

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE	BACCALAUREAT 2024 MATHEMATIQUES	DUREE : 4 H Coef. : 5 (C)
OFFICE DU BACCALAUREAT	SERIES C&E	Coef. : 4 (E)

Exercice 1 : 4,25pts

SESSION NORMALE

1) Soit (π) un plan de l'espace $(\mathcal{E})$. Démontrer que toute réflexion de plan (π) notée S_π est une isométrie.

(0,75pt)

2) Soit ABCDEFGH un cube ; I le centre du carré ABCD et J celui de EFGH ; K est un point tel que $\vec{AK} = \frac{1}{3}\vec{AH}$. On munit l'espace $(\mathcal{E})$ du repère $(A; \vec{AB}; \vec{AD}; \vec{AE})$.

a) Démontrer que le cube ABCDEFGH est globalement invariant par le demi-tour d'axe (IJ).

(0,5pt)

b) Déterminer les coordonnées des points I ; J et K dans le repère $(A; \vec{AB}; \vec{AD}; \vec{AE})$.

(0,75pt)

c) Justifier que I ; J et K définissent un plan noté (π_1) . Déterminer l'équation de (π_1) .

(0,5pt)

3) S_2 est le demi-tour d'axe (IJ). S_{π_1} la réflexion de plan (π_1) . Déterminer les expressions analytiques de S_2 et de S_{π_1} .

(0,5pt+0,5pt)

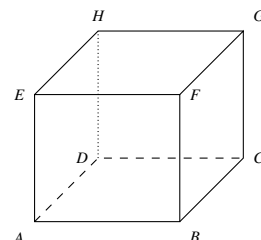
4) Démontrer que $S_2 \circ S_{\pi_1}$ a pour expression analytique :

$$\begin{cases} x' = -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + \frac{6}{5} \\ y' = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + \frac{2}{5} \\ z' = z \end{cases}$$

(0,25pt)

5) Calculer les coordonnées du point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (DF).

(0,5pt)



Exercice2 : 5,25pts

Le plan euclidien (E) est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Pour tout nombre réel α , on désigne par S_α , l'application de (E) dans (E) qui, à tout point M(x, y), associe le point M'(x', y')

$$\text{telle que : } \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \alpha y \\ y' = \alpha x + \frac{1}{2}y + 1 \end{cases}$$

1.a) Démontrer que S_α est une similitude plane directe.

(0,25pt)

b) Pour tout point A de (E) de coordonnées (p, q) on désigne par E_A l'ensemble des images du point A par les applications S_α . Quelle est la nature de E_A ? Donner une construction géométrique simple de E_A à partir des points O et A.

(0,75pt)

c) Soit (F), l'ensemble des points A tels que A appartienne à E_A .

Déterminer une équation cartésienne de (F) puis représenter (F).

(0,5pt)

d) Montrer que toute application S_α admet un point invariant, et un seul, ω_α . Quel est l'ensemble des points ω_α , lorsque α décrit $\mathbb{R}$?

(0,5pt)

2) Soit (L) la droite d'équation $x = 2$ et (L') la droite d'équation $y = x - 1$.

a) Montrer qu'il existe un réel β , et un seul, tel que l'image de (L) par s_β soit (L'). Quels sont le rapport, l'angle et le centre ω_β de cette similitude s_β ?

(0,75pt)

b) Soit (H) l'ensemble des points M de (E) tels que, $d(M, O) = \sqrt{2}d(M, (L))$. Quelle est la nature de (H) ? Déterminer une équation cartésienne de (H). Tracer (H).

(1pt)

c) Soit (H') l'image de (H) par s_β . Montrer que (H') est une conique de centre K(2, -1). Indiquer ses sommets, ses foyers et ses asymptotes. Montrer qu'elle passe par O. Tracer (H').

(1,5pts)

Problème : 10,5 pts**Partie A**

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x \ln x}{x+1} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0. (0,5pt)

2) Soit φ la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $\varphi(x) = \ln x + x + 1$.

a) Etudier les variations de φ . (0,75pt)

b) Montrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution β et une seule dans $]0, +\infty[$.

Vérifier que $0,27 \leq \beta \leq 0,28$. (0,75pt)

c) Pour tout $x > 0$, exprimer $f'(x)$ à l'aide de $\varphi(x)$. En déduire les variations de f . (1pt)

3) Déterminer la limite de $\ln x - f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. Interpréter graphiquement. le résultat obtenu. (0,5pt)

4) Construire les courbes représentatives (C) de f et (Γ) de $x \mapsto \ln x$ dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (unité graphique 4 cm). (0,75pt)

Partie B

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = e^{1+\frac{1}{x}}$.

1) Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution α et une seule dans $]\beta, +\infty[$ et que $3,5 \leq \alpha \leq 3,7$. (0,5pt)

2.a) Prouver que l'équation $f(x) = 1$ équivaut à l'équation $g(x) = x$. (0,25pt)

b) Etudier le sens de variation de g . (0,5pt)

c) Prouver que pour tout élément x de $[3,5; 3,7]$, $g(x) \in [3,5; 3,7]$. (0,25pt)

d. Prouver que pour tout élément x de $[3,5; 3,7]$, $|g'(x)| \leq |g'(3,5)| \leq \frac{1}{3}$.

En déduire que $|g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{3}|x - \alpha|$. (0,75pt)

3) Soit (U_n) la suite d'éléments de $[3,5; 3,7]$ définie par la relation de récurrence $U_{n+1} = g(U_n)$ et la condition initiale $U_0 = 3,5$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{5} \times \frac{1}{3^n}$. En déduire la limite de (U_n) . (0,75pt)

b) Donner une valeur approchée de α à 10^{-3} près. (0,25pt)

Partie C

On se propose d'étudier l'équation $f(x) = n$ où n est un entier naturel non nul.

1) Montrer que, pour tout n , cette équation admet une solution α_n et une seule dans $]\beta; +\infty[$. (0,25pt)

2.a) Etablir que $f(e^n) \leq n$. En déduire que $\alpha_n \geq e^n$. (0,5pt)

b) Prouver que la relation $f(\alpha_n) = n$ peut s'écrire sous la forme $\ln\left(\frac{\alpha_n}{e^n}\right) = \frac{n}{\alpha_n}$ (1). (0,25pt)

c) En déduire à l'aide de la question a) la limite de $\frac{\alpha_n}{e^n}$ lorsque n tend vers l'infini. (0,25pt)

3) On écrit α_n sous la forme $\alpha_n = e^n(1 + \varepsilon_n)$, où $\varepsilon_n \geq 0$ (2) .

a) A l'aide de (1) exprimer $(1 + \varepsilon_n) \ln(1 + \varepsilon_n)$ en fonction de n . (0,25pt)

b) Etablir que pour tout $t \geq 0$, $0 \leq (1+t) \ln(1+t) - t \leq \frac{t^2}{2}$. (0,5pt)

c) Déduire des questions a) et b) que pour tout $n \geq 1$, $\varepsilon_n \leq ne^{-n} \leq \varepsilon_n + \frac{\varepsilon_n^2}{2}$ puis que

$0 \leq ne^{-n} - \varepsilon_n \leq \frac{n^2}{2}e^{-2n}$ (3). (0,5pt)

d) A l'aide de (2) et (3) déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (e^n + n - \alpha_n)$. (0,5pt)