



ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

(L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé)

Coefficient : 7

Durée : 4 heures

Exercice 1 (4 points)

Dans cet exercice, toutes les questions sont indépendantes. Pour les quatre (4) questions, reproduis le ci-dessous et complète-le par la lettre correspondant à la bonne réponse.

Numéro de la question	1	2	3	4
Lettre correspondant à la bonne réponse				

1. Soit α un nombre réel tel que $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. On pose $z = 1 + \sin \alpha - i \cos \alpha$.

Laquelle des écritures suivantes est une écriture de z sous forme exponentielle ? (1 point)

- a) $2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot e^{i\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$ b) $2 \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) \cdot e^{-i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)}$
c) $2 \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot e^{-i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}$ d) $2 \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}$

2. Quel est le reste de la division euclidienne de $7 \times 5^{2025} - 6$ par 31 ? (1 point)

- a) 1 b) 5 c) 7 d) 15

3. Une compagnie de transport aérien a étudié le profil de ses passagers :

- 70% des clients ont acheté leur billet par internet et parmi eux 82% sont des jeunes ;
- Quatre jeunes sur cinq ont acheté leur billet par internet.

On choisit au hasard la fiche de réservation d'un client.

Quelle est la probabilité que ce soit celle d'un jeune ? (1 point)

- a) 0,574 b) 0,7175 c) 0,8537 d) 0,875

4. Le plan est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Quelle est l'excentricité de l'hyperbole d'équation $-\frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(y+1)^2}{3} = 1$? (1 point)

- a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{3}{2}$

Problème (11 points)

Soit m un paramètre réel strictement positif.

On considère la fonction numérique f_m définie pour tout réel x différent de -2 et de 0 par :

$$f_m(x) = x + m \ln \left| \frac{x+2}{x} \right|.$$

On note (C_m) sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm .

Partie A (6 points)

- Montre que l'équation $x^2 + 2x - 2m = 0$ admet deux solutions réelles distinctes x_1 et x_2 telles que $x_1 < -2 < 0 < x_2$ (0,75 pt)
- a) Calcule les limites de f_m aux bornes des intervalles de son ensemble de définition. (0,75 pt)
b) Étudie le sens de variation de f_m et dresse son tableau de variations. (1,5 pt)
- a) Montre que toutes les courbes (C_m) passent par un point fixe Ω dont tu détermineras les coordonnées. (0,5 pt)
b) Montre que le point Ω est un centre de symétrie de (C_m) . (0,25 pt)
c) Montre que (C_m) admet une asymptote oblique et étudie la position relative de (C_m) par rapport à cette asymptote oblique. (0,75 pt)
- a) Montre que l'équation $f_1(x) = 0$ admet une solution unique α et que $-1 < \alpha < -0,5$. (1 pt)
b) Trace (C_1) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (0,5 pt)

Partie B (2,5 points)

Soit l'application φ_m du plan dans lui-même qui à tout point M de coordonnées $(x; y)$ associe le point M' de coordonnées $(x'; y')$ telle que :

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = (1-m)x + my \end{cases}, \text{ où } m \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}.$$

- a) Démontre que l'ensemble des points invariants par φ_m est la droite (Δ) d'équation $y = x$. (0,5 pt)
b) Démontre que si M n'appartient pas à la droite (Δ) alors la droite (MM') est parallèle à une droite fixe (Δ') dont on précisera un vecteur directeur. (0,5 pt)
c) Soit M_0 le projeté de M sur (Δ) parallèlement à (Δ') ; exprime $\overline{M_0 M'}$ en fonction de $\overline{M_0 M}$. (0,25 pt)
- a) Démontre que $\varphi_m(C_1) = (C_m)$. Déduis-en une construction géométrique simple de (C_m) point par point, à partir de (C_1) . (0,75 pt)
b) Construis (C_2) dans le même repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (0,5 pt)

Partie C (2,5 points)

Soit λ un réel tel que $0 < \lambda < 1$ et $A(\lambda)$ l'aire du domaine délimité par les courbes (C_m) , (C_{m+1}) et les droites d'équations respectives $x = \lambda$ et $x = 1$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- Calcule $A(\lambda)$, puis détermine $\lim_{\lambda \rightarrow 0} A(\lambda)$. (1 pt)
- On considère la fonction h définie pour tout réel x strictement positif par :
 $h(x) = \ln \left(1 + \frac{2}{x} \right)$ et pour tout entier naturel $n \geq 1$ on considère la suite (S_n) de terme général
 $S_n = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n h \left(\frac{p}{n} \right).$

- a) Détermine le sens de variation de h sur $]0; 1]$. (0,25 pt)
- b) Montre que pour tout entier naturel p vérifiant $1 \leq p \leq n-1$, on a :

$$\frac{1}{n} h\left(\frac{p+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{p}{n}}^{\frac{p+1}{n}} h(x) dx \leq \frac{1}{n} h\left(\frac{p}{n}\right). \quad (0,5 \text{ pt}).$$
- c) Dédus-en que $S_n - \frac{1}{n} h\left(\frac{1}{n}\right) \leq A\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n$ et que $A\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n \leq A\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} h\left(\frac{1}{n}\right)$. (0,5 pt)
- d) Montre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \ln\left(\frac{27}{4}\right)$. (0,25 pt)

Données : $\sqrt{3} \approx 1,7$; $\ln(3) \approx 1,1$; $f_1(x_1) \approx -4$ et $f_1(x_2) \approx 2$

Situation d'intégration (5points)

Ouétien, est un professeur de mathématiques, habitant de la ville de Dédougou et aime généralement s'exprimer en langage mathématique. Il veut organiser l'anniversaire de sa fille Waminie et il lui faut un nombre a de chaises et un nombre b de tables pour recevoir ses invités. D'après ses estimations, il dit que les

nombre a et b vérifient le système
$$\begin{cases} 3a + 7b = 1020 \\ \text{PGCD}(a; b) = 20 \end{cases}$$

Dans la cour de Ouétien est construite une paillote dont la toiture a la forme d'une pyramide. Ouétien dit que les deux faces de cette pyramide sont contenues dans les plans (P_1) et (P_2) d'équations respectives : $2x + y - 3z + 14 = 0$ et $-2x - y + 2z - 10 = 0$.

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace ; les plans (P_1) et (P_2) sont sécants suivant une droite (Δ) .

Waminie, souhaite connaître le nombre de chaises et de tables afin de planifier leur disposition sous la paillote. Elle voudrait aussi connaître la distance de la droite (Δ) au plancher de la paillote contenu dans le plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$ en vue de prévoir la longueur des guirlandes à acheter pour la décoration de la paillote. Ne sachant pas comment s'y prendre, elle te sollicite en tant qu'un(e) apprenant(e) en classe de Terminale C pour l'aider. À partir d'une argumentation rigoureuse basée sur tes connaissances en Mathématiques détermine :

- 1) Le nombre de chaises et de tables.
- 2) La distance du sommet au plancher de la paillote.