

B 422

Durée : 4 heures

Les trois problèmes sont obligatoires.

*Le candidat ne sera jugé que sur la base des traces écrites sur sa copie.
Il sera tenu grand compte de la clarté et de la précision des raisonnements.*

SITUATION D'EVALUATION

Contexte : Projet de réalisation d'un musée moderne

Dans le cadre de la promotion du tourisme, le gouvernement a entrepris la réfection des musées existants et la construction d'un musée d'architecture moderne. Ce dernier sera réalisé sur un terrain rectangulaire dont les dimensions, en mètre, sont deux entiers naturels a et b tels que :

$$a^2 + b^2 = 484354 \text{ et } PPCM(a, b) = 16965.$$

L'architecte Koovi, en charge du projet, a prévu aussi la construction d'un local en verre et en acier blindés pour abriter les objets d'art précieux.

Koffi, un élève en classe terminale C, a eu fortuitement accès à la maquette et s'intéresse au projet. Il veut connaître les dimensions du terrain rectangulaire, la masse de verre nécessaire pour la construction du local et les décorations qui y sont réalisées.

Tâche : Tu es invité(e) à répondre aux différentes préoccupations de Koffi en résolvant les trois problèmes ci-après.

Problème 1

- 1- a) Justifie que 1433 est un nombre premier.
 - b) Décompose 484354 en produit de facteurs premiers.
 - c) Déduis-en les valeurs possibles du PGCD des entiers naturels a et b .
- 2- Détermine les dimensions du terrain rectangulaire prévu pour la réalisation du musée moderne.

Problème 2

Le local devant abriter les objets d'art précieux a la forme d'un tétraèdre $ABCD$ et comporte une caméra de surveillance positionnée en un endroit assimilé au point I , barycentre des points pondérés $(A; 1)$, $(B; 1)$ et $(C; 2)$. Une série de décorations lumineuses sera réalisée en des endroits assimilés aux points G_m , barycentres du système de points pondérés $\{(A; \ln m), (B; \ln m), (C; 2\ln m), (D; (2 - \ln m)^2)\}$, m étant, dans tout ce problème, un nombre réel strictement positif et $\ln$ le symbole de la fonction logarithme népérien.

- 3- Justifie, pour tout m , l'existence de G_m .
- 4- Justifie qu'il existe une valeur de m pour laquelle les points G_m et I sont confondus.
- 5- Démontre que l'on a, pour tout m : $\overrightarrow{DG_m} = \frac{4\ln m}{4 + (\ln m)^2} \overrightarrow{DI}$.
- 6- On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{4\ln x}{4 + (\ln x)^2}$.
 - a) Détermine l'ensemble de définition D_f de la fonction f .
 - b) Justifie que f peut être prolongée par continuité à droite en 0.

7- Soit f_1 le prolongement par continuité de f à droite en 0.

a) Étudie la dérivabilité de f_1 à droite en 0 et donne une interprétation géométrique du résultat.

b) Étudie les variations de f_1 .

c) Construis la courbe représentative de la fonction f_1 dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

8- a) Détermine l'image de l'intervalle $]0; +\infty[$ par f .

b) Détermine l'ensemble des points G_m lorsque m décrit $\mathbb{R}_+^*$.

Problème 3

Estimée en tonnes, la masse de verre nécessaire pour la construction du local est égale à la valeur moyenne sur $\left[0; \frac{\pi(\sqrt{3}-1)}{2}\right]$, de la fonction g solution de l'équation différentielle $(2 - \sqrt{3})y'' + 2y = 0$ qui satisfait aux conditions $g(0) = 1$ et $g'(0) = \sqrt{3} + 1$.

9- Vérifie que $\frac{2}{2-\sqrt{3}} = (\sqrt{3} + 1)^2$

10- Justifie qu'on a : pour tout nombre réel x ,

$$g(x) = \cos(\sqrt{3} + 1)x + \sin(\sqrt{3} + 1)x$$

11- Calcule, à un kilogramme près, la masse de verre utilisé. ✓

FIN