

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Cette épreuve comporte deux (2) pages

(Les calculatrices ne sont pas autorisées)

Exercice I (4 points)Soit α un réel tel que $\alpha \in [0; \pi]$.1) On considère dans $\mathbb{C}$, le polynôme $p(z) = z^3 + (-1 + 2 \sin \alpha)z^2 + (1 - 2 \sin \alpha)z - 1$.a) Déterminer les réels a et b tels que $p(z) = (z - 1)(z^2 + az + b)$. (0,5 point)b) Résoudre $p(z) = 0$. (0,75 point)2) Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A , B et C d'affixes respectives $z_A = 1$, $z_B = -\sin \alpha + i \cos \alpha$ et $z_C = -\sin \alpha - i \cos \alpha$.a) Ecrire z_A , z_B et z_C sous forme trigonométrique. (1,25 point)b) Ecrire sous forme exponentielle $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$. (0,75 point)c) En déduire la nature du triangle ABC . (0,25 point)d) Déterminer α pour que le triangle ABC soit équilatéral. (0,5 point)**Exercice 2 (4 points)**On considère dans le plan orienté un carré $ABCD$ de centre O tel que $(\vec{AB}, \vec{AD}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$.On appelle r_A la rotation de centre A qui transforme B en D et r_B la rotation de centre B qui transforme C en A .Pour tout point M du plan, on nomme M_1 et M_2 les points définis par : $M_1 = r_A(M)$ et $M_2 = r_B^{-1}(M)$.1) On pose $f = r_A \circ r_B$.a) Déterminer l'angle des rotations r_A et r_B . (0,5 point)b) Déterminer $f(C)$. Caractériser la transformation f . (0,5 + 0,5 point)c) Montrer que pour tout point M du plan, le milieu du segment $[M_1 M_2]$ est indépendant du point M . (0,5 point)2) a) En considérant le triangle AMM_1 , déterminer une mesure à $k\pi$ près ($k \in \mathbb{Z}$) de l'angle $(\vec{MM_1}, \vec{MA})$. (0,5 point)b) Montrer que pour tout point M du plan distinct A et B on a l'égalité : $(\vec{MM_1}, \vec{MM_2}) = (\vec{MA}, \vec{MB}) + \frac{\pi}{2} [\pi]$. (1 point)c) En déduire l'ensemble des points M du plan tels que M , M_1 et M_2 soient alignés. (0,5 point)

Problème (12 points)**Partie A : (6,5 points)**

Soit k un réel non nul, f_k la fonction de variable réelle définie par :

$$\begin{cases} f_k(x) = x \ln(kx) \text{ pour } x \neq 0 \\ f_k(0) = 0 \end{cases}.$$

On désigne par (C_k) la courbe représentative de f_k dans le plan P muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On suppose que $k > 0$ dans les questions 1) et 2).

1) a) Etudier la continuité de f en 0. (0,5 point)

b) Etudier la dérivabilité de f en 0. (0,5 point)

Interpréter graphiquement le résultat obtenu. (0,25 point)

2) a) Etudier les variations de f_k puis dresser son tableau de variation. (2,25 point)

b) Montrer que (C_k) est l'image de (C_1) par l'homothétie du centre O et de rapport $\frac{1}{k}$. (1 point)

c) Tracer (C_1) puis déduire (C_2) . (0,5 + 0,5 point)

3) On désigne par S_k , le point de (C_k) où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses, déterminer l'ensemble des points S_k lorsque $k \in \mathbb{R}^*$. (1 point)

Partie B (3,5 points)

On pose $I_k(\lambda) = \int_{\lambda}^{\frac{1}{e}} f_k(x) dx$, $k \in \mathbb{N}^*$, $0 < \lambda < \frac{1}{e}$.

1) Justifier que $I_k(\lambda)$ est bien définie. (0,5 point)

2) a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $I_1(\lambda)$. (0,5 point)

b) Déterminer l'aire $A(\lambda)$ du domaine D de l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $\lambda \leq x \leq \frac{1}{e}$ et $f_1(x) \leq y \leq -x$ puis calculer $\lim_{\lambda \rightarrow 0} A(\lambda)$. (0,75 point)

c) Interpréter graphiquement $\lim_{\lambda \rightarrow 0} A(\lambda)$. (0,25 point)

3) Soit D_k , l'aire du domaine délimité par les courbes (C_k) , (C_1) , l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = \frac{1}{e}$.

a) Exprimer $I_k(\lambda)$ en fonction de λ . (0,5 point)

b) Déduire l'aire du domaine D_k suivant les valeurs de k . (1 point)

Partie C : (2 points)

Soit k , un réel strictement positif donné. On désigne par T_k l'application de P dans P qui à tout point M de coordonnées (x, y) associe le point M' de coordonnées (x', y') telles que :

$$\begin{cases} x' = kx \\ y' = kx \ln k + ky \end{cases}$$

1) Démontrer que T_k est une application bijective. (1 point)

2) On note $C'_k = C_k - \{O\}$

Montrer que toute courbe C'_k est globalement invariante par la transformation T_k . (1 point)

Fin