

Chapitre 3

Les Matrices

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif (en particulier ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).)

3.1 Généralités

3.1.1 Définitions et Notations

Définition 3.1.1.

Sient n et m deux entiers naturels non nuls. On appelle matrice à n lignes et m colonne (ou de type (n, m) à coefficients dans $\mathbb{K}$, toute application de $[[1, n]] \times [[1, m]]$ dans $\mathbb{K}$. les images a_{ij} des couples (i, j) sont appelés coefficients ou termes de la matrice.

Dans la pratique, une matrice est écrite sous une des formes suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

En notation abrégée, A s'écrit : $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$.

Remarque 3.1.1. Pour n et m deux entiers naturels non nuls donnés, **une matrice** à n lignes et m colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un **tableau rectangulaire** à n lignes et m colonnes et donc à nm cases, chaque case contenant un élément de $\mathbb{K}$. Dans ce cas, la matrice est de format (n, m) .

L'ensemble des matrices à n lignes et à m colonnes sera désigné par : $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$.

• Dans le cas particulier où tous les coefficients de la matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ sont nuls (c'est à dire $a_{ij} = 0$ pour tous $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$), on dit que A est nulle et on la note par $O_{n,m}$.

• Une matrice à n lignes et 1 colonne s'appelle une matrice colonne ou unicolonne. L'ensemble des matrices unicolonnes se note $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

• Une matrice à 1 ligne et m colonnes s'appelle une matrice ligne ou uniligne. L'ensemble des matrices uniligne se note $\mathcal{M}_{1,m}(\mathbb{K})$.

• La matrice uniligne $L_i = (a_{i1} \dots a_{ij} \dots a_{im})$ est la i -ième ligne de la matrice A .

• La matrice unicolonne $C_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ est appelée la j -ième colonne de A .

Exemples 3.1.1. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, est une matrice de type $(2, 3)$.
 $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, est une matrice de type $(1, 6)$.

Définition 3.1.2 (Egalité de deux matrices).

Deux matrices $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ sont dites égales si

1. elles sont de même type, c'est à dire $n = p$ et $m = q$,
2. pour tout $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$, on a $a_{ij} = b_{ij}$.

3.1.2 Matrices carrées d'ordre n

Définition 3.1.3.

Une matrice de type (n, n) est appelée matrice carrée d'ordre n .

L'ensemble des matrices carées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

La suite $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ est appelée **diagonale principale**.

Matrices particulières :

1. On appelle matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, notée I_n , la matrice dont les coefficients diagonaux sont égaux à 1 et les autres sont nuls.

$$I_n = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Matrice identité}} \quad O_n = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Matrice nulle d'ordre } n}$$

2. On dit qu'une matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ est **triangulaire supérieure** si $a_{ij} = 0$ pour tout $i > j$.
3. On dit qu'une matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ est **triangulaire inférieure** si $a_{ij} = 0$ pour tout $i < j$.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_{(n-1)n} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}}_{\text{Matrice triangulaire supérieure}} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{pmatrix}}_{\text{Matrice triangulaire inférieure}}$$

4. On dit qu'une matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ est **diagonale** si $a_{ij} = 0$ pour tout $i \neq j$.
5. Une matrice diagonale dont tous les termes diagonaux sont égaux est appelée **matrice scalaire**.

$$aI_n = \underbrace{\begin{pmatrix} a & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a \end{pmatrix}}_{\text{Matrice scalaire}} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix}}_{\text{Matrice diagonale}}$$

6. Une matrice carrée est dite **symétrique** (respectivement **antisymétrique**) si $a_{ij} = a_{ji}$ (respectivement $a_{ij} = -a_{ji}$) pour tous i, j de $[[1, n]]$.

3.2 L'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et opérations sur les matrices

3.2.1 Addition de deux matrices - produit d'une matrice par un scalaire

Définition 3.2.1 (Somme de deux matrices).

Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ deux matrices de même type (n, m) .

On additionne terme à terme pour obtenir la matrice somme $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ de même type (n, m) .

On ne peut pas faire la somme de deux matrices de type différents.

La somme de deux matrices définit une loi de composition interne sur $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et elle possède les propriétés suivantes :

Proposition 3.2.1.

Soit A, B et C trois matrices de même type (n, p) et $0_{n,m}$ la matrice nulle dont les coefficients sont égaux à 0.

1. $(A + B) + C = A + (B + C)$ (l'associativité).
2. $A + 0_{n,m} = 0_{n,m} + A = A$ (l'élément neutre).
3. $A + (-A) = 0_{n,m}$ (l'opposé).
4. $A + B = B + A$ (commutativité).

Conclusion : L'ensemble $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, muni de l'addition, est un groupe abélien.

Définition 3.2.2 (Multiplication d'une matrice par un scalaire.).

Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ une matrice de type (n, m) et soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

On définit la matrice λA comme matrice dont tous les coefficients sont multipliés par λ : $\lambda A = (\lambda a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$.

λA est une matrice de même type (n, m) .

La multiplication d'une matrice par un scalaire définit une loi externe sur $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ qui possède les propriétés suivantes.

Proposition 3.2.2.

Soit A, B deux matrices de même type (n, p) et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ deux scalaires.

1. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$.
2. $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$.
3. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$.
4. $1.A = A$

D'après les propositions précédentes on a le résultat suivant :

Théorème 3.2.1.

L'ensemble $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire **est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.**

3.2.2 Produit de deux matrices**Définition 3.2.3.**

Le produit d'une matrice uniligne $(a_{11} \dots a_{1i} \dots a_{1m})$ de type $(1, m)$ **par une ma-**

trice unicolonne $\begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{i1} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{pmatrix}$ de type $(m, 1)$ est défini par :

$$(a_{11} \dots a_{1i} \dots a_{1m}) \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{i1} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{pmatrix} = (a_{11}b_{11} + \dots + a_{1i}b_{i1} + \dots + a_{1m}b_{m1}).$$

Définition 3.2.4 (Produit de deux matrices).

Le Produit d'une matrice $A = (a_{ij})$ **de type** (n, m) **par une matrice** $B = (b_{ij})$ **de type** (m, p) est la matrice $C = (c_{ij})$, de type (n, p) , définie par

$$C = A \times B = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}, \text{ avec } c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik}b_{kj}.$$

On note que dans le cas général $\times$ n'est pas une loi interne car les matrices que l'on multiplie n'appartiennent pas au même ensemble.

Exemples 3.2.1. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Calculons AB :

$$\begin{aligned}
A.B &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 0 \times 2 + 0 \times 0 & 0 \times 1 - 1 \times 2 + 0 \times 0 & 1 \times 1 - 1 \times 2 + 1 \times 0 \\ 1 \times 0 + 0 \times (-1) + 0 \times 1 & 0 \times 0 - 1 \times (-1) + 0 \times 1 & 1 \times 0 - 1 \times (-1) + 1 \times 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Remarque 3.2.1. 1. Le produit BA de deux matrices n'est défini que si le nombre de colonnes de B est égal au nombre de lignes de A .

2. Le produit matriciel n'est pas commutatif, car si BA est défini, AB ne l'est pas en général.

3. **Cas particulier :** Si A et B sont des matrices carrées d'ordre n , les produits AB et BA sont toujours définis mais $AB \neq BA$, en général, comme le montre l'exemple suivant :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Alors : } AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposition 3.2.3.

1. Si B et B' sont des matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, A et A' des matrices de $\mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K})$, alors :
 $(B + B')A = BA + B'A$ et $B(A + A') = BA + BA'$.
2. Si $C \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$, et $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, alors :
 - (a) $C(BA) = (CB)A$.
 - (b) Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $B(\lambda A) = (\lambda B)A = \lambda(BA)$.

Exemples 3.2.2. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $M(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$.

1. Calculer $M(t).M(t')$ pour $(t, t') \in \mathbb{R}^2$
2. Calculer $(M(t))^n$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ (où $(M(t))^n = M(t) \times \dots \times M(t)$).

3.2.3 Matrices élémentaires

Soient n et m deux entiers naturels non nuls. Pour $(i, j) \in [[1, n]] \times [[1, m]]$, on note $E_{i,j}$ la matrice rectangulaire de format (n, m) dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient ligne i , colonne j , qui est égal à 1.

Les matrices $E_{i,j}$ sont appelées les **matrices élémentaires**.

On a $E_{i,j} = (\delta_{k,i} \cdot \delta_{\ell,j})_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq \ell \leq m}}$ où $\delta_{u,v} = \begin{cases} 1 & \text{si } u = v \\ 0 & \text{si } u \neq v \end{cases}$, (symbole de Kronecker).

Si $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ est une matrice donnée, alors

$$A = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} a_{ij} \cdot E_{i,j}.$$

Ce qui permet de donner le théorème suivant :

Théorème 3.2.2.

La famille des matrices élémentaires $(E_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, c'est sa base canonique.

Et on a $\dim(\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})) = nm$.

En particulier, $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})) = n^2$.

Exemples 3.2.3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} = E_{1,1} + 2E_{1,2} + 4E_{1,3} - 2E_{2,2}$

Exemples 3.2.4. Dans $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, On a

$\mathcal{B} = \{E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3}\}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ et on a par exemple :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = aE_{1,1} + bE_{1,2} + cE_{1,3} + dE_{2,1} + eE_{2,2} + fE_{2,3}.$$

Proposition 3.2.4 (Produit de deux matrices élémentaires).

$$\forall (i, j, k, \ell) \in [[1, n]] \times [[1, p]] \times [[1, p]] \times [[1, q]], \quad E_{i,j} \times E_{k,\ell} = \delta_{j,k} E_{i,\ell},$$

$$\text{où } \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

$\delta_{i,j}$ s'appelle le **symbole de Kronecker** ou **delta de Kronecker**.

Exemple

$$E_{1,2} \times E_{2,4} = E_{1,4}$$

$$E_{2,3} \times E_{1,4} = 0$$

$$E_{i,j} \times E_{j,\ell} = E_{i,\ell}$$

Exercice 3.2.1. On considère la matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer N^2 et N^3 .

3.3 Matrice d'une application linéaire

3.3.1 Matrice d'une application linéaire

Notations : Soient E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel non nul de dimension finie n et $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ une base de E .

Soit $a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n$ un vecteur de E (c'est à dire $(a_1, \dots, a_n)$ sont les composantes de a dans la base B). On note

(1) $(a)_B$ le vecteur $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$,

(2) $[a]_B$ la matrice colonne $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

Exemples 3.3.1. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $B = (1 + X, X + X^2, 2 + X^2)$.

1. Vérifier que B est une base de E .

2. Soit $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 \in E$. Calculer $(P)_B$ et $[P]_B$.
3. Application : $P = 3 - 2X$.

Définition 3.3.1.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de **dimension finie**. Soit $u : E \rightarrow F$ une application linéaire ;

$B_1 = \{e_1, \dots, e_m\}$ une base de E et $B_2 = \{f_1, \dots, f_n\}$ une base de F .

On appelle matrice de u par rapport aux bases B_1 et B_2 la matrice de colonnes $[u(e_1)]_{B_2}, [u(e_2)]_{B_2}, \dots, [u(e_m)]_{B_2}$. c'est à dire :

$$M(u, B_1, B_2) = \begin{pmatrix} [u(e_1)]_{B_2} & \dots & [u(e_i)]_{B_2} & \dots & [u(e_m)]_{B_2} \\ a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

avec $u(e_i) = a_{1i}f_1 + \dots + a_{ni}f_n$. Autrement dit $[u(e_i)]_{B_2} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$.

- La matrice $M(u, B_1, B_2)$ est de type (n, m) .
- Le nombre de colonnes est égale a la dimension de E
- le nombre de ligne est égale à la dimension de F .

Exemples 3.3.2. (1) On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y, z) = (2x - z, -x + y + z).$$

Si on note $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ et $B' = \{e'_1, e'_2\}$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ respectivement, alors la matrice de f par rapport aux bases B et B' est

$$M(f, B, B') = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n . Soit $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E . On considère l'application identité $\text{id}_E : E \rightarrow E$ qui à x associe x . On a

$$M(\text{id}_E, B, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_n.$$

(3) On considère l'application $p : \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}^2$ définie par $p(x, y) = (x, 0)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{K}^2$. Considérons la base canonique $B = \{e_1, e_2\}$ de $\mathbb{K}^2$. Alors on a $p(e_1) = p(1, 0) = (1, 0)$ et $p(e_2) = p(0, 1) = (0, 0)$ et

$$M(p, B, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(4) On considère l'application linéaire

$$D : \mathbb{K}_3[X] \longrightarrow \mathbb{K}_2[X] \\ P \longmapsto D(P) = P'$$

Soient $B_1 = (1, X, X^2, X^3)$ et $B_2 = (1, X, X^2)$ les bases canoniques de $\mathbb{K}_3[X]$ et $\mathbb{K}_3[X]$ respectivement.

Alors la matrice de D relativement aux bases B_1 et B_2 est

$$M(D, B_1, B_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

3.3.2 Isomorphisme entre $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{L}(E, F)$

Proposition 3.3.1.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies ; B une base de E et B' une base de F . Alors

1. $\forall (f, g) \in (\mathcal{L}(E, F))^2, \quad M(f + g, B, B') = M(f, B, B') + M(g, B, B').$
2. $\forall f \in \mathcal{L}(E, F) \text{ et } \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad M(\lambda f, B, B') = \lambda M(f, B, B').$

Démonstration. Soient $B = \{e_1, \dots, e_m\}$ une base de E et $B' = \{f_1, \dots, f_n\}$ une base de F . Le coefficient ligne i , colonne j , $(i, j) \in [[1, n]] \times [[1, m]]$, de $M(\lambda f + g, B, B')$ est la i -ème coordonnée du vecteur $\lambda f(e_j) + g(e_j)$ dans la base B' .

De même Le coefficient ligne i , colonne j , $(i, j) \in [[1, n]] \times [[1, m]]$, de $\lambda M(f, B, B') + M(g, B, B')$ est la i -ème coordonnée du vecteur $\lambda f(e_j) + g(e_j)$. Ceci montre que

$$M(\lambda f + g, B, B') = \lambda M(f, B, B') + M(g, B, B').$$

□

Si E est de dimension $n \in \mathbb{N}$ et F est de dimension $m \in \mathbb{N}$, alors $\dim(\mathcal{L}(E, F)) = mn$ et on a $\dim(\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})) = mn$. Donc ces deux espaces sont isomorphes.

Dans le théorème suivant on va expliciter un isomorphisme entre $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{M}_{n,m}$.

Théorème 3.3.1.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de **dimension finie**, $B = \{e_1, \dots, e_m\}$ une base de E et $B' = \{f_1, \dots, f_n\}$ une base de F .

L'application :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{L}(E, F) &\longrightarrow \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}) \\ f &\longmapsto \varphi(f) = M(f, B, B') \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Démonstration. D'abord l'application φ est linéaire.

φ est **injective**, en effet : Soit $(f, g) \in (\mathcal{L}(E, F))^2$: $\varphi(f) = \varphi(g)$, alors $M(f, B, B') = M(g, B, B')$, d'où $(\forall j \in \{1, 2, \dots, m\}) \quad f(e_j) = g(e_j)$, donc $f = g$.

φ est **surjective**, en effet : Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ de terme général a_{ij} . Alors, on considère l'application linéaire f de E dans F définie par : $(\forall j \in \{1, 2, \dots, m\}) \quad f(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} f_i$, on a bien :

$$\varphi(f) = A.$$

Conclusion : φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

□

Proposition 3.3.2 (Matrice de la composée de deux applications).

Soient E , F et G trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies non nulles notées respectivement n , p et q . Soient B_1 une base de E , B_2 une base de F et B_3 une base de G . Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors,

$$M(gof, B_1, B_3) = M(g, B_2, B_3) \times M(f, B_1, B_2).$$

Démonstration. Soient $B_1 = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E , $B_2 = \{f_1, \dots, f_p\}$ une base de F et $B_3 = \{g_1, \dots, g_q\}$ une base de G .

Posons $f(e_i) = \sum_{j=1}^p a_{ji} f_j$ et $g(f_i) = \sum_{k=1}^q b_{ki} g_k$.

Alors,

$$gof(e_i) = \sum_{k=1}^q \left(\sum_{j=1}^p b_{kj} a_{ji} \right) g_k$$

ce qui donne le résultat. $\square$

3.3.3 L'image d'un vecteur par une application linéaire**Proposition 3.3.3.**

Soient E et F deux e.v de dimensions finies non nulles n et m . Soient B une base de E et B' une base de F .

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ puis $M = M(u, B, B')$ la matrice de u .

$X = [x]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ le vecteur colonne dont les composantes sont les coordonnées de $x \in E$ dans la base B .

et $Y = [u(x)]_{B'} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ le vecteur colonne dont les composantes sont les coordonnées de $u(x)$ dans la base B' alors :

$$Y = MX.$$

Preuve : Soient $B = (e_1, e_2, \dots, e_m)$ une base de E et $B' = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ une base de F . Soit $M = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$.

Soit $x = \sum_{j=1}^m x_j e_j$ de E , alors

$$u(x) = \sum_{j=1}^m x_j u(e_j) = \sum_{j=1}^m x_j \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} f_i \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} x_j \right) f_i.$$

$$\text{On a } [x]_B = X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \text{ et } [u(x)]_{B'} = Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } Y = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m a_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^m a_{2j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m a_{nj}x_j \end{pmatrix}$$

$$\text{D'où } \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}. \quad \square$$

Proposition 3.3.4.

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$
 Si $\forall X \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K}) \quad AX = BX$, alors $A = B$

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n)$ de matrice A et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n)$ de matrice B relativement aux bases canoniques de $\mathbb{K}^m$ et $\mathbb{K}^n$.

$(\forall X \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K}) \quad AX = BX) \implies (\forall x \in \mathbb{K}^m, \quad f(x) = g(x)) \implies f = g \implies A = B.$ $\square$

3.4 Matrice inversible. Le groupe $GL_n(\mathbb{K})$ **Définition 3.4.1.**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre n .
 la matrice A est **inversible** si, et seulement si, il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$A.B = B.A = I_n,$$

où I_n est la matrice carrée unité d'ordre n .

Dans ce cas la matrice B est unique et se note A^{-1} et s'appelle l'inverse de la matrice A .
 On note $GL_n(\mathbb{K})$ **l'ensemble des matrices carrées inversibles** pour $\times$.

Proposition 3.4.1.

Si A et B sont deux matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors
 $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$ et $(A^{-1})^{-1} = A$.

Proposition 3.4.2.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $(GL_n(\mathbb{K}), \times)$ est un groupe.

L'élément neutre est la matrice identité I_n .

Si $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$, alors $AB^{-1} \in GL_n(\mathbb{K})$.

Matrice de l'inverse d'une application linéaire

Proposition 3.4.3.

Soient E et F deux espaces vectoriels de même dimension et de bases respectives B et B' . Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

f est bijective $\iff$ la matrice $M(f, B, B')$ est inversible.

De plus

$$(M(f, B, B'))^{-1} = M(f^{-1}, B', B).$$

Une matrice A est inversible à gauche (reps. à droite) s'il existe une matrice B telle que $B \times A = I_n$ (resp. $A \times B = I_n$).

Proposition 3.4.4.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

A est inversible $\iff A$ est inversible à droite $\iff A$ est inversible à gauche.

Exercice 3.4.1. Soit A une matrice carrée d'ordre n vérifiant l'équation $A^3 + 4A - 2I_n = 0_n$. Montrer que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 3.4.2. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Exprimer A en fonction de N et I_3 .
2. calculer N^3 .
3. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1} .

3.5 Transposée d'une matrice

Définition 3.5.1.

Soit $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$ Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ une matrice à n lignes et m colonnes, de terme général a_{ij} .

La matrice transposée de A , notée ${}^tA$ est la matrice à m lignes et à n colonnes, de terme général b_{ij} défini par :

$$b_{ij} = a_{ji}, \text{ pour tout } (i, j) \in [[1, m]] \times [[1, n]].$$

(les lignes deviennent des colonnes et les colonnes deviennent des lignes).

Exemples 3.5.1.

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \text{ alors } {}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

Les propriétés usuelles de calcul de la transposition sont :

Proposition 3.5.1.

Soient A et B sont deux matrices, alors :

1. ${}^t({}^t(A)) = A$.
2. ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$.
3. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, ${}^t(\lambda.A) = \lambda.{}^tA$.
4. Si le produit AB est défini on a : ${}^t(AB) = ({}^tB)({}^tA)$.

Proposition 3.5.2.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors on a

A est inversible $\iff {}^tA$ est inversible.

De plus, en cas d'inversibilité on a

$$({}^tA)^{-1} = {}^tA^{-1}.$$

Définition 3.5.2.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. A est dite symétrique si, et seulement si, ${}^tA = A$ c'est à dire $\forall (i, j) \in (\{1, 2, \dots, n\})^2$, $a_{ij} = a_{ji}$.
2. A est dite antisymétrique si, et seulement si, ${}^tA = -A$ c'est à dire $\forall (i, j) \in (\{1, 2, \dots, n\})^2$, $a_{ij} = -a_{ji}$.

Définition 3.5.3.

On désigne par $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices symétriques d'ordre n et $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des matrices antisymétriques d'ordre n .

3.6 Changement de bases

3.6.1 Matrice de passage

Définition 3.6.1 (Matrice d'une famille).

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E .

La matrice d'une famille $(u_1, \dots, u_p)$, de vecteurs de E , dans la base B est la matrice de type (n, p) dont le coefficient ligne i , colonne j est la i^{em} coordonnée de u_j dans la base B . On la note par $Mat_B(u_1, \dots, u_p)$.

Exemple : (1) si $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et si $u_1 = e_1 - 3e_2$ et $u_2 = e_1 + e_2 + 4e_3$,

$$\text{alors } Mat_B(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposition 3.6.1.

Soient E un espace vectoriel de dimension n et $B = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E . Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de n vecteurs de E .
 $(u_1, \dots, u_n)$ est une base de $E \iff \text{Mat}_B(u_1, \dots, u_n)$ est inversible.

Preuve : Posons $A = \text{Mat}_B(u_1, \dots, u_n)$ et soit f l'endomorphisme de E définie par la matrice A . Par définition de A , $\forall i \in [[1, n]]$, $f(e_i) = u_i$. Donc
 $(u_1, \dots, u_n)$ est base de $E \iff f$ est bijective $\iff A$ est inversible.

Définition 3.6.2.

Soient E un espace vectoriel de dimension n puis B et B' deux bases de E . La matrice de passage de la base B à la base B' , notée $P_{BB'}$, est la matrice de la base B' dans la base B .
 c-à-d

$$P_{BB'} = \text{Mat}_B(B').$$

Autrement dit, si $B = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $B' = (e'_i)_{1 \leq i \leq n}$ deux bases de E . Alors

$$P_{BB'} = \begin{pmatrix} [e'_1]_B & [e'_2]_B & \dots & [e'_n]_B \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Exemple : La matrice de passage de la base canonique $B_0 = (1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ à la base $B' = (P_0 = 1, P_1 = X - 1, P_2 = (x - 1)^2)$ est $P_{B_0 B'} = \text{Mat}_{B_0}(B') = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Proposition 3.6.2.

Soient E un espace vectoriel de dimension n , $B = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $B' = (e'_i)_{1 \leq i \leq n}$ deux bases de E et $P_{BB'}$ la matrice de passage de B à B' . Alors

1. $P_{BB'} = M(\text{id}_E, B', B)$,
2. $P_{BB'}$ est inversible et $(P_{BB'})^{-1} = P_{B'B}$ la matrice de passage de B' à B .

Exercice 3.6.1. (1)

1. Vérifier que $S = \{\varepsilon_1 = (1, 0, 1), \varepsilon_2 = (1, 1, 0), \varepsilon_3 = (0, 0, 1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
 2. Donner P_{BS} la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base S .
 3. Calculer P_{SB} la matrice de passage de la base S à la base canonique $B = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$.
- (2) Soit $B = \{1, X\}$ la base canonique de $\mathbb{R}_1[X]$ et $B' = \{2X + 1, X + 1\}$ une famille de polynômes de $\mathbb{R}_1[X]$.
1. Montrer que B' est une base de $\mathbb{R}_1[X]$.
 2. Calculer $P_{BB'}$.

3.6.2 Action sur les coordonnées d'un vecteur

Théorème 3.6.1.

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie n , B et B' deux bases de E . Soient

$u \in E$ tel que $X = [u]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $X' = [u]_{B'} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ et $P_{BB'} = (a_{ij})$ est la

matrice de passage de B à B' . Alors,

$$[u]_B = P_{BB'}[u]_{B'} \quad \text{ou} \quad X = P_{BB'}X'$$

c'est à dire

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\text{coordonnées de } u \text{ dans } B} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{\text{matrice de passage}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}}_{\text{coordonnées de } u \text{ dans } B'}$$

Preuve : On a $P_{BB'} = M(id_E, B', B)$. $id_E : (E, B') \rightarrow (E, B)$.

Soit $u = \sum_{i=1}^n x_i e_i = \sum_{i=1}^n x'_i e'_i$,

On a : $[u]_B = M(id_E, B', B)[u]_{B'}$ d'où $[u]_B = P_{BB'} \cdot [u]_{B'}$, c-à-d $X = P_{BB'} \cdot X'$ et alors

$$[u]_{B'} = (P_{BB'})^{-1} \cdot [u]_B = P_{B'B} \cdot [u]_B$$

3.6.3 Changement de bases et applications linéaires

Théorème 3.6.2.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies.

Soient B_1 et B'_1 deux bases de E et B_2 et B'_2 deux bases de F .

Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire.

Soit $M = M(f, B_1, B_2)$ et $M' = M(f, B'_1, B'_2)$ la matrice de f dans les bases B'_1 et B'_2 ,

$P = P_{B_1 B'_1}$ la matrice de passage de B_1 à B'_1

et $Q = P_{B_2 B'_2}$ la matrice de passage de B_2 à B'_2 . On a alors

$$M' = Q^{-1}MP.$$

$$\begin{array}{ccc} (E, B_1) & \xrightarrow{f} & (F, B_2) \\ P \downarrow & & \downarrow Q \\ (E, B'_1) & \xrightarrow{f} & (F, B'_2) \end{array}$$

Preuve : Soit $u \in E$.

Soient $X = [x]_{B_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $X' = [x]_{B'_1} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ les vecteurs colonnes dont les composantes sont les coordonnées de x dans B_1 et B'_1 .

Soient $Y = [u(x)]_B = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ et $Y' = [u(x)]_{B'} = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}$ les vecteurs colonnes dont les composantes sont les coordonnées de $f(x)$ dans B_2 et B'_2 .

On a $Y = QY'$, donc $Y' = Q^{-1}Y$. Puisque $Y = MX$, alors $Y' = Q^{-1}MX$.
Et $X = PX'$, donc $Y' = Q^{-1}MPX'$.
D'autre part, $Y' = M'X'$. Ce qui montre que $M'X' = Q^{-1}MPX'$ pour tout X .
D'où $M' = Q^{-1}MP$ (d'après la Proposition 2.9).

Un cas particulier très important du théorème précédent est :

Proposition 3.6.3.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie non nulle n .
Soient B et B' deux bases de E et $P = P_{BB'}$ la matrice de passage de B à B' .
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. soient $A = M(f, B, B)$ et $B = M(f, B', B')$. Alors,

$$B = P^{-1}AP.$$

3.6.4 Matrices équivalentes et matrices semblables

Définition 3.6.3.

1. Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites semblables s'ils existent une matrice $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$. Autrement dit, A et b sont deux matrices d'une même application linéaire.
2. Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_{nm}(\mathbb{K})$ sont dites équivalentes s'ils existent deux matrices carrées inversibles P et Q telles que $B = P.A.Q$;
 P est une matrice carrée d'ordre n et Q étant une matrice carrée d'ordre m ;

3.7 Rang d'une matrice

3.7.1 Définition du Rang d'une matrice

Définition 3.7.1.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice de type (n, p) .
Le rang de la matrice A , noté $rg(A)$, est le rang de ces vecteurs colonnes dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

Exemples : $rg \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$. $rg \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1$. $rg \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$. $rg \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 1$.

3.7.2 Lien avec le rang d'une famille

Proposition 3.7.1.

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E . Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de p vecteurs de E . Soit $A = \text{Mat}_B(u_1, \dots, u_p)$. Alors, $\text{rg}(A) = \text{rg}(u_1, \dots, u_p)$.

Démonstration. On considère l'application $\phi : \mathcal{M}_{n,1} \rightarrow E$ telle que $\phi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$.

$\rightarrow \phi$ est linéaire.

$\rightarrow \phi$ est bijective car l'image par ϕ de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est $(e_1, \dots, e_n)$ la base de E . Donc ϕ est un isomorphisme.

Notons $C_1, \dots, C_p$ les colonnes de A on a alors

$$\begin{aligned} \text{rg}(A) &\iff \text{rg}(C_1, \dots, C_p) \\ &= \dim(\text{Vect}(C_1, \dots, C_p)) \\ &= \dim(\phi(\text{Vect}(C_1, \dots, C_p))) \\ &= \dim(\text{Vect}(\phi(C_1), \dots, \phi(C_p))) \\ &= \dim(\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)) = \text{rg}(u_1, \dots, u_p) \end{aligned}$$

□

En prenant les premières propriétés du rang d'une famille, on en déduit immédiatement

Proposition 3.7.2.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}$. Alors

1. $\text{rg}(A) \leq \min(n, p)$.
2. $\text{rg}(A) = n \iff$ les colonnes de A forment une famille génératrice de $\mathcal{M}_{n,1}$.
3. $\text{rg}(A) = p \iff$ les colonnes de A forment une famille génératrice de $\mathcal{M}_{1,p}$.

En particulier on a le résultat suivant

Proposition 3.7.3.

Soit $A \in \mathcal{M}_n$. Alors

1. $\text{rg}(A) \leq n$.
2. $\text{rg}(A) = n \iff$ les colonnes de A forment une famille génératrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
 $\iff A$ est inversible.

3.7.3 Lien avec le rang d'une application linéaire

Proposition 3.7.4.

Soient E et F deux espaces de dimensions respectives n et p puis B une base de E et B' une base de F .

Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $A = M(f, B, B')$.

Alors, $rg(A) = rg(f)$

Preuve : Posons $B = (e_1, \dots, e_n)$ de sorte que $A = Mat_{B'}(f(e_1), \dots, f(e_n))$.
Alors,

$$rg(f) = rg(f(e_1), \dots, f(e_n)) = rg Mat_{B'}(f(e_1), \dots, f(e_n)) = rg(A).$$

3.7.4 Caractérisation du rang d'une matrice

Soient n, p deux entiers naturels non nuls. Pour $r \leq \min(n, p)$ on définit la matrice

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r, p-r} \\ 0_{n-r, r} & 0_{n-r, p-r} \end{pmatrix}.$$

I_r désignant la matrice unité d'ordre r et $0_{u,v}$ désignant la matrice nulle de format (u, v) .

On peut alors caractériser le rang d'une matrice à partir de la matrice J_r .

Théorème 3.7.1.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Soit $r \leq \min(n, p)$.

$rg(A) = r \iff A$ est équivalente à J_r

Preuve :

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Soit $r \leq \min(n, p)$. Choisissons deux espaces vectoriels E et F de dimensions p et n respectivement.

Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire définie par la matrice A .

D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(f)) = \dim(E) - rg(f) = p - r.$$

Soit, alors, $(e_{r+1}, \dots, e_p)$ une base de $\ker(f)$ que l'on complète par les vecteurs $(e_1, \dots, e_r)$ en une base de E . Donc $(f(e_1), \dots, f(e_r))$ est une base de $Im(f)$ que l'on complète par les vecteurs $f_{r+1}, \dots, f_n$ en une base de F .

La matrice de f par rapport aux bases $B = (e_1, \dots, e_{r+1}, \dots, e_p)$ et $B' = ((f(e_1), \dots, f(e_r), f_{r+1}, \dots, f_n)$ est donc J_r .

D'où A est équivalente à J_r .

Corollaire 8.

Soit $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}$.

A et B sont équivalents $\iff rg(A) = rg(B)$.

Proposition 3.7.5.

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ on a

$$rg({}^tA) = rg(A).$$

Cela veut dire que le rang d'une matrice est aussi le rang du système de ses vecteurs lignes.

Corollaire 9.

Soit $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, avec $L_1, \dots, L_n$ ses lignes et $C_1, \dots, C_p$ ses colonnes. Alors

$$rg(A) = rg(L_1, \dots, L_n) = rg(C_1, \dots, C_p).$$

Exemples 3.7.1. Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

3.7.5 Matrices échelonnée**Définition 3.7.2.**

Une matrice $A \in \mathcal{M}_{nm}(\mathbb{K})$ est dite échelonnée si, et seulement si,

1. Toute ligne nulle n'est suivie que de lignes nulles.
2. L'indice de colonne du premier terme non nul de toute ligne non nulle est supérieur à l'indice de colonne du premier terme non nul de la ligne qui la précède.

Autrement dit, Le nombre de 0 au début de chaque ligne est strictement croissant quand on passe d'une ligne à la suivante.

→ Le premier élément non nul de chaque ligne est appelé **pivot**.

→ Si A est ligne échelonnée, on note m.l.e

Exemples 3.7.2. Les deux matrices suivantes sont échelonnées :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Par contre la matrice suivante } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

n'est pas échelonnée.

Définition 3.7.3.

Matrice échelonnée réduite canonique

Une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ est dite à lignes échelonnées réduite et on note m.l.e.r si

1. A est m.l.e.
2. Le premier élément non nul de toute ligne (Le pivot) est égal à 1.

Définition 3.7.4.

Une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ est dite à lignes échelonnées réduite canonique et on note m.l.e.r.c si

1. A est m.l.e.r
2. Chaque pivot est le seul coefficient non nul dans sa colonne.

Exemples 3.7.3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Matrice échelonnée réduite canonique

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice n'est pas échelonnée

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice échelonnée réduite mais elle n'est pas échelonnée réduite canonique

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice échelonnée réduite canonique

Proposition 3.7.6.

Le rang d'une matrice échelonnée égal au nombre de ses lignes non nuls.

Preuve : Dans une matrice échelonnée les lignes forment un système libre.

Exemple

Le rang de $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ égal à 4.

3.8 Opérations élémentaires (Transformations de Gauss)

3.8.1 Opérations élémentaires (Transformations de Gauss)

Les transformations élémentaires sur les colonnes ou les lignes d'une matrice, ne modifiant pas le rang de cette matrice sont :

- Echange de deux colonnes. L'échange de la colonne i et de la colonne j ($i \neq j$) se note $C_i \leftrightarrow C_j$.
- Echange de deux lignes. L'échange de la ligne i et de la ligne j ($i \neq j$) se note $L_i \leftrightarrow L_j$.
- Multiplier une colonne par un nombre $\lambda \neq 0$. Le remplacement de la colonne j par λ fois cette ligne se note $C_j \leftrightarrow \lambda C_j$.

Multiplier une ligne par un nombre $\lambda \neq 0$. On note $L_j \leftrightarrow \lambda L_j$.

- Ajouter une colonne C_j à une autre. On note $C_i \leftrightarrow \lambda C_i + C_j$.

Ajouter une ligne à une autre. On note $L_i \leftrightarrow \lambda L_i + L_j$.

On en déduit d'autres transformations moins élémentaires sur les colonnes ou les lignes d'une matrice, ne modifiant pas le rang de cette matrice :

- Ajouter à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes : $L_j \leftrightarrow \sum_{i \neq j} \lambda L_i$

Proposition 3.8.1.

1. Soit A' une matrice obtenue à partir de A par des transformations élémentaires. Alors, $rg(A') = rg(A)$
2. Soient B et C deux formes échelonnées d'une matrice A . Alors $rg(B) = rg(C) = rg(A)$.

Preuve, 1) Posons $L_1, L_2, \dots, L_n$ les lignes de A et A' une matrice obtenue à partir de A en remplaçons la ligne L_i par $L'_i = \alpha L_i + \sum_{t=1, t \neq i}^n \alpha_t \cdot L_t$, avec $\alpha \neq 0$ alors

$$rg(A) = \dim(\text{vect}(L_1, \dots, L_i, \dots, L_n)) = \dim(\text{vect}(L_1, \dots, L'_i, \dots, L_n)) = rg(A').$$

Par le même raisonnement, le rang ne change pas si on applique des permutations ou d'autres opérations élémentaires.

2) Se déduit immédiatement de 1).

Corollaire 10.

Le rang d'une matrice A est égal au rang d'une forme échelonnée de A .

3.8.2 Applications 1 : Calcul de l'inverse d'une matrice

Exemple

1. Calcul de du rang d'une Matrice :

Calculer le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Calcul de l'inverse d'une matrice :

Montrer que la matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.

3.8.3 La résolution des systèmes linéaires

La forme matricielle

Définition 3.8.1.

Soit Σ le système

$$\Sigma : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

où $x_1, \dots, x_p$ sont les inconnus et les nombres a_{ij} sont les coefficients du système.

Σ peut aussi s'écrire sous la forme matricielle : $AX = b$ avec $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

1. A est appelé la matrice associée au système Σ .
2. la matrice élargie $(A|b) \in \mathcal{M}_{n,p+1}(\mathbb{K})$ est appelé la matrice élargie du système Σ .

Théorème 3.8.1.

Soient Σ le système d'équations linéaires de matrice élargie $(A|b)$ et Σ' le système d'équations linéaires de matrice élargie $(A'|b')$.

Si $(A|b)$ est équivalente à $(A'|b')$ par les transformations de Gauss alors Σ est équivalent à Σ' .

$$(A|b) \sim_{\text{Gauss}} (A'|b') \Rightarrow \Sigma \simeq \Sigma'.$$

Corollaire 11.

Soient Σ et Σ' deux systèmes d'équations linéaires **homogènes** de matrices A et A' . Alors

$$A \sim_{\text{Gauss}} A' \Rightarrow \Sigma \simeq \Sigma'.$$

Théorème 3.8.2.

Soit Σ un système de matrice élargie $(A|b) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} & b_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2p} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} & b_n \end{pmatrix}$.

1. Si $rg A < rg (A|b)$ alors le système n'admet pas de solution.
2. Si $rg A = rg (A|b) =$ le nombre des inconnus $= p$ alors le système admet une solution unique.
3. Si $rg A = rg (A|b) <$ le nombre des inconnus $= p$ alors le système admet une infinité de solutions.

Système de Cramer**Définition 3.8.2.**

Soit Σ un système à n équations linéaires et à n inconnus.
Si Σ admet une solution et une seule on dit que c'est un système de Cramer.

Théorème 3.8.3.

Soit Σ un système de n équations et n inconnus et de matrice élargie $(A|b)$ où $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Σ est un système de Cramer si et seulement si A est inversible et dans ce cas si $(x_1, \dots, x_n)$ est la solution de Σ alors

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Exemples 3.8.1. Résoudre les systèmes suivants :

$$\Sigma \begin{cases} x + 3y - z = 9 \\ 3x - y + z = -1 \\ -2x + y - 3z = 6 \end{cases}$$

$$L \begin{cases} x + 3y - z = 9 \\ 3x + 9y - 3z = -1 \\ -2x + y - 3z = 6 \end{cases}$$

$$L' \begin{cases} x + 3y - z = 9 \\ 3x + 9y - 3z = 27 \\ -2x + y - 5z = 10 \end{cases}$$

Exemples 3.8.2. Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} mx + y + mz = 2m \\ x + my + mz = 2 \\ mx + y - mz = 0 \end{cases}$$