

Bac Congo-Brazzaville 2022

Mathématiques Série C

Durée : 4 heures
Coefficient : 5

Calculatrice non programmable autorisée

Exercice 1 (4 points)

On considère l'ensemble (S) des couples (x, y) d'entiers relatifs tels que : $\begin{cases} x = 12 + 3t \\ y = 37 - 7t \end{cases}$, où t est entier relatif.

- 1) Vérifier que, pour tout couple (x, y) de (S) , on a $7x + 3y = 195$ (E).
- 2) Soit $d = PGCD(x, y)$. Il existe alors deux entiers x' et y' premiers entre eux, tels que $x = dx'$ et $y = dy'$. Justifier que d divise 195.
- 3) Déterminer l'ensemble des diviseurs positifs de 195.
- 4) Trouver l'ensemble des couples (x, y) de (S) tels que $0 \leq y \leq 37$.
- 5) En déduire le couple (x_0, y_0) pour lequel $d = 3$.

Exercice 2 (8 points)

Dans le plan orienté (P) , on considère un triangle ABC équilatéral direct, de centre de gravité G . I est le symétrique de C par rapport à O , où O est le milieu de $[AB]$. J est le symétrique de G par rapport à O et K le milieu de $[BC]$.

Pour la figure, on prendra $[BC]$ horizontalement tels que **BC=5cm**.

- 1) Faire une figure, que l'on complètera au fur et à mesure.
- 2) Construire l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que $(\overrightarrow{MO}; \overrightarrow{MC}) = -\frac{2\pi}{3} [2\pi]$.
- 3) Soit (C) le cercle de diamètre $[IG]$. Montrer que (C) est l'ensemble des points M du plan tels que $MC = 2MO$.
- 4) Soit h l'application ponctuelle qui à tout point M du plan associe le point M' tels que : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.
 - a) Démontrer que $\overrightarrow{GM'} = -2\overrightarrow{GM}$.
 - b) En déduire la nature de l'application h .
- 5) Soit $f = r\left(C; \frac{\pi}{3}\right) \circ h(G; -2)$.
 - a) Déterminer $f(O)$.
 - b) Montrer que f est une similitude plane directe d'angle de mesure $\frac{-2\pi}{3}$ et dont on précisera le rapport.

c) Déduire des questions 2) et 3) une construction du centre Ω de f .

6) Soit D le point du plan tel que $ABCD$ soit un losange. On considère la transformation du plan (P) telle que $g = S_{(BC)} \circ t_{\overrightarrow{CA}}$.

a) Montrer que g est une symétrie glissée.

b) Sachant que $g(C) = D$ et $g(D) = B$ et utilisant $(g \circ g)(C)$, déterminer le vecteur $\overrightarrow{u}$ de g puis déduire son axe (Δ).

7) La parallèle à la droite (BC) passant par J coupe la médiatrice du segment $[CJ]$ en un point M_0 . Soit (p) la parabole de foyer C et de directrice la droite (BJ) .

a) Montrer que M_0 est un point de (p).

b) Soit N le symétrique de K par rapport à C et (Δ') la droite passant par N et perpendiculaire à (BC) . Construire les points M_1 et M_2 de (p) situés sur (Δ').

On désignera par M_1 celui situé dans le demi-plan de frontière (BC) contenant le point A .

c) Ach  ver la construction de (p).

Exercice 3 (5 points)

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^x(1-x)-1$ et la fonction f telle que :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{e^x - 1} + 2 & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 3 \end{cases}$$

On admet que f est dérivable en 0 et $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

1-a) Montrer que pour $x \neq 0$, $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - 1)^2}$.

b) Sachant que $g(x)$ est négative sur $\mathbb{R}$, déduire le signe de $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2) Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = f(x) - x$.

a) Montrer que, pour tout réel x , $h'(x) < 0$.

b) En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]2; 2,5[$.

3) Montrer que, pour tout $x \in]2; 2,5[$; $-0,5 \leq f'(x) < 0$ sachant que $-g(x) \leq 20$ et $\frac{1}{(e^x - 1)^2} \leq \frac{1}{40}$.

4) Soit la suite (u_n) , n un entier naturel, définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

a) Montrer que si $u_n \in [2; 2,5]$, $u_{n+1} \in [2; 2,5]$.

b) En remarquant que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - \alpha = f(u_n) - f(\alpha)$, montrer que : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

c) Montrer que, pour tout entier naturel n , $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \times |u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

d) En déduire que la suite (u_n) converge vers α .

e) En déduire un entier naturel n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait $|u_n - \alpha| \leq 10^{-3}$.

Exercice 4 (3 points)

En prévision du lancement d'un nouveau produit, une société a effectué une enquête auprès de clients éventuels pour fixer le prix de vente (en milliers de francs) de ce produit. Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous :

Prix de vente en milliers de francs (x_i)	9	10	11	12	14	15	16	17
Nombre d'acheteurs potentiels (y_i)	180	160	150	130	100	90	80	70

On a effectué un ajustement linéaire par la méthode des moindres carrés et on a obtenu la droite de régression (D) de y en x telle que : (D) $y = -13,83x + 299,83$.

1) On donne $\bar{x} = 13$ et $\bar{y} = 120$.

Calculer la variance de x . En déduire la covariance de x et y .

2) On veut déterminer l'équation de la droite de régression de x en y .

On donne $(D') : x = a'y + b'$ et $V(y) = 1450$. Déterminer a' puis en déduire la valeur de b' .

3) En utilisant l'équation de la droite (D') de x en y , estimer le prix de vente si le nombre d'acheteurs potentiels est de 250 .

4) Déterminer l'inertie par rapport au point moyen G .