

Bac serie C

- N.B. : - L'Exercice et les deux Problèmes sont obligatoires.
- Machine à calculer scientifique non programmable autorisée.

EXERCICE 1 (4 points)

A - Probabilité

$n \in \mathbb{N}^*$. On dispose de n boules numérotées de 1 à n . On veut placer ces boules dans n boîtes numérotées de 1 à n ; chaque boîte pouvant contenir de 0 à n boules.

1 – Pour $n = 4$, calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

E : « Chaque boîte contient une boule ». (0)

F : « Chaque boîte contient une boule de telle sorte que la boîte et la boule ont le même numéro ». (0)

G : « La boîte numérotée 1 contient exactement deux boules ». (0)

2 – Pour $n \geq 2$, on désigne par $P_n(k)$ la probabilité pour que la boîte numérotée 1 contienne exactement k boule(s), $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$.

a) Démontrer que, pour tout n , $P_n(k) = C_n^k \left(\frac{1}{n}\right)^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-k}$ (

b) En déduire que : $\sum_{k=0}^n C_n^k (n-1)^{n-k} = n^n$. (0)

B - Arithmétique

I) 1 – On considère le nombre A défini pour tout entier naturel n par $A = 9^{n+1} + 2^{6n+1}$.
Démontrer que A est divisible par 11 pour tout n de $\mathbb{N}$:

a) en utilisant les congruences (0,5)

b) en raisonnant par récurrence. (0,5)

2 – Déterminer tous les entiers relatifs x vérifiant le système :

$$\begin{cases} 3x - 2 \equiv 0 [5] \\ |x| < 10 \end{cases} \quad (1,0)$$

II) 1.- a) Convertir dans la base 10 l'entier x écrit dans le système binaire : $x = (10101)_2$. (0,25 pt)

b) Convertir dans le système binaire l'entier naturel $y = 23$ de la base 10. (0,25 pt)

2.- a) Dresser la table de multiplication et la table d'addition de $9/29$. (0,25 + 0,25 pt)

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ l'équation à une inconnue x : $x^2 + x + \bar{2} = \bar{0}$. (0,50 pt)

c) Résoudre dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times 9/29$ le système de deux équations à deux inconnues x et y

$$\begin{cases} \bar{2}x + y = \bar{0} \\ x + \bar{3}y = \bar{0} \end{cases} \quad (0,50 \text{ pt})$$

Problème 1 : (7 points)

On considère dans le plan P un triangle rectangle et isocèle ABC tel que $AB=AC=2$

(unité graphique : 2cm) et $\text{mes}(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\pi}{2}$.

On désigne par G le milieu du segment [BC] et par O celui de [AC]. On met les points A et C sur une droite horizontale.

Partie I :

1- a- Déterminer et construire le barycentre F des points A, B et C affectés respectivement de 2, -1 et 1. Montrer que ABGF est un parallélogramme. (0,25+0,5+0,25)

b- Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M du plan P tel que :

$$|| 2\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC} || = || 2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC} ||. \quad (0,75 + 0,25)$$

2- On appelle J le symétrique de B par rapport à A et (D) la droite passant par J et parallèle à (AC).

Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan P tel que, si H est le projeté orthogonal de M sur (D) alors l'équation de (Γ) est : $2MA^2 - MB^2 + MC^2 = MH^2 - 4$ (1)

a- Montrer que (Γ) passe par A et C. (0,5)

b- Calculer FA^2 , FB^2 et FC^2 . (0,5)

c- Démontrer que l'équation (1) est équivalente à l'équation $2MF^2 = MH^2$.

En déduire la nature de (Γ) . (0,75 + 0,25)

Partie II : Le plan P est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ tel que $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{CA}$.

1- Déterminer respectivement les affixes z_c , z_j et z_f des points C, J et F. (0,5)

2- On considère une similitude plane indirecte S qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' .

a- Sachant que S transforme F en J et laisse invariant C, donner l'expression complexe de S. (0,5)

b- En déduire les éléments caractéristiques de S. (0,75)

3- a- Calculer les affixes des points $A' = S(A)$ et $B' = S(B)$. (0,5)

b- Construire dans le même plan P, l'image par S du triangle ABC. (0,75)

PROBLEME (12 points)

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{x-1}{\ln |x|} & \text{si } x < 0 \\ (x+1)^2 e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1 cm.

Partie A

- 1° - Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0. (0,25+0,5pt)
- 2° - On considère la fonction g définie sur $] -\infty ; 0 [$ par $g(x) = 1 - x + x \ln |x|$.
- a) - Etudier les variations de g . (0,75 pt)
 - b) - Montrer qu'il existe un réel unique $\alpha \in] -4 ; -3 [$ tel que $g(\alpha) = 0$. (0,25 pt)
 - c) - En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x . (0,25 pt)
- 3° - a) - Montrer que pour tout $x < 0$, $x \neq -1$, $f'(x)$ a le même signe que $-g(x)$. (0,50 pt)
- b) - Vérifier que $f'(\alpha) = 0$ et que $f(\alpha) = 1 + \alpha$ où α est défini dans 2°/b). (0,25 pt)
 - c) - Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation. (1,25 pt)
- 4° - a) - Etudier les branches infinies de $(\mathcal{C})$. (0,50 pt)
- b) - Calculer à 10^{-1} près : $f(-8)$, $f(-6)$, $f(-2)$ et $f(-\frac{1}{2})$. (0,50 pt)
 - c) - Prendre $\alpha = -3,6$ et construire la courbe $(\mathcal{C})$. (0,50 pt)

On donne : $\ln 2 \approx 0,7$; $\ln 6 \approx 1,8$; $e \approx 2,7$.

Partie B

- 1° - On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - y' - 2y = e^{-x}(-6x - 4)$.
- a) - Vérifier que la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = e^{-x}(x^2 + 2x)$ est solution de (E). (0,50 pt)
 - b) - Montrer qu'une fonction numérique f est solution de (E) si et seulement si $f - \varphi$ est solution de l'équation différentielle (E') : $y'' - y' - 2y = 0$. (0,25 pt)
 - c) - Résoudre (E') et en déduire toutes les solutions de (E). (0,50 pt)
 - d) - Déterminer l'unique solution f de (E) telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$. (0,50 pt)
- 2° - On pose $I_\lambda = \int_0^\lambda (x+1)^2 e^{-x} dx$ où $\lambda > 0$.
- a) - Par deux intégrations par parties successives, exprimer I_λ en fonction de λ . Calculer $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} I_\lambda$. (1,25+0,25pt)
 - b) - En déduire, en cm^2 , l'aire du domaine plan (D) ensemble des points $M(x,y)$ tels que $x \geq 0$ et $0 \leq y \leq f(x)$. (0,25 pt)

Partie C

On se propose d'étudier la convergence de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n = \frac{1}{n^3} \left[(1+n)^2 e^{-\frac{1}{n}} + (2+n)^2 e^{-\frac{2}{n}} + \dots + (n+n)^2 e^{-\frac{n}{n}} \right].$$

- 1° - Vérifier que $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) = U_n$ et $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = U_n + \frac{e-4}{ne}$ (f étant définie dans la partie A), $x \geq 0$). (1,00 pt)

- 2° a) - Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et k un entier tel que $0 \leq k \leq n-1$. Vérifier que $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right] \subset [0, 1]$. (0,25 pt)

- b) - En utilisant le sens de variation de f sur $[0, 1]$, montrer que : $\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right)$. (0,50 pt)

- c) - En déduire que $U_n + \frac{e-4}{ne} \leq \int_0^1 f(t) dt \leq U_n$ et que $I_1 \leq U_n \leq I_1 + \frac{4-e}{ne}$. (0,5+0,25 pt)

- d) - Montrer que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et donner sa limite. (0,50 pt)