

Arithmétique-TSE

Bac 96

Soit m un nombre entier.

1°) Montrer que l'équation : $(x; y) \in \mathbb{Z}^2, 6y - 3x = m$ admet des solutions si et seulement si m est multiple de 3.

2°) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations :

a°) $6y - 3x = 5$; b°) $6y - 3x = 3$

3°) Dédurre de ce qui précède les solutions dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation

$$(6y - 3x - 4)(6y - 3x + 4) = 1$$

Bac 98

1°) Démontrer que, quel que soit l'entier naturel n , on a $3^{2n+3} + 2^{n+3} \equiv 0[7]$

2°) Résoudre dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, l'équation $x^2 + 2x + 6 = 0$

3°) Résoudre le système $(a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \quad \begin{cases} a^2 - b^2 = 405 \\ 3m = ab \end{cases}$ m étant le PPCM des entiers a et b .

Bac 99

1°) Soit $n \in \mathbb{N}$,

a°) Déterminer suivant les valeurs de n le reste de la division par 7 de l'entier 3^n .

En déduire le reste de la division par 7 de l'entier naturel $(506390)^{128}$.

b°) Dans le système de numération décimal, on considère l'entier naturel $\overline{651x}$.

Déterminer x pour que $(506390)^{128} + \overline{651x}$ soit divisible par 7.

2°) a°) Déterminer le plus grand diviseur commun des nombres 21590 et 9525.

b°) Déterminer l'ensemble des entiers x tels que : $34x \equiv 2[15]$.

c°) Résoudre l'équation $(x; y) \in \mathbb{Z}^2 \quad 21590x + 9525y = 1270$.

d°) Quel est le chiffre des unités de l'entier naturel 7^{1980} écrit dans le système décimal ?

Bac 2000

Écrire en base deux, puis en base seize, l'entier naturel $N = 6932$.

Bac 2001

1°/ Le système de numération est le système décimal.

a) Déterminez l'entier naturel $N = PGCD(17787 ; 689 ; 297)$.

b) Résoudre l'équation $(x ; y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : 13x - 84y = 7$.

2°/ a) Déterminez tous les couples (a, b) d'éléments de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ tels que $\begin{cases} a \times b = 0 \\ a - b = 5 \end{cases}$

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ l'équation $x^2 + 3x - 4 = 0$.

c) Démontrez que quel que soit l'entier naturel n , on a : $3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1} \equiv 0 [17]$.

Bac 2002

Un lot à usage d'habitation a la forme d'un trapèze dont les deux bases mesurent respectivement 30 m et 21 m ; les deux autres côtés mesurent 18 m et 12 m. Pour la clôture le propriétaire a besoin des poteaux de support à égale distance en nombre entier de mètres pour un nombre minimum de poteaux, avec un poteau à chaque sommet.

a) Quelle est la distance entre deux poteaux ?

d) Déterminez le nombre de poteaux nécessaire à la clôture.

Bac 2003

1°/ Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs $(\alpha; \beta)$ dans chacun des cas suivants :

a) $17\alpha - 19\beta = 2$; b) $17\alpha - 19\beta = -2$

2°/ Déterminer l'ensemble des entiers n tels que :

a) $n \equiv 0[17]$ et $n \equiv -2 [19]$; b) $n \equiv 0[19]$ et $n \equiv -2 [17]$

3°/ En déduire l'ensemble des entiers n tels que $n^2 + 2n$ soit divisible par 323.

Bac 2004

1°/ a) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation d'inconnue $(p; q) : 11p - 7q = 1$

b) La division euclidienne d'un entier naturel n par 7 donne pour reste 4, le même entier divisé par 11 donne pour reste 3. Quel sera son reste dans la division euclidienne par 77 ?

c) Déterminez les valeurs de l'entier naturel n inférieures à 200.

Bac 2005

2°/ a) Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, 5^{3n} - 3^{3n}$ est divisible par 49.

b) En déduire que si l'entier n n'est pas multiple de 3 alors $5^{2n} + 15^n + 3^{2n}$ est divisible par 49.

Bac 2006

2°/ a.) Décomposer les nombres 450 et 320 en produit de facteurs premiers.

b.) Quel est le PGCD de 450 et de 320 ?

c.) Une pièce rectangulaire a pour dimensions 4,5m et 3,20m. On souhaite calculer cette pièce avec un nombre entier de dalles carrées, sans aucune découpe. Quel est le plus grand côté possible (en cm) de la dalle carrée ?

Bac 2007

1°/ On appelle nombre triangulaire tout entier naturel qui peut s'écrire sous la forme $\frac{a^2+a}{2}$ avec a un entier naturel non nul.

a.) Démontrer que si n est la somme de deux nombres triangulaires, alors $4n + 1$ est la somme de deux carrés.

b.) On pose $n = 3$; $4n + 1$ est-il la somme de deux carrés d'entiers ?

Étudier la réciproque de la propriété a.).

2°/ Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, (unité graphique 4 cm) on considère la courbe (C) d'équation $y^2 = x^2(1 - x^2)$.

a.) Préciser les éléments de symétrie de (C) .

b.) Construire (C) dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Bac 2008

On considère l'entier naturel A qui s'écrit $\overline{1x416}$ dans le système de numération de base sept.

1°/ Déterminer x pour que :

a) A soit divisible par six b) A soit divisible par cinq ; c) En déduire qu'il existe x tel que A soit divisible par trente.

2°/ On donne à x la valeur zéro. Déterminer l'écriture décimale de A . Dans ce cas quel est le nombre de diviseurs positifs de A ? Quel est l'ensemble des diviseurs positifs de A qui sont premiers avec trois ?

Bac 2009

1°/ Démontrer par récurrence les propriétés suivantes :

a.) $(n + 1)! \geq \sum_{i=1}^n i!$; b.) $\sum_{i=1}^n i \times i! = (n + 1)! - 1$

NB : $n!$ désigne factorielle n .

2°/ Un ouvrier dispose d'une plaque de métal rectangulaire de 110cm de longueur sur 88cm de largeur. Il veut découper dans cette plaque des carrés tous identiques, les plus grands possibles, de façon à ne pas avoir de perte.

a.) Déterminer la longueur du côté du carré qui convient.

b.) Déterminer le nombre de carrés qu'il pourra découper dans la plaque de métal.

Bac 2011

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$ on donne le point $A(12; 18)$. On désigne par B un point de l'axe $(O; \vec{u})$ et C un point de $(O; \vec{v})$ tels que $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{2}$. On appelle x l'abscisse de B et y l'ordonnée de C.

1°/ Démontrer que le couple $(x; y)$ est solution de l'équation (E) : $2x + 3y = 78$

2°/ On se propose de trouver tous les couples de points $(B; C)$ ayant pour coordonnées des nombres entiers relatifs.

a°/ Montrer que l'on est ramené à l'équation (E), avec x et y appartenant à l'ensemble des entiers relatifs.

b°/ A partir de la définition de B et de C trouver une solution particulière $(x_0; y_0)$ de (E).

c°/ Démontrer qu'un couple $(x; y)$ est solution de (E) si et seulement si $(x; y) = (12 + 3k; 18 - 2k)$ où k est un entier relatif.

d°/ Combien y a-t-il de couples de points $(B; C)$ ayant pour coordonnées des nombres entiers relatifs, tels que : $-6 \leq x \leq 21$ et $-5 \leq y \leq 14$?

Bac 2012

Deux commerçantes, Awa et Fanta se rendent au marché pour acheter des mangues. Chaque mangue coûte 5F l'unité. Awa dit à Fanta, je dispose d'un montant égal à m_1 Francs et Fanta répond, moi aussi j'ai une somme égale à m_2 Francs.

L'entier m_1 s'écrit $m_1 = 1x00y2$ dans le système de numération de base huit et m_2 s'écrit $m_2 = x1y003$ dans le système de numération de base sept.

1°/ Déterminer les chiffres x et y pour que chacune des deux commerçantes puisse, avec la totalité de son argent, acheter un nombre maximum de mangues.

2°/ Déterminer le montant que dispose chacune des commerçantes. En déduire le nombre de mangues que chacune d'elles peut acheter.

3°/ a-) Décomposer m_1 et m_2 en produit de facteurs premiers.

b-) En déduire le nombre de diviseurs de m_1 et m_2 puis le $pgcd(m_1; m_2)$.

4°/ Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $m_1u + m_2v = 5$ où u et v sont deux entiers relatifs.

Bac 2013

I-/ 1°/ Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation $x^3 - y^3 = 631$.

2°/ a) Trouvez le reste de la division euclidienne de 111 par 7 et de $10n$ par 7 suivant les valeurs de l'entier naturel n .

b) Soit l'entier naturel $N = 999\,888\,777\,666\,555\,444\,333\,222\,111$.

– Montrez que N peut s'écrire en fonction de 111.

– Quel est le reste de la division euclidienne de N par 7 ?

II-/ 1°/ Trouvez trois entiers naturels α, β, γ différents de 1, premiers entre eux deux à deux tels que $\alpha \times \beta \times \gamma = 495$.

2°/ x, y et z étant des chiffres du système décimal, on donne le nombre $N = x13y8z$ dans le système décimal. Déterminez tous les triplets (x, y, z) pour lesquels N est un multiple de 495.

Bac 2014

I-// On se propose de résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système (S) :
$$\begin{cases} x \equiv 10[23] \\ x \equiv 4[7] \end{cases}$$

1°/ Déterminez un couple $(\alpha ; \beta)$ d'entiers relatifs solution de l'équation $23\alpha + 7\beta = 1$

2°/ En déduire un couple $(u_0 ; v_0)$ solution de l'équation (E): $23u - 7v = -6$. Résoudre complètement l'équation (E).

3°/ Démontrez que x est solution de l'équation (S) si et seulement si il existe un couple $(u ; v)$ d'entiers relatifs vérifiant :
$$\begin{cases} 23u - 7v = -6 \\ x = 10 + 23u \end{cases}$$

En déduire l'ensemble des solutions de (S).

4°/ Déterminez la plus petite solution (entier naturel) de (S) divisible par 16.

II-// 1-/ On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) : $11x + 8y = 79$.

a-/ Montrez que si $(x ; y)$ est solution de (E) alors $y \equiv 3[11]$.

b-/ Résoudre alors l'équation (E).

2-/ Le prix total de 41 pièces détachées réparties en trois lots est de 48000F.

Le prix d'une pièce du 1er lot est 4800F ; le prix d'une pièce du 2ème lot est 3600F et le prix d'une pièce du 3ème lot est 400F.

Déterminez le nombre de pièces de chaque lot.

NB: On pourra utiliser l'équation (E). Les parties I/ et II/ sont indépendantes.

Bac 2015

I. α et β sont deux entiers naturels et $N = 2^\alpha \times 3^\beta$ tels que le nombre de diviseurs de N^2 est le triple du nombre de diviseurs de N .

1. Prouvez que $(\alpha - 1)(\beta - 1) = 3$.

2. Déduisez en les valeurs de N .

II. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$ et $\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes. Soient A, B et C trois points d'affixes respectives $a = -1 + 3i$; $b = -4 + 2i$ et $c = 1 + 4i$.

Soit f la transformation du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = (2 - 2i)z + 1$.

1. Déterminez la nature et les éléments caractéristiques de f .
2. Déterminez l'affixe du point B' image de B par la transformation f . vérifiez que les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CB'}$ et orthogonaux.
3. Soit $M(x ; y)$ où x et y sont des entiers relatifs et M' son image par f . Montrez que les vecteurs $\overrightarrow{CM'}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux si et seulement si $x + 3y = 2$.
4. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $x + 3y = 2$ et en déduire l'ensemble des points M dont les coordonnées sont des entiers appartenant à $[-5 ; 5]$.

Bac 2016

I-/ On veut entourer avec un minimum d'arbres un champ rectangulaire ayant pour dimensions 525m et 285m. Les arbres seront régulièrement espacés, de plus, il y aura un arbre à chaque sommet du rectangle. Calcule :

1°/ La distance comprise entre deux arbres.

2°/ Le nombre d'arbres nécessaires pour entourer le champ.

II-/ On considère l'équation $(E) : 11x - 26y = 1$, où x et y désignent deux nombres entiers relatifs.

1°/ Vérifie que le couple $(-7 ; -3)$ est une solution de (E) .

2°/ Résous alors l'équation (E) .

3°/ En déduis le couple d'entiers relatifs (p, q) solution de (E) tel que $0 \leq p \leq 25$.