

D 462

Durée : 4 heures

Le candidat doit traiter obligatoirement toutes les parties de l'épreuve.

Il ne sera jugé que sur la base des traces écrites sur sa copie.

Il sera tenu grand compte de la clarté et de la précision des raisonnements.

Contexte : Aménagement du centre de réception des invités à un mariage

A l'occasion du mariage de sa sœur, Sovi, élève en classe terminale, s'est rapproché de Bio, un membre du comité d'organisation de la réception des invités. Il traduit en langage codé les informations reçues de Bio comme suit : « le comité a prévu l'utilisation de n figures géométriques ($n \in \mathbb{N}$) pour l'embellissement du cadre physique; le nombre de sièges pour les invités s'écrit $\overline{nnn}$ dans le système de numération de base 7 (sept) et $\text{PGCD}(n^3 + 5n^2 + n + 5; 3) = 3$ ». L'une de ces figures est un tétraèdre régulier $ABCD$ de l'espace orienté $\mathcal{E}$ et une deuxième figure est l'image de ce tétraèdre par une transformation de $\mathcal{E}$.

Sovi veut déterminer le nombre de sièges, évaluer l'aire de l'un des solides à matérialiser et construire quelques-unes des figures géométriques considérées.

Tâche Tu es invité(e) à apporter des réponses adéquates aux préoccupations de Sovi en résolvant les trois problèmes suivants :

Problème 1

- 1) a) Justifie que les entiers naturels $(n^2 + 1)$ et 3 sont premiers entre eux. Tu pourras utiliser la congruence de n modulo 3.
b) Justifie que $\text{PGCD}(n^3 + 5n^2 + n + 5; 3) = \text{PGCD}(n + 5; 3)$.
c) Détermine l'ensemble des valeurs de n pour lesquelles :
$$\text{PGCD}(n^3 + 5n^2 + n + 5; 3) = 3.$$
- 2) a) Justifie que le comité d'organisation a prévu 4 figures géométriques.
b) Ecris dans le système décimal le nombre de sièges réservés aux invités.

$n=34$
 $6=n$

Problème 2

Le tétraèdre $ABCD$ a pour aire, en unités d'aire, $S = \left| \int_0^{\frac{\pi}{3}} 64 \sin^3 x \cos 2x dx \right|$.

La transformation dont il s'agit est $h_2 \circ h_1$ où h_1 est l'homothétie de centre A et de rapport 3 et h_2 l'homothétie de centre C et de rapport (-2) . L'objet matérialisant l'image par cette transformation du solide sera recouvert de papier peint synthétique.

3) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de l'application $h_2 \circ h_1$.

4) a) Justifie qu'on a, pour tout nombre réel x :

$$\sin^3 x \cos 2x = -2\cos^4 x \sin x + 3 \cos^2 x \sin x - \sin x.$$

b) Calcule l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^3 x \cos 2x dx$.

c) Calcule l'aire de la surface de l'image par $h_2 \circ h_1$ du tétraèdre $ABCD$.

Problème 3

Le plan P étant muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, une autre figure est une portion de la courbe représentative (Γ_1) de la fonction f de $]1; +\infty[$ vers $[0; +\infty[$ définie par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x} + \ln x.$$

La quatrième figure géométrique est une portion de l'ensemble (Γ_2) des points N du plan tels que OMN est un triangle rectangle en O et isocèle, M est un point de (Γ_1) et l'angle orienté $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON})$ de sens direct.

5) a) Étudie la dérivabilité de f à droite en 1.

b) Achève l'étude des variations de f .

c) Justifie que f est une bijection.

6) a) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x} - x)$.

b) Étudie la branche infinie de (Γ_1) .

7) a) Justifie que pour tout x élément de $]1; +\infty[$ l'équation $f'(x) = 1$ est équivalente à l'équation $\sqrt{x^2 - x} = \frac{2x^2 - x}{2(x-1)}$.

b) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{x^2 - x} = \frac{2x^2 - x}{2(x-1)}$.

c) Dédus-en que l'équation $f(x) = x$ admet dans $]1; +\infty[$ une solution unique α et que $1 < \alpha < 2$.

8) a) Étudie la position relative de (Γ_1) et de la droite Δ d'équation $y = x$.

b) Trace la courbe (Γ_1) .

- 9) a) Justifie que (Γ_2) est l'image de (Γ_1) par une rotation r que tu caractériseras.
b) Justifie que (Γ_2) est l'ensemble des points de coordonnées (x, y) telles que :
$$\sqrt{y^2 - y} + \ln y + x = 0.$$

c) Démontre que (Γ_2) est l'image de la courbe de la bijection réciproque f^{-1} de f par une symétrie orthogonale dont tu préciseras l'axe.
d) Construis (Γ_2) .

FIN