

La fonction $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x de $\mathbb{R}$, $(e^x)' = e^x$.
Or, pour tout réel x de $\mathbb{R}$, $e^x > 0$; donc la fonction $x \mapsto e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
On admet les conséquences suivantes :

Conséquences

- Pour tous nombres réels a et b strictement positifs , on a :

$$e^a = e^b \iff a = b \qquad e^a = 1 \iff a = 0$$

$$e^a < e^b \iff a < b \qquad e^a \leq e^b \iff a \leq b$$
- Pour tout nombre réel y strictement positif, l'équation $y = e^x$ admet une unique solution $x \in \mathbb{R}$.

Théorème (Admis)

Pour nombre réel y strictement positif et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

- $y = e^x \iff x = \ln y$;
- $\ln e^x = x$;
- $e^{\ln y} = y$.

💡 Pour tout $x \in]0; +\infty[$ on a :

$$\ln e^x = e^{\ln x} = x$$

13.2.1 Travaux dirigés

1 Résolution des équations du type : $\exp[u(x)] = \exp[v(x)]$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivants :

$$\begin{array}{ll} (1) & e^{\frac{1}{x^2}-1} = 1 \\ (2) & e^{2x^2} = e^{-3x-1} \\ (3) & e^{2x} + 4e^x + 3 = 0 \\ (4) & e^{3x} + e^x - 2 = 0 \end{array}$$



SOLUTION

Résolution de l'équation (1)

Contraintes sur l'inconnue :

$$x^2 \neq 0 \iff x \neq 0. \text{ Donc } x \in \mathbb{R}^*.$$

Soit x un nombre de $\mathbb{R}^*$.

$$(1) \iff e^{\frac{1}{x^2}-1} = 1$$

$$(1) \iff \frac{1}{x^2} - 1 = 0$$

$$(1) \iff \frac{1}{x^2} = 1$$

$$(1) \iff x^2 = 1$$

$$(1) \iff x = 1 \text{ ou } x = -1$$

L'équation (1) admet comme solution :

$$S = \{-1; 1\}$$

Résolution de l'équation (2)

Contraintes sur l'inconnue :

$$x \in \mathbb{R}$$

Soit x un nombre de $\mathbb{R}$.

$$(2) \iff e^{2x^2} = e^{-3x-1}$$

$$(2) \iff 2x^2 = -3x - 1$$

$$(2) \iff 2x^2 + 3x + 1 = 0 \quad (*)$$

La somme des coefficients de cette équation de degré pair et égale la somme des coefficients de impair, donc -1 est une racine de $(*)$.

Soit α la deux racines.

$$\text{Aors } -\alpha = \frac{1}{2}, \text{ c'est-à-dire } \alpha = -\frac{1}{2}.$$

L'équation (2) admet comme solution :

$$S = \left\{ -1; -\frac{1}{2} \right\}$$