

UNION DES COMORES		Examen : Baccalauréat					
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE		Session : 2022					
Epreuve : Mathématiques	Série :	A1	A2	A4	C	Nbr pages :	2
	Coef. :				5	Durée :	4

Exercice 1 : (3,5pts)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$:

On considère les points $A(1; 4; 1)$; $B(-1; 5; 2)$ et $C(3; -2; 5)$.

1- a) Démontrer que les points A , B et C déterminent un plan (P)

b) Montrer qu'une équation cartésienne du plan (P) est : $x + y + z - 6 = 0$.

2- On considère les plans (Q) et (R) d'équations respectives : $2x - y + z - 3 = 0$ et $-x + 2y + 3z - 12 = 0$

a) Démontrer que les plans (Q) et (R) se coupent suivant une droite (D) de vecteur directeur $\vec{u}(-5; -7; 3)$

b) Montrer que $E(1; 2; 3)$ est un point de la droite (D) .

c) En déduire une représentation paramétrique de la droite (D) .

d) Déterminer les coordonnées du point d'intersection du plan (P) et de la droite (D) .

e) Justifier que les plans (P) ; (Q) et (R) sont concourants en un seul point que l'on précisera ses coordonnées.

Exercice 2 : (4,5pts)

On considère l'équation d'inconnue le nombre complexe z ; $(E_0): z^2 - (6 \cos \alpha)z + 4 + 5(\cos \alpha)^2 = 0$ avec $\alpha \in [0; 2\pi]$.

1- a) Justifier que le discriminant de l'équation (E_0) est : $\Delta = (4i \sin \alpha)^2$.

b) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes; l'équation (E_0) .

On note M_1 et M_2 les points images d'affixes respectives : $z_1 = 3 \cos \alpha + 2i \sin \alpha$ et $z_2 = 3 \cos \alpha - 2i \sin \alpha$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

c) Démontrer que les points M_1 et M_2 appartiennent à la courbe (E) d'équation réduite : $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

d) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la courbe (E) (centre; Sommets; foyers et directrices)

2- Soit h l'homothétie de centre O et de rapport $\sqrt{2}$ et r la rotation de centre O et d'angle de mesure $\frac{\pi}{4}$.

On pose : $f = r \circ h$.

a) Justifier que f est une similitude plane directe.

b) Donner les éléments caractéristiques de f .

c) Montrer que f a pour écriture complexe : $z' = (1 + i)z$.

d) Déterminer les images des sommets de l'ellipse (E) par f .

e) Tracer (E) et (E') image de (E) par f dans le même repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

Exercice 3 : (4pts)

On considère l'équation $(E) : 7x - 4y = 5$ où les inconnues x et y sont des entiers relatifs.

1- a) Justifier que 7 et 4 sont premiers entre eux

b) Vérifier que $(-5; -10)$ est une solution particulière de (E) .

c) Montrer que les solutions de (E) sont les couples $(x; y)$ tels que : $x = 4k - 5$ et $y = 7k - 10$ ($k \in \mathbb{Z}$).

2- On considère le système (S) défini par $(S): \begin{cases} n \equiv 2[7] \\ n \equiv 7[4] \end{cases} \quad (n \in \mathbb{Z})$.

a) Montrer que si n est une solution du système (S) alors il existe un couple $(u; v)$ d'entiers relatifs solution de l'équation (E) .

b) Justifier dans ce cas que $n \equiv 23[28]$.

3- Soit k un entier relatif.

a) Déterminer le reste de la division euclidienne de 5^{6k} par 28.

b) Montrer que 303 est une solution du système (S) puis en déduire que $303^6 \equiv 1[28]$.

c) Déterminer l'ensemble des entiers naturels p tels que $303^p - 1$ soit divisible par 28.

Problème : (8pts)

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul.

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g_n(x) = n(x+2) + e^{x+1}$.

1-a) Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition de la fonction g_n .

b) Etudier le sens de variation de g_n puis dresser le tableau de variation de g_n .

2-a) Montrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une solution unique α_n .

b) Vérifier que $-3 \leq \alpha_n \leq -2 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

c) En déduire le signe de $g_n(x)$ suivant les valeurs de x .

3-a) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad g_{n+1}(\alpha_n) = \alpha_n + 2$; Puis en déduire son signe.

b) Justifier que la suite (α_n) est croissante.

c) En déduire qu'elle converge vers un réel l .

d) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \alpha_n = -\frac{e^{\alpha_n+1}}{n} - 2$; puis préciser la valeur de l .

Partie B : Etude d'une fonction f_n .

Soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = \frac{x+1}{1+ne^{-x-1}}$. On désigne par (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1- Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat.

2-a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$

b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est une asymptote oblique à la courbe (C_n) en $+\infty$.

c) Etudier la position relative de (C_n) par rapport à la droite (D) .

3-a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f'_n(x) = \frac{e^{-x-1}[g_n(x)]}{(1+ne^{-x-1})^2}$.

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*; f_n(\alpha_n) = \alpha_n + 2$.

c) Dresser le tableau de variation de f_n .

4-a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}; f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{(-x-1)e^{-x-1}}{[1+(n+1)e^{-x-1}](1+ne^{-x-1})}$.

b) Justifier que : $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ et $-x-1$ ont le même signe sur $\mathbb{R}$.

c) Etudier la position des courbes (C_{n+1}) et (C_n) .

5- Construire les courbes (C_1) et (C_2) . (On prendra $\alpha_1 \approx -2,25$ et $\alpha_2 \approx -2,15$).

Partie C : Etude d'une suite intégrale

(u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = \int_{-1}^0 f_n(x) dx$.

1- En intégrant par parties; Calculer l'intégrale $I = \int_{-1}^0 (x+1)e^{x+1} dx$.

2-a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*; f_n(x) = \frac{(x+1)e^{x+1}}{n+e^{x+1}}$ puis $\forall x \in [-1; 0]; \frac{(x+1)e^{x+1}}{n+3} \leq f_n(x) \leq \frac{(x+1)e^{x+1}}{n+1}$.

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*; \frac{1}{n+3} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$.

c) Justifier la convergence de la suite (u_n) .