

Nombres Complexes-TSE

Bac 96

I/ Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $f(z) = z^4 - \sqrt{2}z^3 - 4\sqrt{2}z - 16$

a°) Trouve les deux réels a et b tels que pour tout nombre complexe z on ait :

$$f(z) = (z^2 + 4)(z^2 + az + b)$$

b°) En déduire l'ensemble solution dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$.

c°) Placer dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ les images A, B, C, D des solutions de l'équation précédente, puis montrer que ces solutions sont sur le même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

II/ Dans le plan orienté, on considère un carré direct $ABCD$ de centre O , tel que : $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{2}$.

Soit P un point du segment $[BC]$, distinct de B . On note Q le point d'intersection de (AP) avec (CD) . La perpendiculaire (d) à (AP) passant par A coupe (BC) en R et (CD) en S .

1°) Faire une figure en prenant $BC = 3cm$; $BP = 1cm$ et plaçant (BC) horizontalement sur la feuille.

2°) Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a°) Précise l'image de la droite (BC) par r .

b°) Détermine les images de R et P par r .

c°) Quelle est la nature du triangle RAQ et PAS ?

3°) On note N le milieu de $[PS]$ et M le milieu de $[QR]$.

Soit s la similitude directe de centre A , d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

a°) Précise les images des points R et P par s .

b°) Quel est le lieu géométrique du point N quand P décrit le segment $[BC]$ privé de B ?

c°) De ce qui précède, déduire que les points M, N, B et D sont alignés.

Bac 98

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$ d'unité $1cm$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives : $a = 2 - 2i\sqrt{3}$; $b = 2 - 2i\sqrt{3}$; $c = 8$.

1°) Écrire a, b et c sous la forme trigonométrique. Placer les points A, B et C .

2°) Calculer le nombre complexe $q = \frac{a-c}{b-c}$ que l'on écrira sous la forme exponentielle. En déduire la nature du triangle ABC .

3°) Déterminer le barycentre G des points pondérés $(A, |a|)$; $(B, |b|)$; $(C, |c|)$ puis placer le point G.

4°) Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M du plan tels que :

$$\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\|.$$

Bac 99

Soit la suite de points M_n du plan complexe, d'affixes respectives définies par : $Z_0 = 8$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Z_{n+1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{4} Z_n$.

a) Calculer le module et un argument de $Z = \frac{1+i\sqrt{3}}{4}$

b) Calculer Z_1 ; Z_2 ; Z_3 et vérifier que Z_3 est un réel. Placer dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$ les points M_0 ; M_1 ; M_2 et M_3 .

c) Calculer le rapport $\frac{Z_{n+1} - Z_n}{Z_{n+1}}$. En déduire que le triangle $OM_n M_{n+1}$ est rectangle et que $|Z_{n+1} - Z_n| = \sqrt{3} \times |Z_{n+1}|$.

Bac 2000

I/

1°) a°) Soit $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite géométrique réelle de premier terme r_0 strictement positif et de raison $\frac{2}{3}$. Exprimer le terme général r_n en fonction de n et r_0 .

b°) Soit (θ_n) la suite arithmétique réelle de premier terme θ_0 ; $\theta_0 \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et de raison $\frac{2\pi}{3}$.

Exprimer le terme général en fonction de n et θ_0 .

c°) $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $z_n = r_n e^{i\theta}$. Sachant que $z_0 z_1 z_2 = 8$, déterminez le module et un argument de chacun des nombres complexes z_0 ; z_1 ; z_2 .

2°) Dans le plan complexe (P) rapporté à un repère orthonormal directe, d'unité graphique 3cm, on appelle M_n le point d'affixe $z_n = r_n e^{i\theta}$.

a) Placez dans le plan (P) les points M_0 , M_1 , M_2 et M_3 .

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, calculez $\|\overrightarrow{M_n M_{n+1}}\|$ en fonction de n .

c) On pose $I_n = \sum_{k=0}^n \|\overrightarrow{M_k M_{k+1}}\|$. Calculez I_n en fonction de n , puis déterminez $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

3°) Écrire sous forme trigonométrique ou exponentielle le nombre complexe :

$$Z = \frac{(1 + i \tan \theta)^2}{1 + \tan^2 \theta} ; \theta \in \mathbb{R} \text{ et } \theta \neq \frac{\pi}{2} [\pi]$$

II/ Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$ direct, d'unité graphique 2 cm. Dans cette question, A est le point d'affixe 1, B le point d'affixe $2i$ et C le point d'affixe z .

a°) Que représente géométriquement $\left| \frac{z-2i}{1-2i} \right|$ et $\arg \left(\frac{z-2i}{1-2i} \right)$?

b°) Dans la suite, on suppose que le point C d'affixe z est défini par : $BC = \sqrt{\frac{2}{5}} \times BA$ et $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) = \alpha$, $\alpha \in]-\pi; 0]$ et $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$. Calculez $\sin \alpha$.

c°) Démontrez que $\frac{z-2i}{1-2i} = \frac{1-3i}{5}$. En déduire le complexe z et vérifiez que le triangle ABC est isocèle. On fera une figure.

d°) Déterminez le module et un argument du nombre complexe $z = \frac{1 - e^{i\frac{\pi}{3}}}{1 + e^{i\frac{\pi}{3}}}$.

Bac 2002

Déterminez le module et un argument de chacun des nombres complexes suivant, puis les écrire sous la forme trigonométrique $\rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ avec $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$

$$z_1 = -2(\sin x + i \cos x); z_2 = -3e^{-\frac{2\pi i}{3}}; z_3 = \frac{-\cos 2x + i \sin 2x}{2\cos 3x - 2i \sin 3x}$$

Bac 2004

Le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$ direct. On désigne par f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M distinct de O et d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = \frac{5}{\bar{z}}$ où $\bar{z}$ est le conjugué de z .

1°/ Déterminez l'affixe du point A' image par f du point A d'affixe $1 + i$. Vérifiez que les points O, A et A' sont alignés.

2°/ Montrez que pour tout point M distinct de O, les points O, M et M' sont alignés.

3°/ Trouvez l'ensemble (Γ) des points invariants par f .

4°/ a) Soit $z \neq 0$, montrez que si $|z - (1 + i)| = \sqrt{2}$ alors $\left| \frac{5}{1-i} - \frac{5}{\bar{z}} \right| = \left| \frac{5}{\bar{z}} \right|$.

b) En déduire que si M est un point, autre que O du cercle (C) de centre A passant par O, alors son image M' par f appartient à une droite (D) que l'on déterminera.

c) Montrez que tout point de D est l'image par f d'un point de $(C) - \{O\}$.

d) Tracer (Γ) , (D) et (C) dans le même repère.

e) En déduire l'image de $(C) - \{O\}$ par f .

Bac 2005

a) Déterminer sous forme algébrique les racines sixièmes de l'unité,

C'est-à-dire trouver les nombres complexes u tels que $u^6 = 1$.

b) Calculer $(1 - i)^6$.

c) En utilisant les questions a) et b) donner la forme algébrique des solutions de l'équation d'inconnue complexe $z : 8z^6 + i = 0$.

Bac 2006

1°/ Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes on donne l'équation

$$(F): z^4 - 2z^3(1 + \sqrt{3}) + 2z^2(3 + 2\sqrt{3}) - 4z(2 + \sqrt{3}) + 8 = 0$$

a.) Démontrer que si le complexe z_0 est une solution de l'équation (F) alors il en est de même pour son conjugué $\bar{z}_0$.

b.) Vérifiez que le complexe $z_0 = 1 + i$ est une solution de l'équation (F). En déduire une seconde solution z_1 de l'équation.

c.) Déterminer les deux autres solutions z_2 et z_3 de l'équation (F).

d.) Représentez dans le plan complexe les points images des quatre solutions de l'équation (F). (Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'unité graphique 1cm).

e.) Déterminez la nature du quadrilatère ainsi obtenu puis calculez en cm^2 l'aire de sa surface.

Bac 2008

On considère le nombre complexe $u = \sqrt{2 - \sqrt{2}} - i\sqrt{2 + \sqrt{2}} ; (i^2 = -1)$

1°/ a) Calculer u^2 et u^4 .

b) Calculer le module et un argument de u^4 , en déduire le module et un argument de u .

2°/ Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé. A tout M de coordonnées (x, y) du plan, on associe son affixe $Z = x + iy$.

Déterminer l'ensemble des points M du plan pour lesquels le module du produit $u \times Z$ égal à 8.

Bac 2009

z étant un nombre complexe, on considère l'équation $(E) : z^4 = -7 + 4i\sqrt{2}$.

a.) Vérifier que $u = \sqrt{2} + i$ est une solution de (E) .

b.) Déterminer sous forme algébrique les racines quatrièmes de l'unité. En déduire dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes toutes les solutions de (E) sous forme algébrique.

Bac 2010

On considère l'équation d'inconnue complexe z ,

$$(E) : z^4 + 5z^3 + (11 - 3i)z^2 + (10 - 10i)z - 8i = 0.$$

1°/ Montrer que l'équation (E) admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on déterminera.

2°/ Montrer que l'équation (E) admet une solution réelle que l'on déterminera.

3°/ Achever la résolution dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes de l'équation (E) .

4°/ En désignant par z_1 la solution non imaginaire pure qui a une partie imaginaire positive, par z_2 la solution réelle et par z_3 la 4ème solution de (E) , montrer que z_0, z_1, z_2 et z_3 sont dans cet ordre les termes consécutifs d'une suite géométrique dont on précisera la raison.

5°/ Donner le module et un argument de chacune des solutions de (E) .

Bac 2012

On considère le complexe Z défini par $Z = \frac{z^2}{z+i}$ où $z = x + yi$, avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1°/ On note $Z = X + Yi$, $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$. Écrire X et Y en fonction de x et y .

2°/ Au complexe z on associe le point $M(x, y)$ d'un plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$. Déterminer l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que Z soit imaginaire pur non nul.

3°/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 2iz - 2 = 0$. Montrer que les images des solutions de cette équation appartiennent à l'ensemble (Γ) .

Bac 2013

On considère l'équation $z \in \mathbb{C} : z^3 - (3 + 2i)z^2 + (1 + 5i)z + 2 - 2i = 0$ (1)

1°/ Vérifiez que i est une solution de l'équation (1) puis résoudre cette équation.

2°/ Montrez que les solutions de l'équation (1) sont les trois premiers termes d'une suite géométrique (z_n) de premier terme i .

3°/ Déterminez la raison de cette suite puis calculez son 15ème terme.

4°/ Déterminez n pour que z_n soit élément de $\mathbb{N}$.

Bac 2014

On se place dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\forall z \in \mathbb{C}, h_n(z) = z^n(1 - z).$$

1-/ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, résoudre l'équation $h_n(z) = h_0(z)$.

2-/ On se propose de résoudre le système suivant : (1) $\begin{cases} h_n(z) = 1 \\ |z| = |1 - z| \end{cases}$

a-/ Montrez que l'équation $|z| = |1 - z|$ a une infinité de solutions.

b-/ Soit z_0 l'une de ces solutions. Calculez, en fonction du module ρ et l'argument θ de z_0 , l'argument de $1 - z_0$; le module et l'argument de $z_0^n(1 - z_0)$.

c-/ En déduire que le système (1) n'admet de solution que si $n \equiv 1[6]$.

Quel est l'ensemble des solutions du système ?

II-/ Soient les nombres complexes $z_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = -\sqrt{3} + i$

1°/ Écrire z_1 , z_2 et $\frac{z_2}{z_1}$ sous forme trigonométrique.

2°/ Montrer qu'il existe deux suites géométrique (U) et (V) telles que $U_2 = V_2 = z_1$ et $U_4 = V_4 = z_2$ dont on déterminera les premiers termes U_0 et V_0 et la raison de chacune d'elles.

Les points A, B, M et M' du plan complexe ont pour affixes respectives: $2 - 4i$, $-i$, z et z' avec

$$z' = \frac{-iz - 2 + 4i}{z + i}.$$

3°) Place les points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4 (unité : 4 cm).

4°) Déterminer la distance OM_n en fonction de n .

5°) a°) Montre que $M_n M_{n+1} = \frac{\sqrt{5}}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

b°) On pose $L_n = \sum_{k=0}^n M_k M_{k+1}$ (c'est à dire $L_n = M_0 M_1 + M_1 M_2 + \dots + M_n M_{n+1}$).

Détermine L_n en fonction de n , puis la limite de L_n quand n tend vers $+\infty$.

6°) Détermine une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OM_0}; \overrightarrow{OM_n})$ en fonction de n .

7°) Pour quelles valeurs de n les points O, M_n et M_{n+1} sont-ils alignés?

7°) Pour quelles valeurs de n les points O, M et M sont-ils alignés?