

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

(Les calculatrices ne sont pas autorisées.)

Coefficient : 06

Durée : 04 heures

EXERCICE 1 (04 points)

Soit k un nombre réel différent de 0 et de 1. On considère dans le plan $\mathcal{P}$ trois points A, B et C tels que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$, et les cercles (Γ_1) et (Γ_2) de diamètres respectifs $[AB]$ et $[AC]$. Une droite (Δ) non perpendiculaire à (AB) et distincte de (AB) , passant par A, coupe les cercles (Γ_1) et (Γ_2) respectivement en M et N.

- 1) a) Montrer que les droites (BM) et (CN) sont parallèles. (0,5pt)
- b) Pour quelle valeur de k , les droites (BN) et (CM) sont-elles parallèles ? (0,5pt)

- 2) On prend $k = \frac{3}{2}$ et $AB = 4\text{cm}$.

On note P le point d'intersection des droites (BN) et (CM).

On considère l'homothétie h de centre P telle que $h(B) = N$.

- a) Démontrer que $h(M) = C$. (0,5pt)
 - b) Déterminer le rapport de h . (0,5pt)
- 3) a) Déterminer le réel β tel que $\overrightarrow{BP} = \beta\overrightarrow{BN}$. (0,5pt)
 - b) Déterminer la nature et les éléments géométriques du lieu géométrique (Σ) du point P lorsque la droite (Δ) varie. (1pt)
 - c) Construire (Σ) . (0,5pt)

EXERCICE 2 (04 points)

On note (E) l'équation différentielle : $y'' + ay' + by = 0$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Les solutions de l'équation caractéristique de (E) sont les nombres complexes

$p + iq$ et $p - iq$ avec $p \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}^*$.

- 1) Vérifier que $2p + a = 0$ et que $p^2 + ap + b = q^2$. (0,5pt+0,5pt)

- 2) On note (E') l'équation différentielle : $y'' + q^2y = 0$.

On suppose que f est une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = e^{-px}f(x).$$

- a) Montrer que f est solution de (E) si et seulement si g est solution de (E'). (0,5pt)
 - b) Montrer que si φ est solution de (E') alors la fonction $v = (q\varphi)^2 + (\varphi')^2$ est constante. (0,5pt)
 - c) Montrer qu'une solution φ de (E') est la fonction nulle si et seulement si $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$. (0,5pt)
- 3) Soit φ une solution de (E') et h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(t) = \varphi(t) - \left(\varphi(0)\cos qt + \frac{1}{q}\varphi'(0)\sin qt \right)$$
 - a) Montrer que h est une solution de (E'). (0,5pt)
 - b) Que vaut $h(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$? (0,25pt)

En déduire φ en fonction de $\varphi(0)$ et $\varphi'(0)$. (0,25pt)
 - 4) Soit $q = 2$ et φ la solution de (E') telle que $\varphi(0) = \sqrt{2}$ et $\varphi'(0) = 2\sqrt{2}$.
Déterminer les réels α et α tels que : $\forall t \in \mathbb{R}, \varphi(t) = \alpha \cos(2t + \alpha)$. (0,5pt)

PROBLEME (12 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 2 cm).

Partie A (7,25 points)

On considère f , la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R} \setminus [-1; 1]$ par $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

On note (C) sa courbe représentative.

- 1) a) Montrer que l'on peut restreindre l'ensemble d'étude de f à $D = [0; 1[\cup]1; +\infty[$. (0,5pt)
 b) Etudier le sens de variations de f sur D . (1pt)
 c) Dresser le tableau de variations de f sur D . (0,5pt)
 d) Tracer (C) . (0,75pt)
- 2) Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $E =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ par $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$. On note (Γ) sa courbe représentative.
 a) Montrer que la restriction g_1 de g à $]1; +\infty[$ est une application bijective de $]1; +\infty[$ sur un intervalle I_1 à préciser. (0,5pt)
 b) En déduire que g est une application bijection de E sur E . (0,5pt)
 c) Déterminer la composée $g \circ g$ et en déduire $g^{-1}(x)$. (0,5pt+0,25pt)
 d) En déduire que (Γ) admet la droite (Δ) d'équation $x - y = 0$ pour axe de symétrie. (0,25pt)
 e) Démontrer que (Γ) est invariante par la réflexion d'axe la droite d'équation $x + y = 0$. (0,5pt)
- 3) Soit la suite $(U_n)_{n \geq 0}$, définie par $U_0 \in]1; +\infty[$ et $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = g(U_n)$.
 a) Montrer que 2 est une période de (U_n) . (0,5pt)
 b) Déterminer la valeur de U_0 pour laquelle la suite (U_n) est convergente. (0,5pt)
- 4) Soit $\alpha \in]1; \sqrt{2}[$.
 a) Calculer l'aire $A(\alpha)$ de l'ensemble des points M dont les coordonnées $(x; y)$ vérifient :

$$\begin{cases} \alpha \leq x \leq \sqrt{2} \\ x \leq y \leq f(x) \end{cases} \quad (0,5pt)$$

 b) Déterminer $\lim_{\alpha \rightarrow 1} A(\alpha)$ et en déduire l'aire A de la partie du plan délimitée par la courbe (Γ) et les droites d'équations $x = 1$ et $y = 1$. (0,25+0,25pt)

Partie B (4,75 points)

A tout point M du plan $\mathcal{P}$, on note P et Q les projetés orthogonaux de M respectivement sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées.

Soit φ , l'application du plan $\mathcal{P}$ dans lui-même qui à tout point M associe le point M' tel que :

- Si $M = O$ alors $M' = O$
- Si $M \neq O$ alors M' est le projeté orthogonal de O sur la droite (PQ) .

- 1) Déterminer les images des axes de coordonnées par φ . (0,5pt)
- 2) a) Soit M de coordonnées (a, b) , un point distinct de O . Démontrer que les coordonnées (a', b') du point M' vérifient :

$$a' = \frac{ab^2}{a^2+b^2} \text{ et } b' = \frac{a^2b}{a^2+b^2}. \quad (0,5pt + 0,5pt)$$

 b) Soient $A(4; 0)$, $B(0; 4)$ et I milieu de $[AB]$. Déterminer les coordonnées des points A' , B' et I' images respectives des points A , B et I . (0,25 + 0,25+0,25pt)
 L'application φ conserve-t-elle les milieux des segments ? (0,25pt)
- 3) Soit (D_m) la droite d'équation $y = mx$, $m \neq 0$. Montrer que (D'_m) image de (D_m) par φ est une droite dont on précisera une équation. (0,75pt)
- 4) Soit (D) la droite d'équation $y = 1$.
 Montrer que (D') image de (D) par φ est contenue dans un cercle fixe. (0,75pt)
- 5) On considère la courbe (Γ) de la fonction g de la partie A, définie paramétriquement par :

$$\begin{cases} x = t \\ y = \frac{t}{\sqrt{t^2 - 1}} \end{cases}, t \in E.$$

 Démontrer que (Γ') image de (Γ) par φ est contenue dans le cercle de centre O et de rayon 1. (0,75pt)