

BACCALAURÉAT
SESSION 2024

Durée : 4 H
Coefficient : 5

MATHÉMATIQUES

SÉRIE C

Cette épreuve comporte 3 pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.

Toute calculatrice scientifique est autorisée.

Chaque candidat recevra deux (02) feuilles de papier millimétré

EXERCICE 1 (2 points)

Écris le numéro de chacune des propositions ci-dessous suivi de V si la proposition est vraie ou de F si elle est fausse.

1. Soit (Δ) une droite et $\vec{u}$ un vecteur non nul. On note $S_{(\Delta)}$ la symétrie orthogonale d'axe (Δ) et $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$. Si $\vec{u}$ est normal à (Δ) , alors la composée $S_{(\Delta)} \circ t_{\vec{u}}$ est une symétrie glissée.
2. Soit (X, Y) une série statistique à deux variables. Une équation de la droite de régression de X en Y par la méthode des moindres carrés est :

$$x = \frac{\text{cov}(X,Y)}{V(X)} (y - \bar{Y}) + \bar{X}.$$

3. Toute similitude directe du plan de rapport 1 est une isométrie du plan.
4. La suite géométrique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = -2\left(\frac{3}{5}\right)^n$ est divergente.

EXERCICE 2 (2 points)

Écris le numéro de chacun des énoncés ci-dessous suivi de l'une des lettres A, B, C ou D qui permet d'obtenir la proposition vraie.

1. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' + 2y = 0$ sont les fonctions :

A. $x \mapsto 2x + k, k \in \mathbb{R}$;	B. $x \mapsto ke^{2x}, k \in \mathbb{R}$;
C. $x \mapsto ke^{-2x}, k \in \mathbb{R}$;	D. $x \mapsto k(e^{2x} + e^{-2x}), k \in \mathbb{R}$.
2. L'ensemble de définition de la fonction h de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $h(x) = \ln(\ln(-x))$ est :
A. $] -\infty ; -1[$; **B.** $] -\infty ; 0[$; **C.** $] -1 ; 0[$; **D.** $] 1 ; +\infty[$.
3. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, les coordonnées du foyer de la parabole d'équation $y^2 - 2y + 4x + 5 = 0$ sont :
A. $(-2; 1)$; **B.** $(2; -1)$; **C.** $(-1; 0)$; **D.** $(-2; -1)$.

4. L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Si un plan (P) a pour équation cartésienne $y = x - 1$ et une droite (Δ) a pour représentation

$$\text{paramétrique } \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2t \\ z = -t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}), \text{ alors le plan (P) et la droite } (\Delta) \text{ sont :}$$

- A. orthogonaux ; ; B. parallèles ;
C. sécants au point $E(2; 1; -\frac{1}{2})$; D. sécants au point $F(2; 1; \frac{1}{2})$.

EXERCICE 3 (3 points)

Un grossiste achète des pagnes basin chez deux fournisseurs A et B. Il achète 80% de sa provision chez le fournisseur A et le reste chez le fournisseur B. On sait que 10% des pagnes basin provenant du fournisseur A présentent des défauts. Par ailleurs, 11% des pagnes basin du stock total du grossiste présentent des défauts.

On prélève au hasard un pagne basin du stock du grossiste et on considère les évènements suivants :

A : « le pagne basin provient du fournisseur A » ;

B : « le pagne basin provient du fournisseur B » ;

D : « le pagne basin présente des défauts ».

1. Traduis la situation décrite par l'énoncé à l'aide d'un arbre de probabilité.

(Tu le complèteras par la suite.)

2. a) Calcule la probabilité pour que le pagne basin provienne du fournisseur A et présente des défauts.

b) Démontre que la probabilité de $B \cap D$ est égale à 0,03.

c) On prélève au hasard un pagne basin provenant du fournisseur B.

Détermine la probabilité pour qu'il présente des défauts.

d) Complète l'arbre de probabilité de la question 1.

3. Un gérant de magasin de vente de pagnes basin achète cent pagnes chez ce grossiste. On suppose que les pagnes basin sont choisis au hasard l'un après l'autre de façon indépendante. On désigne par X la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de pagnes basin avec des défauts.

a) Justifie que X suit une loi binomiale dont tu préciseras les paramètres.

b) Calcule l'espérance mathématique $E(X)$ de X, puis interprète le résultat obtenu.

EXERCICE 4 (4 points)

1. a) Justifie que : $(4 - 2i)^2 = 12 - 16i$.

b) Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^2 - (2 + 6i)z - 11 + 10i = 0$.

2. On considère dans $\mathbb{C}$ le polynôme P tel que : $P(z) = z^3 + (1 - 6i)z^2 - (17 + 8i)z - 33 + 30i$.

a) Calcule $P(-3)$.

b) Justifie que : $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = (z + 3)[z^2 - (2 + 6i)z - 11 + 10i]$.

c) Déduis-en les solutions de l'équation : $z \in \mathbb{C}, P(z) = 0$.

3. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. (Unité graphique : 1 cm)

On considère les points A ; B et C d'affixes respectives -3 ; $-1 + 4i$ et $3 + 2i$.

a) Place les points A, B et C.

b) Justifie que ABC est un triangle rectangle isocèle en B.

c) Soit D le point d'affixe $1 - 2i$.

Démontre que les points A, B, C et D sont cocycliques.

4. Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan tel que : $-MA^2 + MB^2 + MC^2 = -20$.
Soit G le barycentre des points pondérés (A, -1) ; (B, 1) et (C, 1).
a) Détermine l'affixe z_G du point G, puis place ce point.
b) Justifie que le point C appartient à (Γ) .
c) Détermine et construis (Γ) .

EXERCICE 5 (4 points)

Soit la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = e^{\sqrt{x}}$.

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 2 cm.

Partie I

1. a) Calcule : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.
b) Donne une interprétation graphique des résultats précédents.
2. a) Étudie la dérivabilité de f en 0.
b) Interprète graphiquement le résultat de la question 2. a).
3. On suppose que la fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$.
a) Justifie que : $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}}{2x}$.
b) Dresse le tableau de variation de f .
4. Construis la courbe $(\mathcal{C})$.

Partie II

Soit g et h deux fonctions définies sur $[0; +\infty[$ par : $g(x) = x^2$ et $h(x) = \int_0^x e^{\sqrt{t}} dt$.

On désigne par ψ la fonction dérivable sur $[0; +\infty[$ et définie par : $\psi(x) = (h \circ g)(x)$.

1. a) Calcule $\psi(0)$.
b) Justifie que : $\forall x \in [0; +\infty[, \psi'(x) = 2xe^x$.
c) Dédus des questions 1. a) et 1. b) que : $\forall x \in [0; +\infty[, \psi(x) = 2(x-1)e^x + 2$.
2. On pose : $M = \int_0^1 e^{\sqrt{t}} dt$.
a) Calcule $\psi(1)$ puis déduis-en la valeur de M.
b) Dédus de tout ce qui précède l'aire $\mathcal{A}$, en cm^2 , de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation : $x = 1$.

EXERCICE 6 (5 points)

À l'occasion de ton anniversaire, ta maman t'a permis d'inviter dans un restaurant des élèves de ta classe. Les invités avaient la possibilité de choisir deux types de kits : un kit comprenant des frites de pomme de terre et un kit comprenant de l'alloco. Le kit contenant des frites coûte 4 500 F et celui contenant de l'alloco coûte 2 400 F.

À la fin de la cérémonie, tu donnes à ta maman une facture de 90 300 F. Par curiosité, elle te demande de déterminer le nombre de kits de chaque sorte choisie par les invités au cours de cette cérémonie.

Tu te souviens seulement que les invités ont choisi plus de 10 kits de chaque sorte.

En utilisant tes connaissances mathématiques, réponds à la préoccupation de ta maman.