

BACCALAURÉAT
SESSION 2020

Coefficient : 5
Durée : 4 h

MATHÉMATIQUES

SÉRIE C

Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.

Chaque candidat recevra deux (02) feuilles de papier millimétré.

Tout modèle de calculatrice scientifique est autorisé.

Les tables trigonométriques, logarithmiques et les règles à calculs sont également autorisées.

EXERCICE 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. L'unité graphique est 2 cm.

On donne les points A, B et C d'affixes respectives a , b et c telles que :

$$a = 2 - 2i, b = 2 + 2i \text{ et } c = -2 + 2i.$$

1. a) Place les points A, B et C dans le plan muni du repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.
b) Démontre que le triangle ABC est rectangle et isocèle.
c) Écris sous forme exponentielle, chacun des nombres complexes a , b et c .
2. Soit r la rotation de centre O telle que $r(A) = B$ et (Γ) le cercle de centre Ω d'affixe 2 et de rayon 2.
a) Détermine l'application complexe associée à la rotation r .
b) Dédus de ce qui précède $r(B)$.
c) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de l'image (Γ') de (Γ) par r .
d) Construis (Γ) et (Γ') sur la même figure.
3. Soit α un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0 ; 2\pi[$, tel que : $\alpha \neq \pi$. On note M le point d'affixe z telle que $z = 2 + 2ie^{i\alpha}$ et M' l'image de M par r . On note z' l'affixe de M'.
a) Démontre que M est un point de (Γ) .
b) Démontre que : $z' = 2i - 2e^{i\alpha}$.
c) On note u et v les affixes respectives des vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BM'}$.
Exprime u et v en fonction de α .
4. a) Démontre que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, e^{2ix} + 1 = 2e^{ix} \cos x \quad \text{et} \quad e^{2ix} - 1 = 2ie^{ix} \sin x.$$

b) Démontre que : $\frac{u}{v} = \tan \frac{\alpha}{2}$.
c) Dédus de ce qui précède que les points M, M' et B sont alignés.
5. On donne : $\alpha = \frac{\pi}{3}$.
a) Détermine sous forme algébrique l'affixe du point M.
b) Construis les points M et $r(M)$.

EXERCICE 2

Le sujet du concours d'entrée dans une grande école est noté sur 20 points. Il comporte 5 questions à choix multiples. Pour un candidat donné, on attribue quatre (4) points à chaque réponse juste et zéro (0) point à chaque question non traitée ou à réponse fausse.

On admet que lorsqu'un candidat répond au hasard à une question, la probabilité de donner une réponse juste est $\frac{1}{4}$.

1. Soit k le nombre exact de réponses justes données par un candidat à ce concours. Exprime en fonction de k la note globale N de ce candidat.
2. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de réponses justes obtenues par un candidat qui a répondu au hasard à chacune des cinq questions.
 - a) Détermine les valeurs prises par X .
 - b) Démontre que : $P(X = 3) = \frac{45}{512}$.
 - c) Justifie que la probabilité pour que le candidat ait une note globale supérieure à 10 est : $\frac{53}{512}$.
3. On suppose qu'à ce concours, n candidats ont répondu au hasard aux cinq questions. On admet que lorsqu'un des n candidats répond au hasard à une question, la probabilité de donner une réponse juste est $\frac{1}{4}$.
 - a) Justifie que la probabilité P_n qu'au moins un des n candidats ait une note globale supérieure à 10 est : $1 - \left(\frac{459}{512}\right)^n$.
 - b) Détermine la valeur minimale de n pour que : $P_n \geq 0,99$.

PROBLÈME

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . L'unité graphique est 2 cm.

Soient n un entier naturel non nul et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = (1-x)^n e^{\frac{x}{2}}$.

On désigne par (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J) .

Le but de ce problème est de calculer la limite de la suite (S_n) définie par :

$$S_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 f_n(x) dx.$$

Partie A : Étude de la fonction f_1 et d'une fonction associée.

1. a) Calcule : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_1(x)}{x}$.
b) Interprète graphiquement les résultats précédents.
2. a) Calcule la limite de f_1 en $-\infty$.
b) Interprète graphiquement le résultat précédent.

3. On suppose que f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$.
 - a) Démontre que f_1 est strictement croissante sur $] - \infty ; - 1[$ et strictement décroissante sur $] - 1 ; +\infty[$.
 - b) Dresse le tableau de variations de f_1 .
 - c) Trace dans le repère (O, I, J) , la courbe (C_1) et sa tangente à l'origine.

Partie B : Etude de la fonction f_n .

1.
 - a) Détermine, suivant la parité de n , la limite de f_n en $+\infty$.
 - b) Détermine, suivant la parité de n , $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{x}$.
 - c) Interprète graphiquement les résultats précédents.
2.
 - a) Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$ (On pourra poser : $X = 1-x$).
 - b) Interprète graphiquement le résultat précédent.
3. On suppose que pour tout entier naturel n non nul, f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$.
 - a) Démontre que : $\forall x \in \mathbb{R}, f_n'(x) = \frac{1}{2} (-x - 2n + 1) (1-x)^{n-1} e^{\frac{x}{2}}$.
 - b) Étudie, suivant la parité de n , le signe de $f_n'(x)$.
 - c) Dresse, suivant la parité de n , le tableau de variation de f_n .
4.
 - a) Résous dans $\mathbb{R}$, l'équation : $f_n(x) = f_{n+1}(x)$.
 - b) Dédus de ce qui précède que toutes les courbes (C_n) passent par deux points fixes que l'on précisera.
 - c) Étudie, suivant la parité de n , les positions relatives des courbes (C_n) et (C_{n+1}) .
 - d) Trace la courbe (C_2) dans le repère (O, I, J) .

Partie C : Calcul de la limite de la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $S_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 f_n(x) dx$.

1. Justifie que la fonction f_n est décroissante sur $[0 ; 1]$.
2. Démontre que : $\forall x \in [0 ; 1], f_n(x) \in [0 ; 1]$.
3. Dédus de ce qui précède que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq S_n \leq \frac{1}{n}$.
4. Détermine $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.