième en sacs de 25 kg. Le sac de 10 kg coûte 6 000 F et celui de 25 kg coûte 14 000 F. Le chargement ne doit pas dépasser 300 kg et la somme totale ne doit pas s'élever à plus de 150 000 F.

   Détermine le nombre de commandes possibles sachant qu'il faut au minimum 5 sacs de 25 kg et 2 sacs de 10 kg.

2. Une entreprise veut transporter par bateau au moins 300 véhicules et 400 tonnes de matériel. Le transporteur maritime auquel elle s'adresse dispose de 30 bateaux de type A, susceptibles chacun de transporter 10 véhicules et 10 tonnes de matériel et de 35 bateaux de type B, susceptibles chacun de transporter 6 véhicules et 10 tonnes de matériel. Le coût d'affrètement d'un bateau de type A est de 5 250 000 F et celui d'un bateau de type B de 6 560 000 F.

   Détermine le nombre de bateaux de type A et de type B permettant d'assurer le transport.

SPÉCIMEN

1 Résous dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ chacun des systèmes suivants :

1) $\begin{cases} 2lnx - 3lny = -3 \\ -lnx + 2lny = 2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} -2lnx + 3lny = 1 \\ 3lnx - 4lny = -2 \end{cases}$

2 Résous dans$\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ chacun des systèmes suivants :

1) $\begin{cases} 4e^x - 3e^y = -5 \\ -2e^x + e^y = 1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3e^x - 2e^y = -1 \\ -5e^x + 4e^y = -1 \end{cases}$

3 Résous graphiquement chacun des systèmes d'inéquations suivantes :

1. $(x, y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $\begin{cases} x + y - 1 \leq 0 \\ x - y + 1 \geq 0 \\ y + 1 \geq 0 \end{cases}$

2. $(x, y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $\begin{cases} x - 2y + 4 > 0 \\ x + y - 5 < 0 \\ 2x + 5y - 10 > 0 \end{cases}$

4 Des élèves font un repas en commun et chacun prends un repas. Si chacun d'eux verse 500 F, il manquera 500 F. Si par contre chacun d'eux verse 570 F, la caisse du restaurant leur retournera 200 F. Détermine le nombre d'élèves et le prix du repas.

SPÉCIMEN

5 Dans un magasin du marché, avec la somme de 14 500 F, on peut avoir 3 m de tissus de pantalon et 4 tricots. Tandis qu'avec 16 000 F, on obtient 5 m de tissus de pantalon et 2 tricots.
Détermine le prix d'un tricot et celui d'un mètre de tissus de pantalon.

6 Monsieur Konan veut organiser une fête. À cet effet, il est allé au marché pour acheter de la viande de mouton et des pintades avec la somme de 15 000 F. Un kilogramme de viande de mouton coûte 2 500 F et une pintade 5 000 F.
Monsieur Konan a décidé d'acheter au moins deux kilogrammes de viande de mouton.
Détermine le nombre de kilogramme de viande de mouton et le nombre de pintades que Monsieur Konan peut acheter.

7 Une ONG doit acheminer des couvertures et du matériel médical dans une zone sinistrée. Les couvertures sont emballées en paquets de 150 kg chacun, le matériel médical en caisses pesant 50 kg chacune.
Le chargement de l'avion doit comporter au minimum 3 000 kg de couverture et 2 000 kg de matériel médical. D'autre part, la charge maximum de l'avion est de 3 000 kg.
Enfin, on veut que le nombre de paquets de couvertures soit au moins le double du nombre de caisses de matériel médical.

1. Représente graphiquement l'ensemble des chargements possibles.
2. Propose une solution possible.

8 Les ateliers de couture « CG » sont spécialisés dans la fabrication de blouses de qualité pour l'industrie minière et pétrolière en Côte d'Ivoire.
Ils fabriquent généralement deux types de blouses : les blouses pour les ouvriers et les blouses pour les cadres.
Une blouse pour ouvrier rapporte un bénéfice de 10 000 F et une blouse pour cadre rapporte un bénéfice 8 000 F.
Pour satisfaire la demande des entreprises, la production journalière de blouses pour ouvrier devrait se situer entre 30 et 80 unités et la production journalière de blouses pour cadres
devrait se situer entre 10 et 30 unités.

SPÉCIMEN

Le travail minier er pétrolier est très difficile et exigeant en norme de sécurité. Pour faire face à cette exigence, le nombre total de blouses fabriquées ne doit pas dépasser 80 par jour.
Détermine le nombre total de blouses de chaque type qu'il faudrait fabriquer quotidiennement pour réaliser un bénéfice maximal.

9 Madame Yafolo veut acheter des arachides et du miel à Boundiali pour revendre à Abidjan. Les arachides sont conditionnées dans des sacs de 90 kg chacun et le miel dans des bidons de 50 kg chacun
Elle a négocié avec un transporteur qui a pris l'engagement de prendre une charge maximale de 900 kg par voyage.
D'autres part elle a collecté des informations qui lui ont permis de savoir qu'après l'achat, le conditionnement et le transport d'un sac d'arachide lui reviennent à 2 000 F alors que le conditionnement et le transport d'un bidon de miel lui reviennent à 2 500 F
Pour son premier essai, Madame Yafolo décide d'investir au moins 200 000 F.
1- Représente graphiquement l'ensemble des nombres de sacs d'arachides et des bidons de miel.
2- Pour ce premier voyage, Madame Yafolo veut réaliser un bénéfice égal à 80 000 F.
Détermine le nombre de sacs d'arachides et de bidons de miel qu'elle doit acheter.

SPÉCIMEN

10 Un usurier prête deux sommes d'argent :
- l'une à Achille au taux de 15 % ;
- l'autre à Hilaire au taux de 20 %.

L' usurier obtient ainsi 75 000 F d'intérêt avec les deux prêts.
Il aurait obtenu 80 000 F d'intérêt avec les deux prêts en prêtant à Achille au taux de 20 %.
L' usurier a retrouvé les informations ci dessous dans ses documents mais ne sait pas la somme d'argent prêtée à chacun et le montant à rembourser par chacun.
Aide - le en produisant tes arguments.

11 La coopérative d'un lycée produit 2 types X et Y de yaourts à la fraise à partir de Fraise, de lait et de sucre. Chaque yaourt doit respecter les proportions suivantes de matière premières.

	X	Y
Fraise	2	1
Lait	1	2
Sucre	0	1

La coopérative dispose de matières premières en quantité limitée : 800 kg de Fraises, 700 kg de Lait et 300 kg de sucre. La vente des yaourts X rapporte 240 F par kg et les yaourts Y, 300 F par kg.
En tenant compte des stocks limités, la coopérative doit déterminer les quantités de yaourts X et Y à produire pour faire le plus grand bénéfice possible.
Donne une solution argumentée au problème.

12 A l'approche des fêtes de Pâques, le club cuisine d'un lycée décide de confectionner des œufs en chocolat. En allant inspecter ses réserves, les membres constatent qu'il reste 18 kg de cacao, 8 kg de noisettes et 14 kg de lait. Il y a deux spécialités: l'œuf extra et l'œuf sublime. Un œuf extra nécessite 1 kg de cacao, 1 kg de noisettes et 2 kg de lait. Un œuf sublime nécessite 3 kg de cacao, 1 kg de noisettes et 1 kg de lait. Un œuf extra rapporte 200 F par kg et un œuf sublime 300 F par kg.
Détermine le nombre d'œufs extra et d'œufs sublime que doit produire la coopérative pour faire le maximum de bénéfice.

SPÉCIMEN

EXEMPLE DE DEVOIR DE NIVEAU



3e TRIMESTRE

SPÉCIMEN

Exercice 1

DaÉcris le numéro de chaque affirmation suivi de vrai si l'affirmation est vraie ou de faux si l'affirmation est fausse.

N°	Affirmations
1	Toute suite géométrique de raison strictement positive est croissante.
2	La fonction exponentielle n'est pas définie sur l'intervalle]-∞ ; 0[.
3	Le couple (0 ; 0) est une solution du système $\begin{cases} 3x-2y+1>0 \\ 2x+y-7<0 \end{cases}$.
4	La droite d'ajustement d'une série statistique double passe par le point moyen G

Exercice 2

Pour chacune des affirmations ci-dessous, quatre réponses A, B, C et D sont données dont une seule est juste. Ecris sur ta feuille de copie le numéro de l'affirmation suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

N°	Énoncés	Réponses	
1	f est la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $f'(1) = 2$ et $f(1) = 1$ Une équation de la tangente à la courbe de f dans un repère (O, I, J) est :	A	$y = x - 2$
		B	$x - y + 2 = 0$
		C	$y = 2x - 1$
		D	$y = 2x + 1$
2	On considère la fonction g définie sur l'intervalle]−∞ ; 0[par : $g(x) = \frac{1}{2x} - x^2$ $f'(x) = \ldots$	A	$\frac{1-4x^3}{2x}$
		B	$\frac{-1-4x^3}{2x^2}$
		C	$\frac{-1+4x^3}{2x^2}$
		D	$\frac{-1-4x^3}{2x}$
3	La suite (u) définie par : $u_0 = -3$ et $u_{n+1} = \frac{1}{4} u_n$	A	est décroissante
		B	est croissante
		C	est constante
		D	n est ni croissante, ni décroissante
4	La probabilité de tirer simultanément 3 boules blanches dans une urne qui contient 2 boules rouges et 5 boules blanches est …	A	$\frac{1}{7}$
		B	$\frac{2}{7}$
		C	*0,25*
		D	$\frac{3}{7}$

SPECIMEN

Exercice 3

Dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, résous le système : $\begin{cases} -e^x + e^y = \dfrac{-3}{2} \\ 2e^x - e^y = \dfrac{7}{2} \end{cases}$

Exercice 4

Soit la fonction numérique f de la variable réelle x définie par : $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{2x(x-2)}$

(C) est la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère (0, I, J).

1. a) Détermine l'ensemble de définition Df de la fonction f.
   b) Calcule les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
   c) Détermine en justifiant les asymptotes à (C).
2. Calcule $f'(x)$.
3. a) Etudie les de variation de f.
   b) Dresse le tableau de variation de f.
4. Représente graphiquement la courbe (C) dans le repère (O; I, J) .

Exercice 5

Pour des raisons professionnelles, Monsieur Kouadio décide de séjourner pendant 10 ans dans un pays de la sous-région (entre le premier janvier 2020 et le premier janvier 2030). Au titre de son hébergement dans ce pays pendant ces dix ans , il a prévu la somme de 9 000 000 francs CFA.

Afin de préparer son séjour, Monsieur Kouadio a contacté dans ce pays une agence immobilière qui lui donne l'information suivante : « Nous disposons d'un studio dont le loyer annuel pour la première année est fixé à 600 000 FCFA. Toutefois ce loyer annuel est majoré de 10% chaque nouvelle année par rapport à l'année précédente.»

Monsieur Kouadio est hésitant, car il ne sait pas si la somme qu'il a prévue au titre de son hébergement est suffisante pour la location de ce studio. Il se confie à toi.

A l'aide d'une production argumentée utilisant tes connaissances mathématiques, réponds à la préoccupation de M Kouadio.

SPECIMEN

Format de l'épreuve de maths

Série A_2

L'épreuve comporte cinq (5) exercices et évalue les deux (2) compétences de la classe de Terminale A2.

EXERCICE 1 : Test objectif (niveau de taxonomie 1 ou 2).
EXERCICE 2 : Test objectif (niveau de taxonomie 1, 2 ou 3).
EXERCICE 3 : Exercice de renforcement en test subjectif.
EXERCICE 4 : Exercice de renforcement ou d'approfondissement en test subjectif.
EXERCICE 5 : Situation complexe.

SPÉCIMEN

Commentaires

- ✓ Un exercice de renforcement porte sur plusieurs habiletés d'une même leçon.
- ✓ Un exercice d'approfondissement porte sur plusieurs habiletés de plusieurs leçons.
- ✓ Les exercices de renforcement et d'approfondissement ne doivent pas être contextualisés.
- ✓ Un exercice peut porter sur plusieurs compétences.
- ✓ Les exercices 3, 4 et 5 couvriront les deux (2) compétences au programme.
- ✓ Les tests objectifs porteront sur des leçons qui n'auront pas été prises en compte par les exercices 3, 4 et 5.

Distribution des leçons selon les compétences et les thèmes

Compétences	Thèmes	Leçons
Compétence 1	**Thème 1**: Fonctions numériques	Leçon 1 : Etude de fonctions polynômes et de fonctions rationnelles Leçon 2 : Fonction logarithme népérien Leçon 3 : Fonction exponentielle népérienne Leçon 4 : Suites numériques Leçon 5 : Primitives et calcul intégral (série A1 uniquement)
	Thème 2 : Calculs algébriques	Leçon 1 : Systèmes Linéaires dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$
Compétence 2	**Thème 1** : Modélisation d'un phénomène aléatoire	Leçon 1 : Probabilité
	Thème 2 : organisation et traitement des données	Leçon 1 : Statistiques à deux variables

Attribution des points par exercices

Exercice 1 (test objectif)	04 pts
Exercice 2 (test objectif)	
Exercice 3 (renforcement)	11 pts
Exercice 4 (approfondissement)	
Exercice 5 (situation complexe)	05 pts

SPECIMEN

SUJET 1

Exemple d'épreuve de Mathématiques – Série A2

Durée : 2 heures
Coefficient : 2

Exercice 1 (2 points)

Écris le numéro de chaque affirmation suivi de vrai si l'affirmation est vraie ou de faux si l'affirmation est fausse.

N°	Affirmations
1	Toute fonction rationnelle est continue sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.
2	La fonction ln est strictement positive sur l'intervalle $]0 ; 1[$.
3	La fonction : $x \longmapsto 1 - 6x + e^x$ a pour dérivée la fonction : $x \longmapsto e^x - 6$
4	On appelle écart type d'une série statistique X, la racine carrée de la variance de X.

Exercice 2 (2 points)

Pour chacune des affirmations ci-dessous, quatre réponses A, B, C et D sont données dont une seule est juste. Écris sur ta feuille de copie le numéro de l'affirmation suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

N°	Énoncés	Réponses	
1	f est la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.	A	La fonction f' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
		B	La fonction f' est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
		C	La fonction f' est strictement croissante sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
		D	La fonction f' est strictement décroissante sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
2	Dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, le système : $\begin{cases} -e^x + e^y = \dfrac{-3}{2} \\ 2e^x - e^y = \dfrac{7}{2} \end{cases}$ a pour couple de solution …	A	$(-2 ; 2)$
		B	$(-\ln 2 ; \ln 2)$
		C	$(\ln 2 ; -\ln 2)$
		D	$(2 ; -2)$
3	$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \dfrac{1-2x}{x^2-1}$	A	$-\infty$
		B	$+\infty$
		C	0
		D	1
4	Le résultat d'une enquête est consigné dans le tableau suivant : x : 1 2 3 4 5 6 y : 12 13 17 19 21 26 Une équation de la droite d'ajustement de y en fonction de x est :	A	$y = \dfrac{8}{3}x + \dfrac{26}{3}$
		B	$y = \dfrac{8}{3}x - \dfrac{26}{3}$
		C	$y = -\dfrac{8}{3}x + \dfrac{26}{3}$
		D	$y = 2x + \dfrac{26}{3}$

SPÉCIMEN

Exercice 3 (5 points)

Une banque délivre des cartes magnétiques à ses clients. Avec sa carte, un client peut faire un retrait d'un guichet automatique en composant son code secret qui lui a été communiqué par la banque. Chaque code secret s'écrit avec quatre chiffres.

1. Détermine les cartes magnétiques que la banque peut délivrer avec des codes différents.
2. Calcule la probabilité pour que le code secret d'une carte magnétique se termine par 5.
3. Calcule la probabilité pour que le code secret d'une carte s'écrive avec les chiffres 2 ; 4 ; 5 et 8.

Exercice 4 (6 points)

On considère la fonction f définie sur $]0 ;+\infty[$ par : $f(x) = 3 - x + \ln(x)$.

(C) est la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonomé d'unité graphique 1 cm.

La fonction dérivé de f est noté f'.

1. a) Détermine $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.
   b) Déduis-en une interprète graphiquement de ce résultat.
2. a) Détermine $f'(x)$ pour tout nombre réel x appartenant à $]0 ;+\infty[$.
   b) Justifie que f est strictement décroissante sur $]1 ;+\infty[$ et strictement croissante sur $]0;1[$.
   c) Justifie que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$, $f(x) \leq 2$
3. Dresse le tableau de variation de f sur $]1 ;5]$.
4. Justifie que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique noté α comprise entre 4 et 5.
5. Construis la courbe (C) et la droite (D) dans l'intervalle $]0 ; 5]$.

Exercice 5 (5 points)

Dans le cadre de la lutte contre la COVID 19, des chercheurs d'un pays ont modélisé l'évolution de la pandémie par une fonction f définie sur N, par $f(x)$: $f(t) = 120\ t + 1$.

$f(0)$ désigne le nombre de cas de contamination déclaré le jour de l'annonce de la découverte de la maladie dans le pays. Pour $t \neq 0$, $f(t)$ désigne le nombre de nouveau cas de contamination au $t^{ème}$ jour après la déclaration du premier cas.

À l'issu d'un point de presse, le Ministre de la santé, estime que le gouvernement instaurera un couvre-feu, si le nombre total de cas de contamination dans le pays dépasse l0 000 personnes.

Ayant écouté cette information, un de tes camarades de classe estime que si cette tendance se poursuit selon la modélisation décrite par les chercheurs, le couvre-feu interviendra 10 jours après la déclaration du premier cas de COVID-19 dans ce pays.

Dans le cas de cette modélisation et à l'aide d'une argumentation basée sur tes connaissances mathématiques, détermine le nombre de jours à partir duquel le couvre-feu interviendra, et dis si la déclaration de ton camarade de classe est oui ou non juste.

SPÉCIMEN

SUJET 2

Exemple d'épreuve de Mathématiques – Série A2

Durée : 2 heures
Coefficient : 2

Exercice 1 (2 points)

Écris le numéro de chaque énoncé suivi de vrai si l'affirmation est vraie ou de faux si l'affirmation est fausse.

N°	Affirmations
1	La fonction : $x \longmapsto \frac{-2}{x}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et a pour dérivée la fonction : $x \longmapsto \frac{2}{x^2}$
2	Si (u_n) est une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme u_0 égal à -1, alors $u_{10} = 21$.
3	Si deux fonctions ont la même dérivée sur un intervalle I, alors ces fonctions sont égales sur I.
4	$\forall x \in \mathbb{R}$, $\ln(e^x) = x$.

Exercice 2 (2 points)

Pour chacun des énoncés ci-dessous, quatre réponses A,B, C et D, sont données dont une seule est juste.
Écris sur ta feuille de copie le numéro de l'énoncé suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

N°	Énoncés		Réponses
1	Le plus petit entier naturel n tel que : $1-(\frac{1}{3})^n > 0{,}95$ est :	A	2
		B	4
		C	3
		D	5
2	Le nombre $e^3(e^{-2})^5$	A	e^6
		B	e^{-30}
		C	e^{30}
		D	e^{-7}
3	Une urne contient 5 boules noires et 4 boules vertes. On tire simultanément 3 boules de l'urne et on note la couleur de chacune des boules tirées. L'arrondi d'ordre 2 de la probabilité de tirer 3 boules de même couleur est :	A	0,21
		B	0,17
		C	0,19
		D	0,13
4	$\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x - x) =$	A	$-\infty$.
		B	0.
		C	$+\infty$.
		D	1

SPÉCIMEN

Exercice 3 (5 points)

Le tableau ci-dessous donne l'âge X et la moyenne Y des maxima de tension artérielle en fonction de l'âge d'une population féminine.

X	36	42	48	54	60	66
Y	11,8	14	12,6	15	15,5	15,1

1. Calcule la moyenne des séries statistiques associées aux caractères X et Y.
2. Détermine une équation de la droite de régression de y en fonction de x par la méthode de Mayer.
3. En te basant sur ces données, estime la tension artérielle d'une femme de 70.

Exercice 4 (6 points)

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - 2 + e^x$.

(C) est la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 1 cm sur les axes.

1. Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2. a) On suppose que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Détermine la dérivée f' de f.
   b) Etudie le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.
3. a) Démontre que l'équation $x - 2 + e^x = 0$ admet une unique solution noté α dans l'intervalle $]0 ; 1[$.
   b) Justifie que : $0{,}44 < \alpha < 0{,}45$.
4. a) Démontre que la droite d'équation $y = x - 2$ est une asymptote à la courbe de f en $-\alpha$.
   b) Etudie la position relative de (C) et (D).
5. Construis (C) et (D) dans le plan muni du repère (O, I, J).

Exercice 5 (5 points)

Une ONG met à la disposition d'un établissement secondaire privé la somme de 500 000 F en vue de prendre en charge une partie de la scolarité de 16 élèves de Terminale A jugés économiquement faibles. Pour favoriser la scolarisation de la jeune fille, le responsable de l'ONG exige que la prise en charge d'une fille soit de 50 000F et celle d'un garçon de 25000F. Le responsable de l'ONG a des difficultés pour déterminer le nombre maximum de filles et de garçons concernés par cette offre. Elève de cette classe, tu décides d'apporter une solution à la préoccupation du responsable de l'ONG.

A l'aide d'un raisonnement basée sur tes connaissances en mathématiques, Réponds à la préoccupation du responsable de l'ONG.

SPÉCIMEN

SUJET 3

BACCALAURÉAT BLANC UEMOA
SESSION 2021

Durée : 2 heures
Coefficient : 2

MATHÉMATIQUES - SÉRIE A2

Cette épreuve comporte deux (03) pages numérotées 1 sur 3 et 2 sur 3 et 3 sur 3.
Tout modèle de calculatrice scientifique est autorisé.
Les tables trigonométriques, logarithmiques et les règles de calculs sont aussi autorisées

Exercice 1 (2 points)

Pour chaque énoncé, quatre réponses A, B, C et D sont proposées dont une seule est exacte.
Écris sur ta feuille de copie, le numéro de l'énoncé suivi de la lettre de la bonne réponse.

N°	Énoncés	Réponses	
1	La dérivée de la fonction polynôme f définie par $f(x) = 5x^2 - 2x + 3$ est la fonction f' définie par :	A	$f'(x) = 5x - 2$.
		B	$f'(x) = -5x - 2$.
		C	$f'(x) = 10x - 2$.
		D	$f'(x) = 10x + 2$.
2	Si f est une fonction telle que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$, alors la droite d'équation : $y = 2$ est	A	asymptote horizontale à la courbe représentative de f en $-\infty$.
		B	tangente à la courbe au point d'abscisse 2.
		C	asymptote verticale à la courbe représentative de f en $-\infty$.
		D	Tangente à la courbe au point d'abscisse 0.
3	Si $\overline{A}$ est l'événement contraire d'un événement A, alors la probabilité $p(\overline{A})$ est égale à :	A	$\frac{1}{p(A)}$
		B	$1 - p(A)$.
		C	$1 + p(A)$.
		D	1.
4	Pour tout évènement A d'une expérience aléatoire, on a :	A	$1 < p(A)$.
		B	$p(A) < 0$.
		C	$2 \leq p(A) \leq 3$.
		D	$0 \leq p(A) \leq 1$.

SPÉCIMEN

Exercice 2 (2 points)

Pour chaque énoncé, quatre réponses A, B, C et D sont proposées dont une seule est exacte.
Écris sur ta feuille de copie, le numéro de l'énoncé suivi de la lettre de la bonne réponse.

N°	Énoncés	Réponses	
1	On tire cinq cartes au hasard dans un jeu de 32 cartes. La probabilité d'avoir un roi est égale à :	A	$\frac{C_4^1 \times C_{28}^4}{C_{32}^5}$
		B	$C_4^1 \times C_{28}^4$
		C	$\frac{C_4^1 - C_{28}^4}{C_{32}^5}$
		D	$\frac{C_4^1 + C_{28}^4}{C_{32}^5}$
2	$\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - 3x^2 + x - 5)$	A	5.
		B	-3.
		C	$+\infty$.
		D	$-\infty$.
3	$\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ est égale à :	A	0.
		B	2.
		C	1.
		D	$+\infty$.
4	f est une fonction polynôme dont la dérivée f' est telle que : $f'(x) = x^2 - 3$. La fonction f est strictement :	A	croissante sur $]-\infty ; -\sqrt{3}[$ et sur $]\sqrt{3} ; +\infty[$.
		B	croissante sur $]-\sqrt{3} ; \sqrt{3}[$.
		C	croissante sur $\mathbb{R}$.
		D	décroissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 (4 points)

Une urne contient 5 boules noires numérotées de 1 à 5, 4 boules rouges numérotées de 2 à 5 et une boule blanche numérotée 5.

On tire au hasard une boule de l'urne.

On considère les évènements suivants :

A : « La boule tirée est noire » ;

B : « La boule tirée porte un numéro pair ».

1. Détermine la probabilité p(A) de l'évènement A.
2. Détermine la probabilité p(B) de l'évènement B.
3. Calcule la probabilité de tirer une boule noire ou une boule portant un numéro pair.

SPÉCIMEN

Exercice 4 (7 points)

On considère la fonction f définie sur $]-1;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x+1}$.

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1. a) Détermine la limite de f en $+\infty$.
   b) Détermine la limite de f à droite en -1 puis donne une interprétation graphique du résultat.
2. On suppose que f est dérivable sur $]-1;+\infty[$.

Démontre que : $\forall x \in]-1;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}$.

3. a) Justifie que :
   - $\forall x \in]-1;1[$, $f'(x) < 0$;
   - $\forall x \in]1;+\infty[$, $f'(x) > 0$.
   b) Détermine les variations de f puis dresse le tableau de variation de f.
4. On admet que : $\forall x \in]-1;+\infty[$, $f(x)=x-3+\dfrac{4}{x+1}$.
   a) Démontre que la droite (D) d'équation : $y = x - 3$ est asymptote oblique à (C).
   b) Détermine la position relative de (C) et (D).

Exercice 5 (5 points)

Les élèves du club santé d'un lycée, ayant pris conscience de la pénurie de sang dans leur pays, ont organisé une séance de collecte de sang. Sur un échantillon de 18 personnes qui se sont présentées, on a noté 11 personnes du groupe A, 4 personnes du groupe B, 2 personnes du groupe O et une personne du groupe AB.
Pour expliquer certaines analyses que va subir en laboratoire chaque poche de sang, le technicien en prélève simultanément 3 au hasard parmi les 18.
Le président et certains membres du club affirment qu'il y a plus de chance que les 3 poches appartiennent au même groupe sanguin qu'à 3 groupes différents. Ce que contestent d'autres membres du club.
En utilisant les outils mathématiques au programme, départage les deux groupes.

SPÉCIMEN

SUJET 4

BACCALAURÉAT SESSION 2021

Durée : 2 heures
Coefficient : 2

MATHÉMATIQUES - SÉRIE A2

Cette épreuve comporte deux (02) pages numérotées 1 sur 2 et 2 sur 2.
Tout modèle de calculatrice scientifique est autorisé.
Les tables trigonométriques, logarithmiques et les règles de calculs sont aussi autorisées

Exercice 1 (2 points)

Écris, sur ta feuille de copie, le numéro de chacune des affirmations ci-dessous suivi de **Vrai** si l'affirmation est vraie ou de **Faux** si l'affirmation est fausse.

N°	Affirmation
1.	La droite d'ajustement linéaire d'un nuage de points d'une série statistique passe par le point moyen.
2.	Si A et B sont deux évènements incompatibles d'un univers Ω, alors $P(A\cup B) = P(A) - P(B)$.
3.	Pour tous nombres réels a et b, $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$.
4.	La fonction $x \mapsto ln(x)$ est strictement positive sur $]1 ; +\infty[$.
5.	Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0, alors pour tout n élément de $\mathbb{N}$, $u_n = u_0 - nr$.

Exercice 2 (2 points)

Pour chacune des affirmations incomplètes du tableau ci-dessous, trois réponses A, B et C sont proposées dont une seule permet d'avoir l'affirmation juste.
Écris sur ta feuille de copie le numéro de l'affirmation incomplète suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

Par exemple, pour l'affirmation incomplète 1, la bonne réponse est A. Tu écriras 1-A

N°	Affirmation incomplète	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1.	$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} \frac{1}{x-2}$ est égale à …	$-\infty$.	0.	$+\infty$.
2.	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x}$ est égale à …	$-\infty$.	0.	$+\infty$.
3.	La dérivée sur $]0 ; +\infty[$ de la fonction $x \mapsto -3x + 2 - lnx$ est la fonction …	$x \mapsto -3 - \frac{1}{x}$.	$x \mapsto -3 + \frac{1}{x}$.	$x \mapsto 2 + \frac{1}{x}$.
4.	Dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, l'ensemble des solutions du système d'équations $\begin{cases} \ln(x) - \ln(y) = -2 \\ 2\ln(x) + \ln(y) = 5 \end{cases}$ est …	$\{(e^3, e)\}$.	$\{(e^2, e^3)\}$.	$\{(e, e^3)\}$.
5.	La somme $u_0 + u_1 + \cdots + u_{121}$ d'une suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est égale à …	$121\times\frac{(u_0+u_{121})}{2}$.	$122\times\frac{(u_0+u_{121})}{2}$.	$121\times\frac{(u_0+u_{122})}{2}$.

SPÉCIMEN

Exercice 3 (5 points)

On considère la suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$u_0 = 10$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}7u_n$.

1. Calcule u_1 et u_2.
2. Donne la raison de cette suite géométrique.
3. Justifie que pour tout entier naturel n, $u_n = 10\times(0{,}7)^n$.
4. Détermine la somme S telle que : $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{2020}$.

Exercice 4 (6 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2 + x - e^x$.
On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
L'unité graphique est le centimètre.

1. Détermine la limite de f en - ∞.
2. On admet que pour tout x différent de 0, $f(x) = x(\frac{2}{x} + 1 - \frac{e^x}{x})$.
   Détermine la limite de f en +∞.
3. Justifie que la droite (Δ) d'équation $y = 2 + x$ est une asymptote à (C) en $-\infty$.
4. On suppose que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.
   a) Justifie que pour tout nombre réel x, $f'(x) = 1 - e^x$.
   b) Justifie que f est croissante sur]$-\infty$; 0[et décroissante sur]0 ; +∞[.
   c) Dresse le tableau de variation de f.

Exercice 5 (5 points)

La coopérative de ton village produit et commercialise les produits agricoles. Une partie des gains sert à la réalisation des projets sociaux pour le village. Le reste est reparti entre les membres.
Cette année, l'Assemblée Générale a décidé de reprofiler les routes des champs du village si la coopérative gagne au moins 19 millions de francs. Les productions et gains de la coopérative des huit (8) dernières années sont consignés dans le tableau ci-dessous.

x_i quantités de produits en tonnes	24	24	26	28	29	32	33	34
y_i gains réalisés en millions de francs	8	9	7	13	10	17	14	16

Le président, en observant le tableau, se demande si une production de 38 tonnes pourra leur permettre de réaliser le projet de reprofilage.
A l'aide d'une production argumentée basée sur tes connaissances mathématiques, dis si la coopérative peut réaliser son projet.

SPECIMEN

SUJET 5

BACCALAURÉAT SESSION 2021

Durée : 3 heures
Coefficient : 3

MATHÉMATIQUES - SÉRIE A1

Cette épreuve comporte deux (02) pages numérotées 1 sur 2 et 2 sur 2
Chaque candidat recevra une (1) feuille de papier millimétré.
Tout modèle de calculatrice scientifique est autorisé.
Les tables trigonométriques, logarithmiques et les règles de calculs sont aussi autorisées

SPECIMEN

Exercice 1 (2 points)

Écris, sur ta feuille de copie, le numéro de chacune des affirmations ci-dessous suivi de **Vrai** si l'affirmation est vraie ou de **Faux** si l'affirmation est fausse.

N°	Affirmation
1.	La droite d'ajustement linéaire d'un nuage de points d'une série statistique passe par le point moyen.
2.	Si A et B sont deux évènements incompatibles d'un univers Ω, alors P(A∪B) = P(A) – P(B).
3.	Pour tous nombres réels a et b, $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$.
4.	La fonction $x \mapsto ln(x)$ est strictement positive sur]1 ; +∞[.
5.	Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0, alors pour tout n élément de ℕ, $u_n = u_0 - nr$.

Exercice 2 (2 points)

Pour chacune des affirmations incomplètes du tableau ci-dessous, trois réponses A, B et C sont proposées dont une seule permet d'avoir l'affirmation juste.
Écris sur ta feuille de copie le numéro de l'affirmation incomplète suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse choisie.

Par exemple, pour l'affirmation incomplète 1, la bonne réponse est A. Tu écriras 1-A

N°	Affirmation incomplète	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1.	$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} \frac{1}{x-2}$ est égale à …	$-\infty$.	0.	$+\infty$.
2.	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x}$ est égale à …	$-\infty$.	0.	$+\infty$.
3.	La dérivée sur]0 ; +∞[de la fonction $x \mapsto -3x + 2 - lnx$ est la fonction …	$x \mapsto -3 - \frac{1}{x}$.	$x \mapsto -3 + \frac{1}{x}$.	$x \mapsto 2 + \frac{1}{x}$.
4.	Dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, l'ensemble des solutions du système d'équations $\begin{cases}\ln(x) - \ln(y) = -2\\ 2\ln(x) + \ln(y) = 5\end{cases}$ est …	$\{(e^3, e)\}$.	$\{(e^2, e^3)\}$.	$\{(e, e^3)\}$.
5.	La somme $u_0 + u_1 + \cdots + u_{121}$ d'une suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est égale à …	$121\times\frac{(u_0+u_{121})}{2}$.	$122\times\frac{(u_0+u_{121})}{2}$.	$121\times\frac{(u_0+u_{122})}{2}$.

Exercice 3 (5 points)

On considère la suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$u_0 = 10$ et par pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}7u_n$.

1. Calcule u_1 et u_2.

2. Donne la raison de cette suite géométrique.

3. *a*) Justifie que pour tout entier naturel n, $u_n = 10\times(0{,}7)^n$.
   b) Déduis du 3.*a*), le plus petit entier naturel n tel que : $u_n \leq 0{,}14$.

4. Détermine la somme S telle que : $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{2020}$.

Exercice 4 (6 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2 + x - e^x$.
On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
L'unité graphique est le centimètre.

1. Détermine la limite de f en $-\infty$.

2. On admet que pour tout x différent de 0, $f(x) = x(\frac{2}{x} + 1 - \frac{e^x}{x})$.
   Détermine la limite de f en $+\infty$.

3. Justifie que la droite (Δ) d'équation $y = 2 + x$ est une asymptote à (C) en $-\infty$.

4. On suppose que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.
   a) Justifie que pour tout nombre réel x, $f'(x) = 1 - e^x$.
   b) Justifie que f est croissante sur $]-\infty\,;\,0[$ et décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$.
   c) Dresse le tableau de variation de f.

5. Justifie que l'équation $f(x) = 0$, admet une solution unique α dans l'intervalle]1,1 ; 1,2[.

6. *a*) Recopie et complète le tableau suivant :

x	-3	-2,5	-2	-1	0	1	2
Arrondi d'ordre 1 de $f(x)$		−0,6			1		-3,4

b) Trace (Δ) et (C) sur l'intervalle [-3 ; 2] dans le plan muni du repère (O, I, J).

Exercice 5 (5 points)

La coopérative de ton village produit et commercialise les produits agricoles. Une partie des gains sert à la réalisation des projets sociaux pour le village. Le reste est reparti entre les membres.
Cette année, l'Assemblée Générale a décidé de reprofiler les routes des champs du village si la coopérative gagne au moins 19 millions de francs. Les productions et gains de la coopérative des huit (8) dernières années sont consignés dans le tableau ci-dessous.

x_i quantités de produits en tonnes	24	24	26	28	29	32	33	34
y_i gains réalisés en millions de francs	8	9	7	13	10	17	14	16

Le président, en observant le tableau, se demande si une production de 38 tonnes pourra leur permettre de réaliser le projet de reprofilage.
A l'aide d'une production argumentée basée sur tes connaissances mathématiques, dis si la coopérative peut réaliser son projet.

SPECIMEN

BACCALAURÉAT BLANC UEMOA
SESSION 2021

MATHÉMATIQUES - SÉRIE A2

CORRIGÉ

SPECIMEN

Exercice 1 (2 points)

1 – C ; 2 – A ; 3 – B ; 4 – D ……**0,5×4**

Exercice 2 (2 points)

1 – A; 2 – D ; 3 – B ; 4 – A ……**0,5×4**

Exercice 3 (4 points)

Corrigé	
1) $p(\text{A}) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$	**1**
2) $p(\text{B}) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$	**1**
3) $p(\text{A} \cup \text{B}) = p(\text{A}) + p(\text{B}) - p(\text{A} \cap \text{B}) = \frac{5}{10} + \frac{4}{10} - \frac{2}{10} = \frac{7}{10}$	**2**

1 NOTION DE CONTINUITÉ

Définition

Lorsqu'une fonction f est définie en un point a et admet une limite en a, cette limite est égale à $f(a)$. On dit que f est continue en a.

Toute fonction polynôme est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

Toute fonction rationnelle est continue en tout point de son ensemble de définition.

Propriété

- La somme de deux fonctions continues en a est une fonction continue en a.
- Le produit de deux fonctions continues en a est une fonction continue en a.
- Le quotient d'une fonction f continue en a par une fonction g continue en a telle que $g(a)$ soit différent de zéro est une fonction continue en a.

Exercices de fixation

1 Parmi les fonctions ci-dessous, cite celles qui sont continues en 0.

a) $f(x) = x^2 + x + 5$; b) $g(x) = \frac{x}{x}$; c) $h(x) = \frac{x+2}{x-4}$.

2 Les fonctions f et g sont continues en 2 et $f(2) = 0$ et $g(2) \neq 0$.

Parmi les fonctions ci-dessous, cite celles qui sont continues en 2.

1) $f + g$; 2) $f - g$; 3) fg ; 4) $\frac{f}{g}$;

5) $\frac{g}{f}$; 6) $\frac{f}{f}$

3 Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes:

a) La fonction $f : x \mapsto x^2 + 4x$ est continue sur $\mathbb{R}$.....

b) La fonction $g : x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]-1 ; 1[$.....

c) La fonction $g : x \mapsto \frac{x}{x+3}$ est continue sur $]-3 ; +\infty[$.

Définition

On dit qu'une fonction est continue sur un intervalle I si elle est continue en tout point de I.

Exercice de fixation

3 Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes: **0,5**

a) La fonction $f : x \mapsto x^2 + 4x$ est continue sur $\mathbb{R}$..... **0,5**

b) La fonction $g : x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]-1 ; 1[$..... **0,5**

c) La fonction $g : x \mapsto \frac{x}{x+3}$ est continue sur $]-3 ; +\infty[$. **0,5**

Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$. Toute fonction rationnelle est continue sur tout intervalle ouvert de son ensemble de définition. **1,5**

Propriété

Si une fonction est dérivable en un point, alors elle est continue en ce point.

2 PRIMITIVE

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On appelle primitive de f sur I, toute fonction F dérivable sur I telle que f soit la dérivée de F.

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x - 3$ et $g(x) = x^2 - 3x + 7$. **0,5**

g est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ car g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme toute fonction polynôme et pour tout nombre réel x, on a : **0,5**

$g'(x) = 2x - 3$. Ce qui donne : $g'(x) = f(x)$.

Propriété

Toute fonction continue sur un intervalle I admet au moins une primitive sur I. **0,5**

Exercice 4 (7 points) Corrigé

a) $\lim_{x \to -1} (x^2 + 2x + 1) = 0$; $\lim_{x \to -1} \frac{1}{x+1} = +\infty$

La droite d'équation $x = -1$ est asymptote à (C_f).

b)

2. Pour tout $x \in]-1;+\infty[$,

$$\frac{(2x-2)(x+1) - 1(x^2-2x+1)}{}$$

$= -\frac{2+4}{2} = 1$

Pour tout $x \in]-1;+\infty[$, on a $(x+1)^2 > 0$, donc $f'(x)$

$(x+3)(x-1)$

x	$-\infty$	-3		1		$+\infty$
$(x+3)(x-1)$		0		0		

Donc $f'(1) = 0$, pour $x \in]-1;1[$, $f'(x) < 0$ et pour $x \in]1;+\infty[$ $f'(x) > 0$

b) Variations de f

Pour $x \in]-1;1[$, $f'(x) < 0$, f est strictement décroissan

Pour $x \in]1;+\infty[$, $f'(x) > 0$, f est strictement croissante

Tableau de variation de f.

x	-1		1	
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗

4. a) $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (x-3)] = \lim_{x \to +\infty} \frac{4}{x+1} = 0$

Donc la droite (D) d'équation $y = x - 3$ est asymptote oblique à (C_f).

b) $f(x) - (x-3) = \frac{4}{x+1}$

Pour tout $x \in]-1;+\infty[$, on a $x + 1 > 0$, donc $\frac{4}{x+1} > 0$

Par conséquent (C_f) est au-dessus de (D) sur $]-1;+\infty[$

SPECIMEN

Exercice 5 (5 points)

Le cardinal de l'univers est : $C_{18}^{3} = 816$

Soit les événements suivants :

E : « les 3 poches appartiennent au même groupe sanguin »

F : « les 3 poches appartiennent à trois groupes sanguins différents »

$P(E) = \frac{C_{11}^{3}+C_{4}^{3}}{816} = \frac{169}{816} \approx 0{,}207$

Les cas où les trois groupes sanguins sont différents sont : A-B-AB ; A-B-O ; A-AB-O et A-AB-B

$P(F) = \frac{11\times4\times2+11\times4\times1+11\times2\times1+4\times2\times1}{816} = \frac{162}{816} \approx 0{,}199$

On a : p(E) > p(F) donc c'est le président du club qui a raison.

Grille de correction

Critères	Indicateurs	Barème de notation
CM1 : **Pertinence**	- Pour résoudre le problème je vais chercher la probabilité que les 3 poches appartiennent au même groupe sanguin et celle que les 3 poches appartiennent à trois groupes sanguins différents - Je vais comparer ces deux probabilités	**0,75 point** 1 *ind* → 0,25 2 *ind* → 0,5 3 *ind* → 0,75
CM2 : **Utilisation correcte des outils mathématiques en situation**	- Présence d'évènements - Présence du calcul de probabilités - Calcul de Card(Ω) - Calcul de p(E) - Calcul de p(F) - Exactitude des formules	**2,5 point** 1 *ind sur* 8 → 0,5 2 *ind sur* 8 → 1 3 *ind sur* 8 → 1,5 3 *ind sur* 8 → 2,5
CM3 : **Cohérence de la réponse**	- Comparaison des probabiltés et interprétation - Le résultat produit est conforme au résultat attendu - Le résultat produit est en adéquation avec la démarche - La qualité des enchainements de la démarche	**1,25 point** 1 *ind sur* 3 → 0,75 2 *ind sur* 3 → 1,25
CP : **Critère de perfectionnement**	- Concision - Originalité - Bonne présentation	**0,5 point** 1 *ind sur* 3 → 0,25 2 *ind sur* 3 → 0,5

SPÉCIMEN

1 NOTION DE CONTINUITÉ

Définition

Lorsqu'une fonction f est définie en un point a et admet une limite en a, cette limite est égale à $f(a)$. On dit que f est continue en a.



Toute fonction polynôme est continue en tout point de $\mathbb{R}$.
Toute fonction rationnelle est continue en tout point de son ensemble de définition.

Propriété

- La somme de deux fonctions continues en a est une fonction continue en a.
- Le produit de deux fonctions continues en a est une fonction continue en a.
- Le quotient d'une fonction f continue en a par une fonction g continue en a telle que $g(a)$ soit différent de zéro est une fonction continue en a.

Exercices de fixation

1 Parmi les fonctions ci-dessous, cite celles qui sont continues en 0.

a) $f(x) = x^2 + x + 5$; b) $g(x) = \frac{1}{x}$; c) $h(x) = \frac{x+2}{x-4}$.

.....

.....

.....

.....

2 Les fonctions f et g sont continues en 2 et $f(2) = 0$ et $g(2) \neq 0$.
Parmi les fonctions ci-dessous, cite celles qui sont continues en 2

1) $f + g$; 2) $f - g$; 3) fg ; 4) $\frac{f}{g}$;
5) $\frac{1}{f}$; 6) $\frac{g}{f}$

.....

.....

.....

.....

Définition

On dit qu'une fonction est continue sur un intervalle I si elle est continue en tout point de I.

Exercice de fixation

3 Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes:

a) La fonction $f : x \mapsto x^2 + 4x$ est continue sur $\mathbb{R}$ .....

b) La fonction $g : x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]-1 ; 1[$ .....

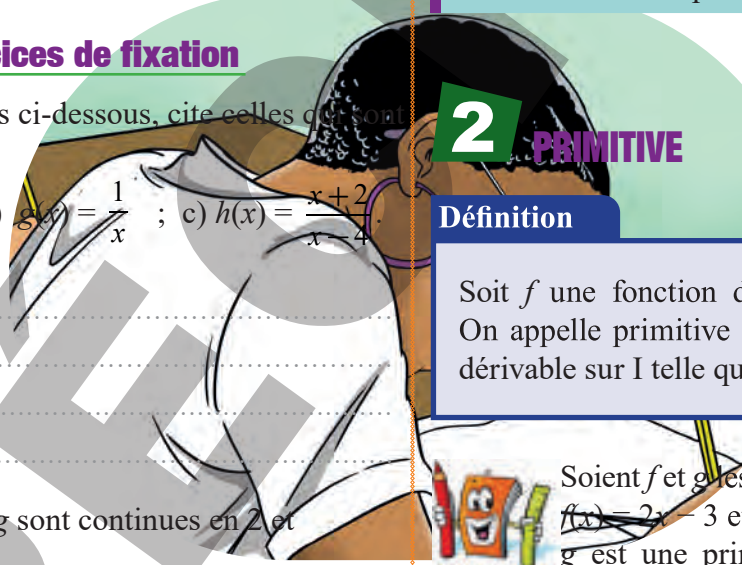
c) La fonction $g : x \mapsto \frac{x}{x+3}$ est continue sur $]-3 ; +\infty[$.



Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.
Toute fonction rationnelle est continue sur tout intervalle ouvert de son ensemble de définition.

Propriété

Si une fonction est dérivable en un point, alors elle est continue en ce point.



2 PRIMITIVE

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On appelle primitive de f sur I, toute fonction F dérivable sur I telle que f soit la dérivée de F.

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x - 3$ et $g(x) = x^2 - 3x + 7$.
g est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ car g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme toute fonction polynôme et pour tout nombre réel x, on a :
$g'(x) = 2x - 3$. Ce qui donne : $g'(x) = f(x)$.

Propriété

Toute fonction continue sur un intervalle I admet au moins une primitive sur I.

FORMULAIRE DE SPECIMEN

FORMULAIRE

1 COMBINATOIRE - DÉNOMBREMENTS

Card (A∪B) = Card A + Card B − Card (A∩B).
Card (A×B) = Card A × Card B.

Soit E un ensemble de n éléments.

Nombre de permutations de E :

$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$; $0! = 1$.

Nombre d'arrangements de p éléments de E :

$A_n^p = n(n-1)\ldots(n-p+1)$, $p \leq n$.

Nombre de sous-ensembles de p éléments de E :

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

$C_n^p = C_n^{n-p}$; $C_{n+1}^{p+1} = C_n^p + C_n^{p+1}$ $(p \leq n)$.

2 PROBABILITÉS

Ω est l'univers d'une expérience aléatoire.

Si A et B sont incompatibles : P(A∪B) = P(A) + P(B).

Dans le cas général :

P(A∪B) = P(A) + P(B) − p(A∩B)

$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$; $P(\Omega) = 1$; $P(\emptyset) = 0$.

Si $A_1 \ldots, A_n$ forment une partition de A,

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$$

Dans le cas équiprobable : $P(A) = \frac{Card\ A}{Card\ \Omega}$.

Variable aléatoire (Série A)

Espérance mathématique: $E(X) = \sum_{i=1}^{n} P_i x_i$.

Variance: $V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - E(X))^2$.

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - (E(X))^2.$$

Écart-type : $\sigma_x = \sqrt{V(X)}$.

• A. Identités remarquables

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$;

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2 b + 3ab^2 - b^3$;

$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + b^n$;

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$; $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

• B. Équation du second degré dans ℝ

(Soit a, b, c des nombres réels, $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac$.
L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet :

- si $\Delta > 0$, deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

• C. Suites arithmétiques, suites géométriques

(Formules valables sur C et donc sur ℝ.)

Suites arithmétiques

- ✓ Par une formule de récurrence : $u_{n+1} = u_n + r$ (r est la raison).
- ✓ Par une formule explicite : $u_n = u_0 + nr$ ou $u_n = u_p + (n-p)r$.
- ✓ Somme de termes consécutifs

$$\text{nombre de termes} \times \frac{\text{Premier terme + dernier terme}}{2}.$$

- ✓ On écrit aussi :

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n).$$

- ✓ Cas particulier : $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Suites géométriques

- ✓ Par une formule de récurrence : $v_{n+1} = q \times v_n$ (q est la raison).
- ✓ Par une formule explicite : $v_n = q^n \times v_0$ ou $v_n = q^{(n-p)} \times v_p$.
- ✓ Somme de termes consécutifs

$$\text{premier terme} \cdot \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1-q} \quad (q \neq 1).$$

- ✓ On écrit aussi : $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$

$$= v_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1-q}.$$

- ✓ Cas particulier : $1 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q}$ $(q \neq 1)$.

SPÉCIMEN

3 FONCTIONS

• A. Propriétés algébriques des fonctions usuelles

➲ 1. Fonctions logarithmes et exponentielles

$\ln 1 = 0$

$\ln e = 1$

Pour $a > 0$ et $b > 0$:

$\ln ab = \ln a + \ln b$.

$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$.

$\ln a^x = x \ln a$.

$e^0 = 1$.

$e^{a+b} = e^a e^b$.

$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$.

$a^x = e^{x \ln a}$ $(a > 0)$.

$(e^a)^b = e^{ab}$.

Si $x \in]-\infty ; +\infty[$ et $y \in]0 ; +\infty[$,

$y = \exp x = e^x$ équivaut à $x = \ln y$

• B. Limites usuelles de fonctions et de suites

➲ 1. Fonctions

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

Croissances comparées à l'infini

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$;

$\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$;

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$;

Comportement à l'origine de ln x,

$\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$.

Croissances comparées à l'origine

$\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$.

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha \ln x = 0$.

➲ 2. Suites

Si $a > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} a^n = +\infty$. Si $0 < a < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} a^n = 0$.

• C. Dérivées et primitives

(Les formules ci-dessous peuvent servir à la fois pour calculer des dérivées et des primitives)

➲ 1. Dérivées et primitives des fonctions usuelles

f(x)	f '(x)	Intervalle de validité
k	0	$]-\infty ; +\infty[$
x	1	$]-\infty ; +\infty[$
x^n, $n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$]-\infty ; +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty ; 0[$ ou $]0 ; +\infty[$
$\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$, $n \in \mathbb{N}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty ; 0[$ ou $]0 ; +\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0 ; +\infty[$
x^α, $\alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0 ; +\infty[$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$]0 ; +\infty[$
e^x	e^x	$]-\infty ; +\infty[$
e^{rx}, $r \in \mathbb{R}$	re^{rx}	$]-\infty ; +\infty[$

➲ 2. Opérations sur les dérivées

$(f+g)' = f' + g'$.

$(kf)' = kf'$, $k \in \mathbb{R}$.

$(fg)' = f'g + fg'$.

$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$

SPÉCIMEN

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$; $(e^u)' = e^u u'$.

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, avec u à valeurs strictement positives.

$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$.

• **D. Calcul intégral** ***(Série A_1)***

Formules fondamentales

Si F est une primitive de f, alors

$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$

4 STATISTIQUE

- ***Moyenne***

$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$ et $\overline{Y} = \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n}$,

- ***Variance (Série A_1)***

$V(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{X}^2$ et

$V(Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \overline{Y}^2$.

- ***Covariance***

$Cov(X;Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \overline{X}\overline{Y}$.

- ***Coefficient de corrélation linéaire***

$r = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}$.

Si $|r|$ est proche de 1 , c'est-à-dire : $0{,}87 \leq r < 1$ ou $-1 < r \leq -0{,}87$, alors on dit qu'il y a une bonne corrélation linéaire ou une forte corrélation linéaire entre les deux caractères X et Y.

- ***Droites de régression (Série A_1)***

$y = ax + b$ où $a = \frac{Cov(X,Y)}{V(X)}$ et $b = \overline{Y} - a\overline{X}$ est appelée la droite de régression de Y en X.

$x = a'y + b'$ avec : $a' = \frac{Cov(X,Y)}{V(Y)}$ et $b' = \overline{X} - a'\overline{Y}$ est appelée la droite de régression de X en Y.

- ***Ajustement par la méthode de Mayer (Série A2 uniquement)***

Soit une série statistique partagée en deux sous-séries 1 et 2 d'égal effectif.

Soit G_1 le point de meyen de la sous-serie 1 et G_2 celui de la sous-série 2

$G_1(\overline{X}_1 ; \overline{Y}_1)$ et $G_2(\overline{X}_2 ; \overline{Y}_2)$

La droite $(G_1 G_2)$ est la droite d'ajustement selon la méthode de Mayer.

Une équation de cette droite sous la forme

$y = ax + b$ est telle que : $a = \frac{\overline{Y}_2 - \overline{Y}_1}{\overline{X}_2 - \overline{X}_1}$ et $b = \overline{Y}_1 - a\overline{X}_1$.

SPÉCIMEN

1 NOTION DE CONTINUITÉ

Définition

Lorsqu'une fonction f est définie en un point a et admet une limite en a, cette limite est égale à $f(a)$. On dit que f est continue en a.



Toute fonction polynôme est continue en tout point de $\mathbb{R}$.
Toute fonction rationnelle est continue en tout point de son ensemble de définition.

Propriété

- La somme de deux fonctions continues en a est une fonction continue en a.
- Le produit de deux fonctions continues en a est une fonction continue en a.
- Le quotient d'une fonction f continue en a par une fonction g continue en a telle que $g(a)$ soit différent de zéro est une fonction continue en a.

Exercices de fixation

1 Parmi les fonctions ci-dessous, cite celles qui sont continues en 0.

a) $f(x) = x^2 + x + 5$; b) $g(x) = \frac{1}{x}$; c) $h(x) = \frac{x+2}{x-4}$.

.....

.....

.....

.....

2 Les fonctions f et g sont continues en 2 et $f(2) = 0$ et $g(2) \neq 0$.
Parmi les fonctions ci-dessous, cite celles qui sont continues en 2

1) $f + g$; 2) $f - g$; 3) fg ; 4) $\frac{f}{g}$;
5) $\frac{1}{f}$; 6) $\frac{g}{f}$

.....

.....

.....

.....

Définition

On dit qu'une fonction est continue sur un intervalle I si elle est continue en tout point de I.

Exercice de fixation

3 Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes:

a) La fonction $f : x \mapsto x^2 + 4x$ est continue sur $\mathbb{R}$.....

b) La fonction $g : x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]-1 ; 1[$.....

c) La fonction $g : x \mapsto \frac{x}{x+3}$ est continue sur $]-3 ; +\infty[$.



Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.
Toute fonction rationnelle est continue sur tout intervalle ouvert de son ensemble de définition.

Propriété

Si une fonction est dérivable en un point, alors elle est continue en ce point.

2 PRIMITIVE

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On appelle primitive de f sur I, toute fonction F dérivable sur I telle que f soit la dérivée de F.



Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x - 3$ et $g(x) = x^2 - 3x + 7$.
g est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ car g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme toute fonction polynôme et pour tout nombre réel x, on a :
$g'(x) = 2x - 3$. Ce qui donne : $g'(x) = f(x)$.

Propriété

Toute fonction continue sur un intervalle I admet au moins une primitive sur I.

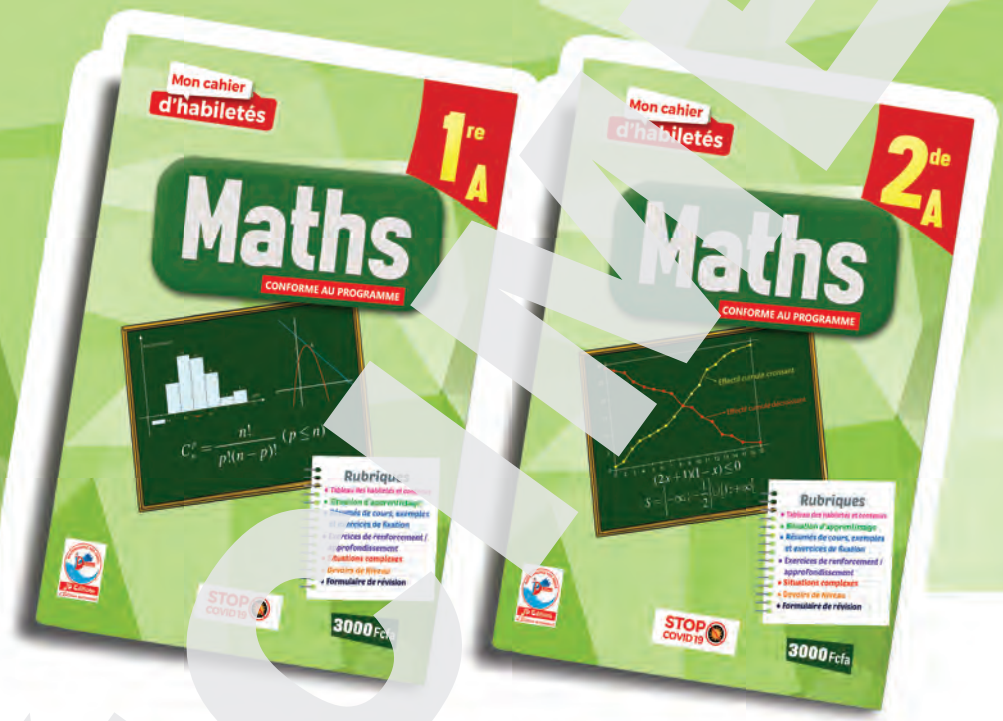
SPÉCIMEN



SPECIMEN

Achevé d'imprimer sous les presses de : JD Éditions
Pour le compte de JD Éditions.
Tél. : 25 23 00 17 50
Mise en page : JD Éditions
2ème trimestre 2021
Dépôt légal N° 10763 du 23 septembre 2013

De la même collection



MESURES BARRIÈRES



ISBN 979-10-91832-05-2
9 791091 832052

SPECIMEN