

$$g(-\ln 2) = e^{-2\ln 2} - 2e^{-\ln 2} = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$$

0,5pt $g'(-\ln 2) = 2e^{-2\ln 2} - 2e^{-\ln 2} = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$

d'où $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{3}{4}$

3) h est la fonction définie par $h(x) = g(x) + \frac{1}{2}(x + \ln 2) + \frac{3}{4}$

Calculons $h'(x)$

$$h'(x) = g'(x) + \frac{1}{2} = 2e^{2x} - 2e^x + \frac{1}{2}$$

$$h'(x) = 2\left(e^x - \frac{1}{2}\right)^2$$

d'où $\forall x \in \mathbb{R} \quad h'(x) \geq 0 \Rightarrow h$ est croissante sur $\mathbb{R}$

2pt

x	$-\infty$	$-\ln 2$	$+\infty$
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$		$\rightarrow 0$	

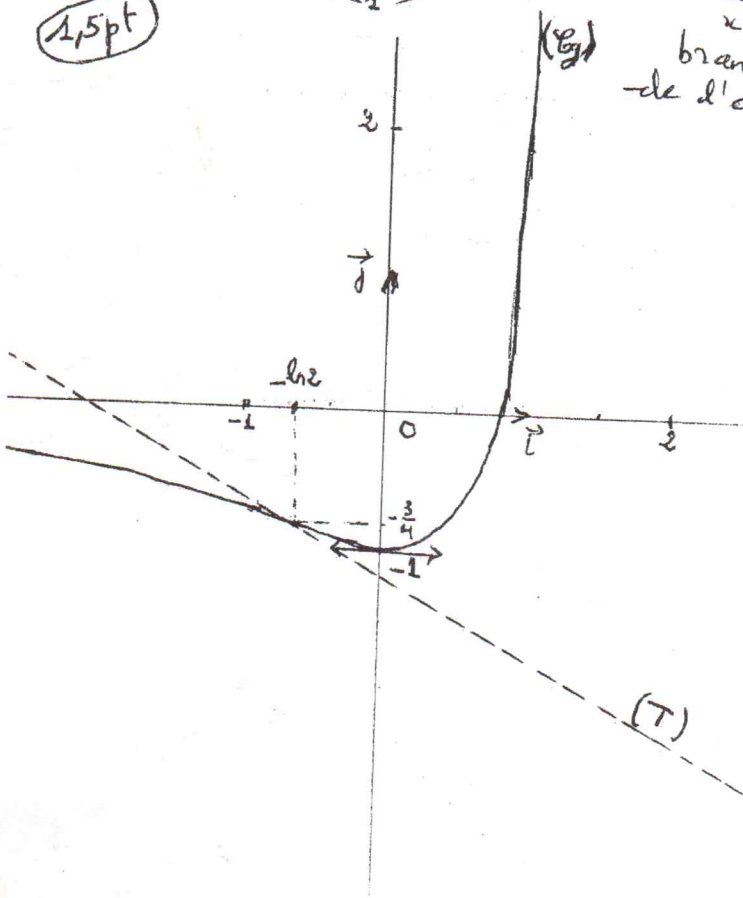
D'où $\forall x \in]-\infty, -\ln 2], h(x) \leq 0$

$\forall x \in [-\ln 2, +\infty[\quad h(x) \geq 0$

4) Traçons (C_g) et (T)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	0		

1,5pt



$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0 \Rightarrow$ la droite d'équation $y=0$ est asymptote $\bar{a}(C_g)$ en $-\infty$.
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = +\infty$, il y a une branche parabolique de direction celle de l'axe (Oy) en $+\infty$ $\bar{a}(C_g)$.

+ Positions relatives de (C_g) et (T)

- Pour $x \in]-\infty, -\ln 2]$ (C_g) est en dessous de (T)

- Pour $x \in [-\ln 2, +\infty[$ (C_g) est au dessus de (T)

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x(x-1)}{x} = 1$; donc f n'est pas dérivable au point 0

* $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x(x-1)|}{x-1} = \frac{0}{0}$ F.I

$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x(x-1)}{x-1} = -1$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(x-1)}{x-1} = 1$.

Donc f n'est pas dérivable au point 1

3° Etude des variations de f .

Pour $x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$ $f'(x) = 2x - 1$; $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

d'où $f'(x) < 0$ pour $x \in]-\infty, 0[$ et $f'(x) > 0$ si $x \in]1, +\infty[$

Pour $x \in]0, 1[$ $f'(x) = -2x + 1$; $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

d'où $f'(x) \geq 0$ pour $x \in]0, \frac{1}{2}]$ et $f'(x) \leq 0$ si $x \in [\frac{1}{2}, 1[$

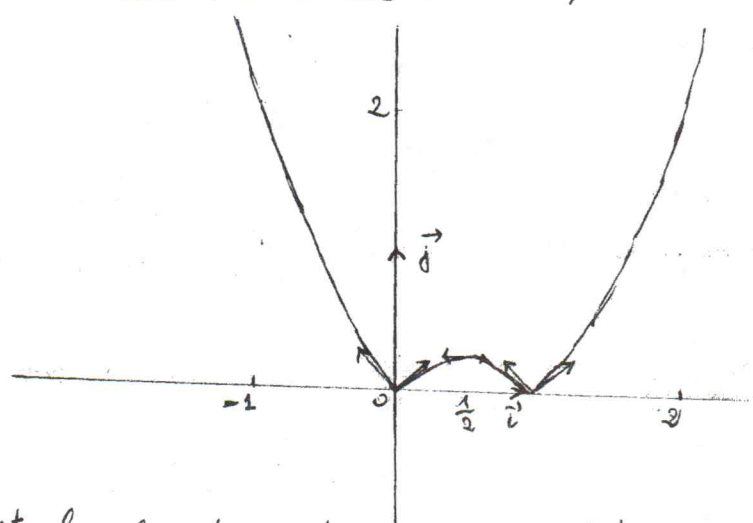
1pt $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

d'où le tableau de variation de f

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	0	$\frac{1}{4}$	0	$+\infty$

4° Construction de la courbe (Γ) de f

2,5pt



B/ g est la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = e^{2x} - 2e^x$

1° g est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = 2e^{2x} - 2e^x = 2e^x(e^x - 1)$

2pt $g'(x) = 0 \Rightarrow e^x - 1 = 0, x = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$

Donc g est croissante sur $[0, +\infty[$ et est décroissante sur $]-\infty, 0]$.

2° Equation de la tangente (T) à (Γ_g) au point d'abscisse $-\ln 2$
 $y = g'(-\ln 2)(x + \ln 2) + g(-\ln 2)$

La similitude S a pour rapport $|\frac{1+i}{2}| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et pour angle $\theta = \arg(a)$.

$$\left. \begin{array}{l} \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

Le centre est le point invariant d'affixe z , tel que $z = \frac{1+i}{2}z + 2+2i$
 $\Rightarrow z - (1+i)z = 4+4i \Rightarrow z = 4$

Donc le centre de S est le point Ω d'affixe $z_{\Omega} = 4$
 (Ou encore $z_{\Omega} = \frac{b}{1-a} = \frac{2+2i}{1-i} = \frac{4(1+i)}{1-i} = 4$)

S est alors la similitude de centre Ω de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
 B/ a) Déterminons les réels a, b, c, d qui sont dans cet ordre les termes consécutifs d'une suite arithmétique.

On a: $b=5$ et $a+2b+5c+10d=42 \Leftrightarrow a+5c+10d=32$.
 Soit r la raison de la suite.

On a: $a = b-r = 5-r$; $c = b+r = 5+r$; $d = b+2r = 5+2r$
 d'où $5-r+5(5+r)+10(5+2r)=32 \Leftrightarrow 24r=-48$ d'où $r=-2$

Par suite $a=7$; $b=5$; $c=3$; $d=1$

b) On suppose $a=7$; $b=5$; $c=3$ et $d=1$

Il y a en tout 16 pièces de monnaie dans la boîte.

Pour avoir la somme exacte de 17F, il faut extraire simultanément de la boîte 1 pièce de 2F, 1 pièce de 5F et une pièce de 10F
 Donc la probabilité d'avoir la somme exacte de 17F est

$$P_1 = \frac{C_1^1 \times C_3^1 \times C_2^1}{C_{16}^3} = \frac{15}{560} = 0,027 ; \quad P_1 = 0,027$$

c) Pour obtenir une somme suffisante pour faire un achat de 17F il faut extraire simultanément de la boîte:

(1 pièce de 2F, 1 pièce de 5F et 1 pièce de 10F) ou bien
 (2 pièces de 5F et une pièce de 10F).

Donc la probabilité de cet événement est

$$P_2 = \frac{C_1^1 \times C_3^1 \times C_2^1 + C_3^2 \times C_2^1}{C_{16}^3} = \frac{15+3}{560} = \frac{18}{560} = 0,032 ; \quad P_2 = 0,045$$

Problème

A/ f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x(x-1)|$

1° Expression de $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$x(x-1)$	+	0	-	+

Pour $x \in]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$ $f(x) = x(x-1)$

Pour $x \in [0, 1]$ $f(x) = -x(x-1)$

2° Dérivabilité de f en 0 et en 1:

$$* \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x(x-1)|}{x} = \frac{0}{0} \text{ F.I.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-1)}{x} = -1$$

Exercice 1:

A/ 10 Aire A en cm^2 de la peau d'un cobaye est telle que

1,5pt $\ln A = \ln(9,85) + 0,64 \ln P$ où P est son poids.

L'aire de la peau d'un cobaye de poids $p=780$ est A telle que

$\ln A = \ln(9,85) + 0,64 \ln 780 = 6,549$ d'où $A = e^{6,549} = 698,545 \text{ cm}^2$

20 Le poids P d'un cobaye dont la peau a pour aire $A=30 \text{ cm}^2$ est tel que $\ln 30 = \ln(9,85) + 0,64 \ln P$ d'où

1,5pt $\ln P = \frac{\ln 30 - \ln(9,85)}{0,64} = 1,74 \Rightarrow P = e^{1,74} = 5,697 \text{ g}$

B/ 10 L'âge de l'homme du Cro-Magnon est:

$N = -8310 \times \ln k$ années avec $k = 0,05$

1pt d'où $N = -8310 \times \ln(0,05)$ années.

$N = 24894,54$ années

20 $51,8\% < k < 53,8\%$

Donnons un encadrement de l'âge $N = -8310 \ln k$ du fossile

$0,518 < k < 0,538$

$\ln(0,518) < \ln k < \ln(0,538)$

$-8310 \times \ln(0,538) < -8310 \times \ln k < -8310 \times \ln(0,518)$

d'où $5151,34 < N < 5466,15$

Exercice 2:

A/ 10 Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $[z^2 - 2(1+i)z + 4i] \times [z^2 + 4z + 8] = 0$

* $z^2 - 2(1+i)z + 4i = 0$

1pt $\Delta' = (1+i)^2 - 4i = 1 + 2i - 1 - 4i = -2i = (1-i)^2$

d'où $z_1 = 1+i+1-i = 2$; $z_2 = 1+i-1+i = 2i$

* $z^2 + 4z + 8 = 0$

$\Delta' = 4 - 8 = -4 = (2i)^2$; d'où $z_3 = -2-2i$ et $z_4 = -2+2i$

A a pour affixe $z_A = -2+2i$

B a pour affixe $z_B = -2-2i$

C a pour affixe $z_C = 2i$

D a pour affixe $z_D = 2$

20 La similitude directe δ du plan telle que $\delta(A) = C$ et $\delta(B) = D$ a une écriture complexe de la forme $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$

d'où $\begin{cases} \delta(A) = C \\ \delta(B) = D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_C = az_A + b \\ z_D = az_B + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2i = a(-2+2i) + b \\ 2 = a(-2-2i) + b \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$

2pts (1) - (2) $\Rightarrow -2+2i = 4ia \Leftrightarrow a = \frac{-2+2i}{4i} = \frac{-1+i}{2i} = \frac{1+i}{2}$

(2) $\Rightarrow 2 = \left(\frac{1+i}{2}\right)(-2-2i) + b \Leftrightarrow b = 2 - (1+i)(-1-i)$; $b = 2+2i$

D'où la similitude directe δ est définie par:

$\delta: M(z) \mapsto M'(z')$ tel que $z' = \frac{1+i}{2}z + 2+2i$

Problème (10 points)

Une entreprise fabrique une quantité x d'un produit, exprimée en milliers de tonnes, dont le coût marginal C est défini sur $[0 ; 10]$ par :

$$C(x) = \frac{x^2 + x + 4}{x + 1}$$

Le but du problème est d'étudier le coût total C_t et le coût moyen C_m de la production, puis de minimiser le coût moyen.

Les coûts sont exprimés en milliers de francs.

1- Étude de C_t .

a-/ Déterminer les réels a et b tels que, pour tout x de $[0 ; 10]$:

$$C(x) = ax + \frac{b}{x+1}. \quad (1pt)$$

b-/ La fonction C_t est la primitive de C qui s'annule pour $x = 0$. Déterminer C_t . (1pt)

2- Étude d'une fonction auxiliaire f .

On considère la fonction f , définie sur $[0 ; 10]$ par :

$$f(x) = x^2 + \frac{8x}{x+1} - 8\ln(x+1).$$

a-/ Montrer que la fonction f' de f est donnée par :

$$f'(x) = \frac{2x(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}. \quad (1,5pt)$$

b-/ Dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0 ; 10]$. On admettra que f s'annule pour $\alpha = 1,712$ (1,5pt)

3- Étude du coût moyen C_m .

La fonction C_m est définie sur $]0 ; 10[$ par :

$$C_m(x) = \frac{C_t(x)}{x} = \frac{x}{2} + 4 \frac{\ln(x+1)}{x}$$

a-/ Calculer la dérivée de C'_m au point x .

Vérifier que l'on peut écrire :

$$C'_m(x) = \frac{f(x)}{2x^2} \quad (1,5pt)$$

Où f est la fonction auxiliaire introduite dans la question 2-/-

b-/ Étudier le sens de variation de C_m sur $]0 ; 10]$. (1,5pt)

c-/ Pour quelle production l'entreprise a-t-elle un coût moyen minimum, et quel est ce coût ? (2pts)

EXAMEN : *Baccalauréat malien*

SÉRIES

MTE

ÉPREUVE DE : *Mathématiques*

SESSION : *Juin 2008*

DURÉE : *3 heures*

COEF: *5*

Exercice 1

- 1-/ Factoriser en un produit trois facteurs : $A(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$. (5 points)
2-/ a-/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$. (1pt)
b-/ En se servant des résultats du a-/ , résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
■ $(\ln x)^3 + 2(\ln x)^2 - \ln x - 2 = 0$. (1,5pt)
■ $e^{x^3} + 2e^{x^2} - e^x - 2 = 0$. (1,5pt)

Exercice 2

Lorsque l'on place de l'argent à intérêts composés, les intérêts produits par le capital s'ajoutent à la fin de chaque année à ce capital et produisent à leur tour des intérêts. (5 points)

Exemple : Un capital de 10 000 F placé à 5 % à intérêts composés rapporte 500 F pendant la première année. Le montant constitué qui représente le nouveau capital est de $(10\,000 + 500)$ soit 10 500 F ; ce montant produira un intérêt de 525 F pendant la deuxième année. Le capital devient $(10\,500 + 525)$ soit 11 025 F. Les montants successifs produiront de même des intérêts à la fin des autres années.

On utilisera les notations suivantes :

- C_0 : Capital placé au début de la première année ;
 t : Taux (c'est-à-dire le revenu de 100 F pendant un an) ;
 n : Durée du placement en année ;

- 1-/ À la fin de la première année, le capital C_0 est devenu $C_1 = C_0(1 + t)$.
À la fin de la deuxième année, le capital C_1 est devenu $C_2 = C_1(1 + t)$.
a-/ Exprimer C_2 et C_3 en fonction de C_0 et t . (1,5pt)
b-/ Exprimer C_n en fonction de C_0 , t et n où C_n est le montant dont on dispose à la fin de la $n^{\text{ième}}$ année de placement du capital C_0 . (1,5pt)
2-/ On pose $t = 0,05$; en combien de temps le capital est-il doublé ? (2pts)

TSVP 

($\mathcal{C}$) est la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$,
c'unités graphiques 2 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée.

1-/ Déterminer la limite de f en 0. (0,5pt)

2-/ Calculer $f'(x)$ et vérifier que : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

Déduire de la question 1-/ le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau des variations de f . (1,5pt)

3-/ Soit ($\mathcal{D}$) la droite d'équation $y = 2x$.

a-/ Calculer les coordonnées du point B, intersection de la courbe ($\mathcal{C}$) et de la droite ($\mathcal{D}$). (0,5pt)

b-/ Déterminer une équation de la tangente en B à ($\mathcal{C}$). (1pt)

c-/ Étudier la position relative de la courbe ($\mathcal{C}$) et de la droite ($\mathcal{D}$). (1pt)

4-/ Tracer la courbe ($\mathcal{C}$) et la droite ($\mathcal{D}$). (1,5pt)

5-/ Calculer l'aire du domaine délimité par : la courbe ($\mathcal{C}$), la droite ($\mathcal{D}$) et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$. (1pt)

Exercice 2

(6 pts)

1-/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a-/ $\frac{2z+1}{2iz+1} = \frac{2iz+3i}{1-z}$

b-/ $2z + \bar{z} - iz - 7 - i = 0$.

c-/ $z^2 + (1 + \sqrt{3})z + 2 + \sqrt{3} = 0$ On remarquera que $(1 + \sqrt{3})^2 = 4 + 2\sqrt{3}$

2-/ a-/ Résoudre l'équation différentielle (E) : $9y'' + 16y = 0$.

b-/ Déterminer la solution particulière f de l'équation (E) dont la courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal, passe par le point $A\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur égal à $-\frac{16}{3}$.

c-/ Vérifier que, pour tout réel x , $f(x) = 4\cos\left(\frac{4}{3}x - \frac{\pi}{6}\right)$.

d-/ Démontrer que $\frac{3\pi}{2}$ est une période pour f .

- Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $\left[0; \frac{3\pi}{4}\right]$.

Problème

(8 pts)

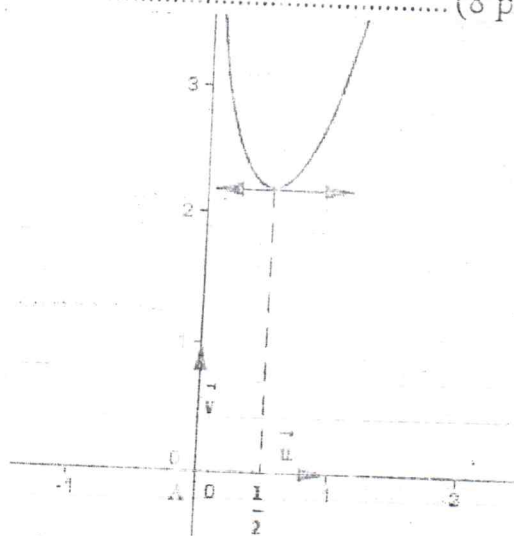
I-/

La courbe ci-contre représente, dans un repère orthogonal $(A; \vec{u}; \vec{v})$, la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = 2x^2 + 1 - \ln x.$$

Quel est, en justifiant la réponse, le signe de $g(x)$ pour $x > 0$?

(1pt)



II-/

f est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = 2x + \frac{\ln x}{x}$$

EXAMEN : *Baccalauréat malien*

BAC 2009

SÉRIE : *MTE*

SESSION : *Juin 2009*

ÉPREUVE DE : *MATHÉMATIQUES*

DURÉE : *3 heures*

COEF : *5*

SUJET

Exercice 1(6 pts)

Le tableau suivant donnant les variations de la fonction f définie et dérivable sur $[-3 ; 4]$ est incomplet :

x	-3	-2	-1	2	3	4
Signe de $f'(x)$		0			0	
Variation de $f(x)$		1		4		2
	-2		-1		-2	

1-/ Recopier et compléter le tableau de f en remplissant la ligne « signe de $f'(x)$ ».

2-/ Déterminer les ensembles pour lesquelles on a :

a-/ $f'(x) > 0$

b-/ $f'(x) < 0$

c-/ $f'(x) = 0$

3-/ L'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[-3 ; 4]$.

a-/ Indiquer le nombre de solution de l'équation

b-/ Situer chacune de ces solutions en indiquant l'intervalle qui la contient
(deux solutions ne doivent pas appartenir à un même intervalle).

c-/ Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse (-1) .

TSVP 

b-/ Démontrer que $(\mathcal{C})$ admet une asymptote (Δ) (dont on précisera l'équation) non parallèle aux axes.

Démontrer qu'il existe un point A de $(\mathcal{C})$ où la tangente (T) est parallèle à (Δ)

d-/ Tracer (Δ) , (T) et $(\mathcal{C})$ dans le repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ (On précisera en particulier les points d'abscisses respectives : $-\frac{1}{2}$, 1 et 2.

4°/ Calculer l'aire S de la partie du plan comprise entre la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$

Donner une valeur approchée de cette aire à 1cm^2 près.

2./ On considère les suites (U_n) et (V_n) définies, pour tout entier naturel, par :

$$U_n = P_{n+1} - P_n \quad \text{et} \quad V_n = P_{n+1} - \frac{1}{2}P_n$$

a./ Prouver que la suite (U_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme. Exprimer U_n en fonction de n .

b./ Calculer $V_{n+1} - V_n$ et en déduire que, pour tout entier naturel n :

$$V_n = P_1 - \frac{1}{2}P_0$$

Calculer alors V_n .

c./ Démontrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $P_n = 2(V_n - U_n)$.

En déduire une expression de P_n en fonction de n .

d./ Montrer que la suite (P_n) converge et calculer sa limite.

Que peut-on en déduire en ce qui concerne l'évolution de cette population au bout d'un nombre d'années suffisamment grand ?

Problème (10 pts)

Soit f la fonction numérique à variable réelle x définie sur $] -1 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{(x+1)^2}$$

1°/ Démontrer que $f(x)$ peut se mettre sous la forme $f(x) = ax + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$

où a , b et c sont 3 réels que l'on déterminera.

2°/ Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition

a-/ Démontrer que pour tout x appartenant au domaine de définition,

$$f'(x) = \frac{x(x^2 + 3x + 4)}{(x+1)^3}$$

b-/ Dresser le tableau de variation de la fonction f .

3°/ Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ (unité graphique 4cm)

a-/ Démontrer que $(\mathcal{C})$ admet une asymptote parallèle à l'axe $(O ; \vec{i})$.

EXAMEN : *Baccalauréat malien*

BAC

SÉRIES

MTE

SESSION : *Juillet 2012*

ÉPREUVE DE : *Mathématiques*

DURÉE : *4 heures*

COEF: *5*

SUJET

Exercice 1 (4 pts)

1-/ Développer le polynôme

$$P(X) = (X + 1)(X - 2)$$

2-/ On désigne par $\ln(x)$ le logarithme népérien de x . En utilisant le résultat précédent, résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a-/ $(\ln(x))^2 - \ln(x) - 2 = 0$;

b-/ $e^{2x} - e^x = 2$;

Exercice 2 (6 pts)

Dans une zone de marais, on s'intéresse à la population de libellules. On note P_0 la population initiale et P_n la population au bout de n années.

Des études ont permis de modéliser l'évolution de P_n par la relation :

$$P_{n+2} - P_{n+1} = \frac{1}{2}(P_{n+1} - P_n)$$

On pose $P_0 = 40\,000$ et $P_1 = 60\,000$.

On définit l'accroissement de la population pendant la n -ième année par

$$P_n - P_{n-1}.$$

1./ Calculer l'accroissement de la population pendant la première année, la deuxième année et la troisième année.

En déduire P_2 et P_3 .

TSVP 

a-/ Démontrer que $(\mathcal{C})$ admet une asymptote parallèle à l'axe $(O ; \vec{j})$.

b-/ Démontrer que $(\mathcal{C})$ admet une asymptote (Δ) (dont on précisera l'équation) non parallèle aux axes.

c-/ Démontrer qu'il existe un point A de $(\mathcal{C})$ où la tangente (T) est parallèle à (Δ) .

d-/ Tracer (Δ) , (T) et $(\mathcal{C})$ dans le repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ (On précisera en particulier les points d'abscisses respectives : $-\frac{1}{2}$, 1 et 2).

4°/ Calculer l'aire S de la partie du plan comprise entre la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$.

Donner une valeur approchée de cette aire à 1cm^2 près.

b) Déterminer trois nombres a , b et c tels que pour tout réel t positif ou nul, on ait :

$$\frac{1}{(1+t)^2} = a + \frac{bt}{1+t} + \frac{ct}{(1+t)^2} \quad (1)$$

c) En posant $t = e^x$ dans l'égalité (1) calculer l'intégrale $L = \int_0^1 \frac{1}{(1+e^x)^2} dx$

3- a) à l'aide d'une intégration par parties exprimer J en fonction de L .

b) En déduire la valeur de J .

PROBLEME : (10 points)

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie sur $\mathbb{R} - \{\ln 2\}$ par : $f(x) = x + \frac{e^x}{2(e^x - 2)}$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

1- Prouver que la droite d'équation $x = \ln 2$ est asymptote verticale à (C) .

2- a) Déterminer la limite de f en $-\infty$;

b) Justifier que la droite (D_1) d'équation $y = x$ est asymptote à (C) en $-\infty$.

3- a) Etablir que pour tout x différent de $\ln 2$ on a :

$$f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{1}{e^x - 2}$$

b) En déduire la limite de f en $+\infty$ et justifier que la droite (D_2) d'équation $y = x + \frac{1}{2}$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

4- a) Prouver que pour tout x de $\mathbb{R} - \{\ln 2\}$ on a : $f'(x) = \frac{(e^x - 1)(e^x - 4)}{(e^x - 2)^2}$

b) Etudier le signe de $f'(x)$. En déduire le sens de variation de f .
Dresser le tableau de variation de f .

5- Tracer (C) et ses asymptotes dans le repère donné.

6- a) Déterminer les primitives sur l'intervalle $\ln 2 ; +\infty$ [de la fonction g de $\mathbb{R}$

vers $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \frac{e^x}{e^x - 2}$

b) En déduire la primitive sur $\ln 2 ; +\infty$ [de la fonction g prenant la valeur 0 en $\ln 3$.

EXAMEN :

Baccalauréat malien

BAC

SERIES

MTE

SESSION Juillet. 2000

ÉPREUVE DE :

Mathématiques

DURÉE : 3 heures COEF 5

EXERCICE 1 : (4 points)

On considère la fonction numérique f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \ln(e^x - 1)$

1- a) Déterminer la dérivée de f .

b) En déduire la valeur de l'intégrale : $I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x}{e^x - 1} dx$.

2- Soit $K = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{1}{e^x - 1} dx$

a) Calculer $I - K$

b) En déduire la valeur de K .

EXERCICE 2 : (6 points)

1- Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f(x) = (x-1)^2, & \text{si } x < 1 \\ f(x) = \ln x, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

a) Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Etudier la dérivabilité de f en 1. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

c) Dresser le tableau de variation de f .

2- On se propose de calculer l'intégrale :

$$J = \int_0^1 \frac{x e^x}{(1+e^x)^3} dx$$

a) Calculer les deux intégrales : $A = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx$; $B = \int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$

2./ On considère les suites (U_n) et (V_n) définies, pour tout entier naturel, par :

$$U_n = P_{n+1} - P_n \quad \text{et} \quad V_n = P_{n+1} - \frac{1}{2} P_n$$

a./ Prouver que la suite (U_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme. Exprimer U_n en fonction de n .

b./ Calculer $V_{n+1} - V_n$ et en déduire que, pour tout entier naturel n :

$$V_n = P_1 - \frac{1}{2} P_0$$

c./ Calculer alors V_n .

d./ Démontrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $P_n = 2(V_n - U_n)$.

En déduire une expression de P_n en fonction de n .

e./ Montrer que la suite (P_n) converge et calculer sa limite.

Que peut-on en déduire en ce qui concerne l'évolution de cette population au bout d'un nombre d'années suffisamment grand ?

Problème (10 pts)

Soit f la fonction numérique à variable réelle x définie sur $] -1 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{(x+1)^2}$$

1°/ Démontrer que $f(x)$ peut se mettre sous la forme $f(x) = ax + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$

où a , b et c sont 3 réels que l'on déterminera.

2°/ Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition

a-/ Démontrer que pour tout x appartenant au domaine de définition,

$$f'(x) = \frac{x(x^2 + 3x + 4)}{(x+1)^3}$$

b-/ Dresser le tableau de variation de la fonction f .

3°/ Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ (unité graphique 4cm)

EXAMEN : *Baccalauréat malien*

SÉRIES

MTE

SESSION : *Juillet 2012*ÉPREUVE DE : *Mathématiques*DURÉE : *4 heures*COEF: *5***SUJET****Exercice 1** (4 pts)

1-/ Développer le polynôme

$$P(X) = (X + 1)(X - 2)$$

2-/ On désigne par $\ln(x)$ le logarithme népérien de x . En utilisant le résultat précédent, résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a-/ $(\ln(x))^2 - \ln(x) - 2 = 0$;

b-/ $e^{2x} - e^x = 2$;

Exercice 2 (6 pts)Dans une zone de marais, on s'intéresse à la population de libellules. On note P_0 la population initiale et P_n la population au bout de n années.Des études ont permis de modéliser l'évolution de P_n par la relation :

$$P_{n+2} - P_{n+1} = \frac{1}{2}(P_{n+1} - P_n)$$

On pose $P_0 = 40\,000$ et $P_1 = 60\,000$.On définit l'accroissement de la population pendant la n -ième année par

$$P_n - P_{n-1}.$$

1./ Calculer l'accroissement de la population pendant la première année, la deuxième année et la troisième année.

En déduire P_2 et P_3 .

TSVP