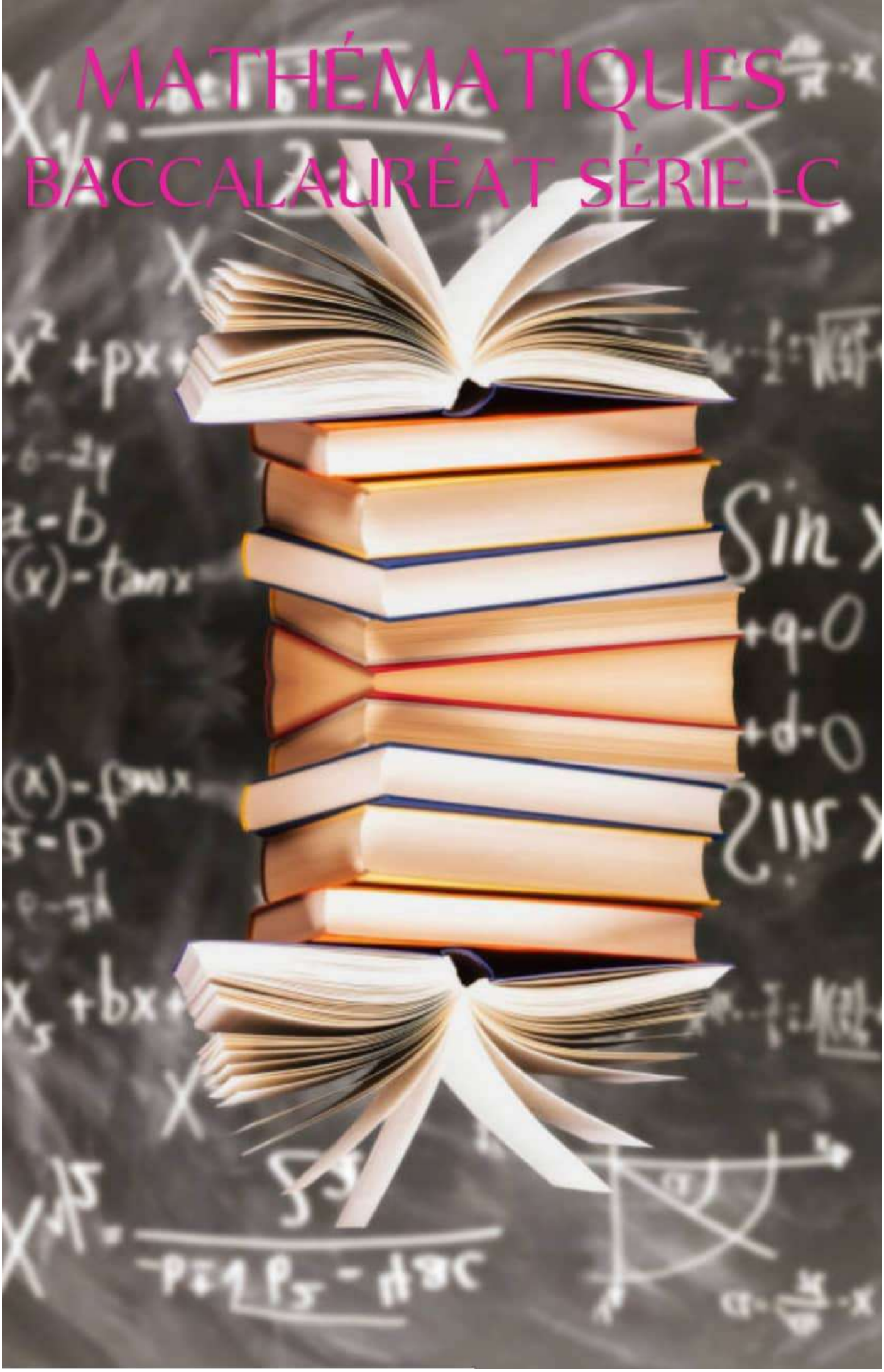
MATHÉMATIQUES

BACCALAURÉAT SÉRIE -C



Scanné avec CamScanner

REPUBLIQUE GABONAISE
DIRECTION DU BACCALAUREAT

2012 – MATHEMATIQUES
Série : C - E
Durée : 4 h
Coef. : 5

Exercice 1 (*5 points*)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé$(O\,;\,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
On considère la courbe paramétrée (C) définie par :

$$\begin{cases} x(t) = e^t - e^{-t} \\ y(t) = e^t + e^{-t} \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

et M(t) est le point de coordonnées $(x(t)\,;\,y(t))$

1. a) Démontrer, en comparant $M(-t)$ et $M(t)$, que la courbe admet un axe de symétrie.
   b) Etudier les variations des fonctions x et y sur $[0;+\infty[$
   c) Déterminer une équation de la tangente à la courbe (C) au point $A(x(0)\,;\,y(0))$
2. a) Calculer $x(t)^2 - y(t)^2$
   b) En déduire que la courbe (C) est une partie d'une conique(H).
   c) Déterminer les asymptotes, l'axe focal, les foyers et l'excentricité de (H)
3. Tracer (C) et (H) sur la même figure.

Exercice 2 (*5 points*)

Soit f une application de l'espace $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ d'expression analytique :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(-x + 2y - 2z + 2) \\ y' = \frac{1}{3}(2x + 2y + z - 1) \\ z' = \frac{1}{3}(-2x + y + 2z + 1) \end{cases}$$

1) Démontrer que l'ensemble des points invariants par f est le plan $(\mathcal{P})$ d'équation :
$2x - y + z - 1 = 0$

2) Soit $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un point de l'espace, et $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ son image par f.
   a) Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ garde une direction constante.
   Indication : On peut montrer que : $\overrightarrow{MM'} = \lambda(2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k})$ où λ est un réel.
   b) En déduire la position relative de la droite (MM') et le plan $(\mathcal{P})$.
   c) Démontrer que le milieu I du segment [MM'] appartient à $(\mathcal{P})$.
   d) Déterminer : f ∘ f (M).
   e) En déduire des questions précédentes la nature de f.
3) On considère le plan $(\mathcal{Q})$ d'équation cartésienne : $x + y - z + 2 = 0$.
   a) Justifier que les plans (P) et $(\mathcal{Q})$ sont perpendiculaires.
   b) Soit (Δ) la droite d'intersection des plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{Q})$. Déterminer une équation paramétrique de (Δ).
4) Soit s la symétrie orthogonale par rapport au plan $(\mathcal{Q})$. On pose : $g = f \circ s$.
   a) Soit $A\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Vérifier que A est un point de $(\mathcal{Q})$.
   b) Montrer que g est un demi-tour dont on précisera l'axe.

c) Déterminer les coordonnées de A', où $A' = g(A)$.

'roblème : (10 points)

n est un entier naturel non nul. On considère la famille de fonctions f_n définies sur $]0;+\infty[$ par : $f_n(x)=(x-1)^n \ln x$.

Et on note (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique : 2 cm.

Partie I : Etude d'une fonction auxiliaire

n est un entier naturel non nul. On considère la famille de fonctions g_n définies sur $]0;+\infty[$ par : $g_n(x)=n\ln x+\dfrac{x-1}{x}$.

1) Etudier les variations de la fonction g_n sur $]0;+\infty[$.
2) a) Calculer la limite de g_n en 0 et en $+\infty$.
   b) Calculer $g_n(1)$ et en déduire le signe de $g_n(x)$.
   c) Dresser le tableau de variations de g_n.

Partie II : Etude de la fonction f_n

1) Vérifier que toutes les courbes (C_n) passent par un même point dont on déterminera les coordonnées.
2) a) Justifier la dérivabilité de f_n sur $]0;+\infty[$.
   b) Soit f_n' la fonction dérivée de f_n. Déterminer $f_n'(x)$ pour $x\in]0;+\infty[$ et montrer que : $f_n'(x)=(x-1)^{n-1}g_n(x)$.
3) En utilisant la partie I et suivant la parité de n :
   a) Déterminer les variations de f_n.
   b) Déterminer la limite de f_n en 0 et en $+\infty$.
   c) Dresser le tableau de variation de f_n.
4) Construire (C_2).

Partie III : Etude d'une suite intégrale

Pour tout entier naturel n non nul, on note : $I_n=\int_1^2 f_n(x)dx$.

1) Démontrer que la suite $(I_n)_{n\in IN^*}$ est décroissante et qu'elle converge.
2) a) Démontrer que pour tout $x\in[1;2]$: $\ln x\le x$.
   Indication : On pourra étudier la fonction : $x\mapsto \ln x - x$.
   b) En déduire que pour $x\in[1;2]$ et $\forall n\in IN^*$: $f_n(x)\le x(x-1)^n\le 2(x-1)^n$.
   c) En déduire la limite de la suite (I_n).

CORRIGE DE L'EPREUVE DE MATHEMATIQUES SERIE C ET E

Exercice 1

$$(C);\begin{cases} x(t) = e^t - e^{-t} \\ y(t) = e^t + e^{-t} \end{cases} \quad (t \in IR)$$

1 .a) **Démontrons que (C) admet un axe de symétrie**

Pour tout réel $t \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} x(-t) = e^{-t} - e^t = -x(t) \\ y(-t) = e^{-t} + e^t = y(t) \end{cases}$

M(-t) et M(t) sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. Donc (C) admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

b) **Etudions les variations de x et y sur [0 ; + ∞ [**

(C) admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie, donc on peut étudier (C) sur [0 ; + ∞ [. Les fonctions x et y sont dérivables sur [0 ; + ∞ [comme sommes de fonctions dérivables et pour tout réel positif t ,

$x'(t) = e^t + e^{-t} > 0$; $y'(t) = e^t - e^{-t} \geq 0$ car *pour* $t \geq 0$; $e^t \geq e^{-t}$

Donc x et y sont strictement croissantes sur [0 ; + ∞ [.D'où le tableau de variations commun

t	0		+ ∞
x'(t)	2	+	
x(t)	0	↗	+ ∞
y'(t)		+	
y(t)	0	↗	+ ∞

c) **Déterminons une équation de la tangente à la courbe (C) en A(x(0) ;y(0))**

x'(0)=2 et y'(0) = 0 donc $\vec{u}(2; 0)$ est un vecteur directeur de la tangente en A(0 ;2). Ainsi la tangente en A a pour équation : y = 2.

2.a)Calculons $(x(t))^2 - (y(t))^2$

$(x(t))^2 - (y(t))^2 = (e^t - e^{-t})^2 - (e^t + e^{-t})^2 = -4$

b) **Déduisons-en que (C) est une partie d'une conique (H)**

$x^2 - y^2 = -4$ donc $-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1$ qui est l'équation réduite d'une hyperbole.

Or pour tout réel t , y(t) > 0 , donc (C) est une partie de (H).

c) **Déterminons les asymptotes, l'axe focal , les foyers et l'excentricité de (H).**

$a^2 = b^2$, donc l'hyperbole (H) est équilatère ; elle a pour excentricité $\sqrt{2}$, ses asymptotes sont les droites d'équations y = x et y = - x, son axe focal est l'axe des ordonnées . D'autre part $c^2 = a^2 + b^2 = 8$, d'où $c = 2\sqrt{2}$, donc les foyers de (H) sont : $F(0 ; 2\sqrt{2})$ et $F'(0 ; -2\sqrt{2})$

3. **Traçons (C) et (H)** (Voir feuille jointe 7/7)

Exercice 2

Soit f : $\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(-x + 2y - 2z + 2) \\ y' = \frac{1}{3}(2x + 2y + z - 1) \\ z' = \frac{1}{3}(-2x + y + 2z + 1) \end{cases}$

1) Démontrons que l'ensemble des points invariants est le plan (P)

$x' = x \iff -x + 2y - 2z + 2 = 3x$

$\iff -4x + 2y - 2z + 2 = 0$

$\iff 2x - y + z - 1 = 0$

$y' = y \iff 2x + 2y + z - 1 = 3y$

$\iff 2x - y + z - 1 = 0$

$z' = z \iff -2x + y + 2z + 1 = 3z$

$\iff -2x + y - z + 1 = 0$

$\iff 2x - y + z - 1 = 0$

Donc l'ensemble des points invariants par f est le plan (P) d'équation : $2x - y + z - 1 = 0$

2) a) Vérifions que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ garde une direction constante

$x' - x = \frac{1}{3}(-x + 2y - 2z + 2 - 3x)$

$= -\frac{2}{3}(2x - y + z - 1)$

$= 2(-\frac{1}{3}(2x - y + z - 1))$

$= 2\lambda$

$y' - y = \frac{1}{3}(2x + 2y + z - 1 - 3y)$

$= \frac{1}{3}(2x - y + z - 1)$

$= -\lambda$

$z' - z = \frac{1}{3}(-2x + y + 2z + 1 - 3z)$

$= -\frac{1}{3}(2x - y + z - 1) = \lambda$

On a : $\overrightarrow{MM'}(\alpha ; \beta ; \gamma)$ où $\alpha = 2\lambda ; \beta = -\lambda ; \gamma = \lambda$ avec

$\lambda = -\frac{1}{3}(2x - y + z - 1)$ donc : $\overrightarrow{MM'} = \lambda(2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k})$

b) **Déduisons-en la position relative de (MM') et (P)**

$\overrightarrow{MM'} = \lambda(2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k})$ or $\vec{n} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}$ est un vecteur normal à (P)

Donc la droite (MM') est perpendiculaire à (P)

a) **Démontrons que le milieu I de [MM '] appartient à (P)**

$2\left(\frac{x+x'}{2}\right) - \frac{y+y'}{2} + \frac{z+z'}{2} - 1 = 2(\frac{1}{6}(3x - x + 2y - 2z + 2) - \frac{1}{6}(3y + 2x + 2y + z - 1) + \frac{1}{6}(3z - 2x + y + 2z + 1) - 1$

$= \frac{1}{6}(4x + 4y - 4z + 4 - 2x - 5y - z + 1 + 3z - 2x + y + 2z + 1 - 6) = 0$

donc I appartient à (P)

d) **Déterminons** $fof(M)$

$$fof(M) = f(M') = M''$$

$x'' = \frac{1}{3}(-x' + 2y' - 2z' + 2)$

$= \frac{1}{3}[\frac{1}{3}(x - 2y + 2z - 2 + 4x + 4y + 2z - 2 + 4x - 2y - 4z - 2 + 6)]$

$= \frac{1}{9}(9x) = x$

$y'' = \frac{1}{3}(2x' + 2y' + z' - 1)$

$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}(-2x+4y-4z+4+4x+4y+2z-2-2x+y+2z+1-3)\right]$

$= \frac{1}{9}(9y) = y$

$z'' = \frac{1}{3}(-2x'+y'+2z'+1)$

$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}(2x-4y+4z-4+2x+2y+z-1-4x+2y+4z+2+3)\right]$

$= \frac{1}{9}(9z) = z$

D'où $fof(M) = M$

e) Déduisons-en la nature de f

$$\begin{cases} \overrightarrow{MM'} = \lambda\vec{n} \text{ où } \vec{n} \text{ est normal à } (P) \\ (MM') \text{ est perpendiculaire à } (P) \\ I \text{ milieu de } [MM'] \text{ appartient à } (P) \end{cases}$$

Donc f est la réflexion de plan (P)

3). Soit le plan (Q) : x + y –z + 2 = 0

a) **Justifions que (P) et (Q) sont perpendiculaires**

$\overrightarrow{n}(2;-1;1)$ est un vecteur normal à (P) et $\overrightarrow{n'}(1;1;-1)$ est un vecteur normal à (Q). Or $\vec{n}.\vec{n'} = 2-1-1 = 0$. Ces vecteurs normaux sont orthogonaux , donc (P) et (Q) sont perpendiculaires.

b) **Déterminons une représentation paramétrique de la droite (Δ)**

$\begin{cases} 2x-y+z-1=0 \\ x+y-z+2=0 \end{cases}$ d'où $x = -\frac{1}{3}$; $z = y + \frac{5}{3}$ donc une représentation paramétrique de (Δ) est

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = t \\ z = t + \frac{5}{3} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

4) On pose : g = fos

a)**Vérifions que A appartient à (Q)**

- 1 – 1 + 0 + 2 = 0 donc A ∈ (Q)

b) **Montrons que g est un demi-tour et précisons son axe**

g est la composée de deux réflexions des plans (P) et (Q), perpendiculaires et sécants suivant la droite (Δ) , donc g est le demi-tour d'axe (Δ).

c) **Déterminons les coordonnées de A'**

A ' = g(A) = fos(A) = f(A) . On obtient par calcul $A'\left(\frac{1}{3};-\frac{5}{3};\frac{2}{3}\right)$

Problème

Partie I

1) **Etudions les variations de g_n sur $]0 ; +\infty[$**

g_n est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables et pour tout réel $x > 0$ $g'_n(x) = \frac{n}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$ donc g_n est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

2)a) **Calculons les limites de g_n en 0 et en $+\infty$**

$\lim_{x\to 0} g_n(x) = \lim_{x\to 0}(\frac{1}{x}(nx\ln x + x - 1)) = -\infty$ car

$$\lim_{x\to 0}(nx\ln x + x - 1) = -1 \text{ et } \lim_{x\to 0}\frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g_n(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(n\ln x + 1 - \frac{1}{x}\right) = +\infty$$

b) **Calculons $g_n(1)$ et déduisons-en le signe de $g_n(x)$**

$g_n(1) = 0$. Or est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$, donc

pour tout $x \in]0 ; 1]$, $g_n(x) \leq 0$

pour tout $x \in [1 ; +\infty[$, $g_n(x) \geq 0$

c) **Dressons le tableau de variations de g_n**

X	0		$+\infty$
$g'_n(x)$	|	+	
$gn(x)$	|	↗	$+\infty$
	$-\infty$		

Partie II

1) **Vérifions que les courbes (C_n) passent par un même point**

Soit n un entier naturel non nul et $M(x; y)$ un point du plan. On a :

$M(x; y) \in C_n \cap C_{n+1} \Leftrightarrow x^{n+1}\ln x - x^n \ln x = 0 \Leftrightarrow (x-2)x^n \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 2.$;

Pour $= 1$, on obtient le point $I(1; 0)$;

Pour $x = 2$, on obtient le point $A(2; \ln 2)$. En conclusion, il y a deux points.

2) a) **Justifions la dérivabilité de f_n sur $]0 ; +\infty[$**

f_n est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ comme produit de fonctions dérivables

b) Déterminons $f'_n(x)$ et montrons que $f'_n(x) = (x-1)^{n-1} g_n(x)$

Pour tout reél x strictement positif, on a :

$f'_n(x) = n(x-1)^{n-1}\ln x + \frac{(x-1)^n}{x} = (x-1)^{n-1}[n\ln x + \frac{x-1}{x}] = (x-1)^{n-1} g_n(x)$

3)a)**Déterminons les variations de f_n**

* Pour n impair, on a : n-1 pair donc $(x-1)^{n-1} \geq 0$, $f_n'(x)$ a le même signe que $g_n(x)$

Sur $]0;1]$, $f'_n(x) \leq 0$ donc f_n est strictement décroissante

Sur $[1;+\infty[$, $f'_n(x) \geq 0$ donc f_n est strictement croissante

- Pour n pair, n-1 est impair , donc

pour tout $x \in]0;1]$, $(x-1)^{n-1} \leq 0$, or $g_n(x) \leq 0$ donc $f'_n(x) \geq 0$ et f_n est strictement croissante

pour tout $x \in [1;+\infty[$, $(x-1)^{n-1} \geq 0$, or $g_n(x) \geq 0$ donc $f'_n(x) \geq 0$ et f_n est strictement croissante

b) **Déterminons les limites de f_n en 0 et en $+\infty$**

$$\lim_{x\to 0} f_n(x) = \lim_{x\to 0}(x-1)^n lnx = \begin{cases} +\infty \text{ si } n \text{ est impair} \\ -\infty \text{ si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$ car $\lim_{x\to+\infty}(x-1)^n = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} lnx = +\infty$

c) **Dressons le tableau de variations de f_n**

pour n impair

x	0		1		$+\infty$
$f'n(x)$	-		0	+	
$fn(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

Pour n pair

x	0		1		$+\infty$
$f'n(x)$	+		0	+	
$fn(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

4) **Construisons (C_2)**

Tableau de variation de f_2

X	0		1		$+\infty$
$f'_2(x)$	+		0	+	
$f_2(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f_2(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x-1)^2 lnx}{x} = +\infty$$

Donc (C_2) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnée.

(Voir figure sur feuille annexe 7/7).

Partie III.

1) **Démontrons que (I_n) est décroissante et convergente**

- Pour tout $x \in [1;2]$, et pour tout entier naturel non nul n , on a :
  $(x-1)^{n+1} - (x-1)^n = (x-1)^n(x-2) \leq 0$, et comme $\ln x \geq 0$ on a :
  $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$ donc $I_n \geq I_{n+1}$
  La suite (I_n) est décroissante

- Pour tout $x \in [1\ ;2\ ]$, $x-1 \geq 0$ donc $(x-1)^n \geq 0$ et comme $\ln x \geq 0$ on a $f_n(x) \geq 0$ et donc $I_n \geq 0$

  La suite (I_n) est décroissante et minorée (par 0) , donc elle est convergente.

2) a) **Démontrons que pour tout $x \in [1\ ;2\ ]$, $\ln x \leq x$**

Soit h la fonction définie sur [1 ; 2] par $h(x) = \ln x - x$

$h'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x} \leq 0$ donc h est décroissante sur [1 ; 2] Or $h(1) = 0$ donc $h(x) \leq 0$, d'où $\ln x \leq x$

b) Déduisons –en que : $f_n(x) \leq x(x-1)^n \leq 2(x-1)^n$

$\ln x \leq x \leq 2$ et $0 \leq (x-1)^n$

donc $f_n(x) \leq x(x-1)^n \leq 2(x-1)^n$

c) Déduisons –en la limite de la suite (I_n)

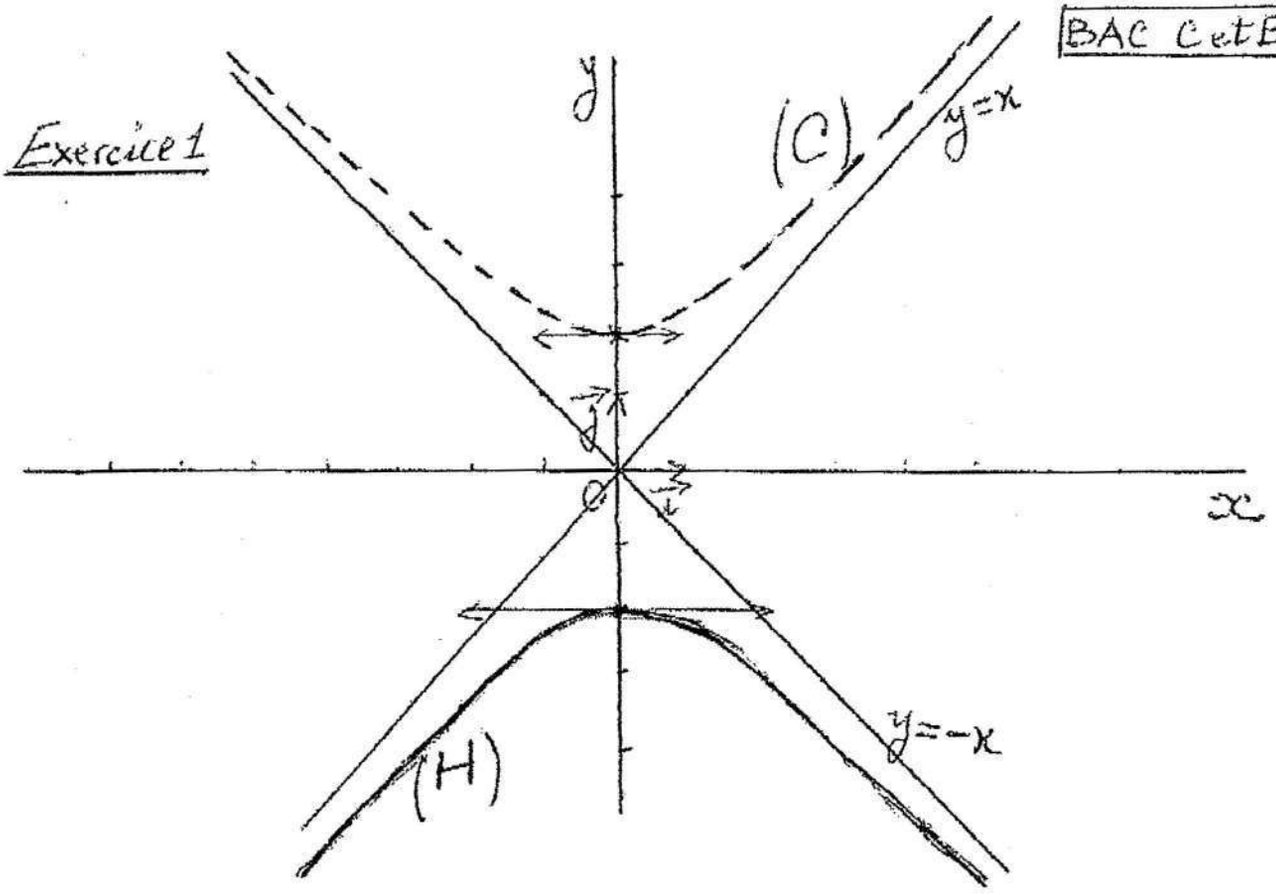
$f_n(x) \leq 2(x-1)^n$

Donc $I_n \leq \int_1^2 2(x-1)^n\, dx = [\frac{2}{n+1}(x-1)^{n+1}]_1^2 = \frac{2}{n+1}$

d'où $0 \leq I_n \leq \frac{2}{n+1}$

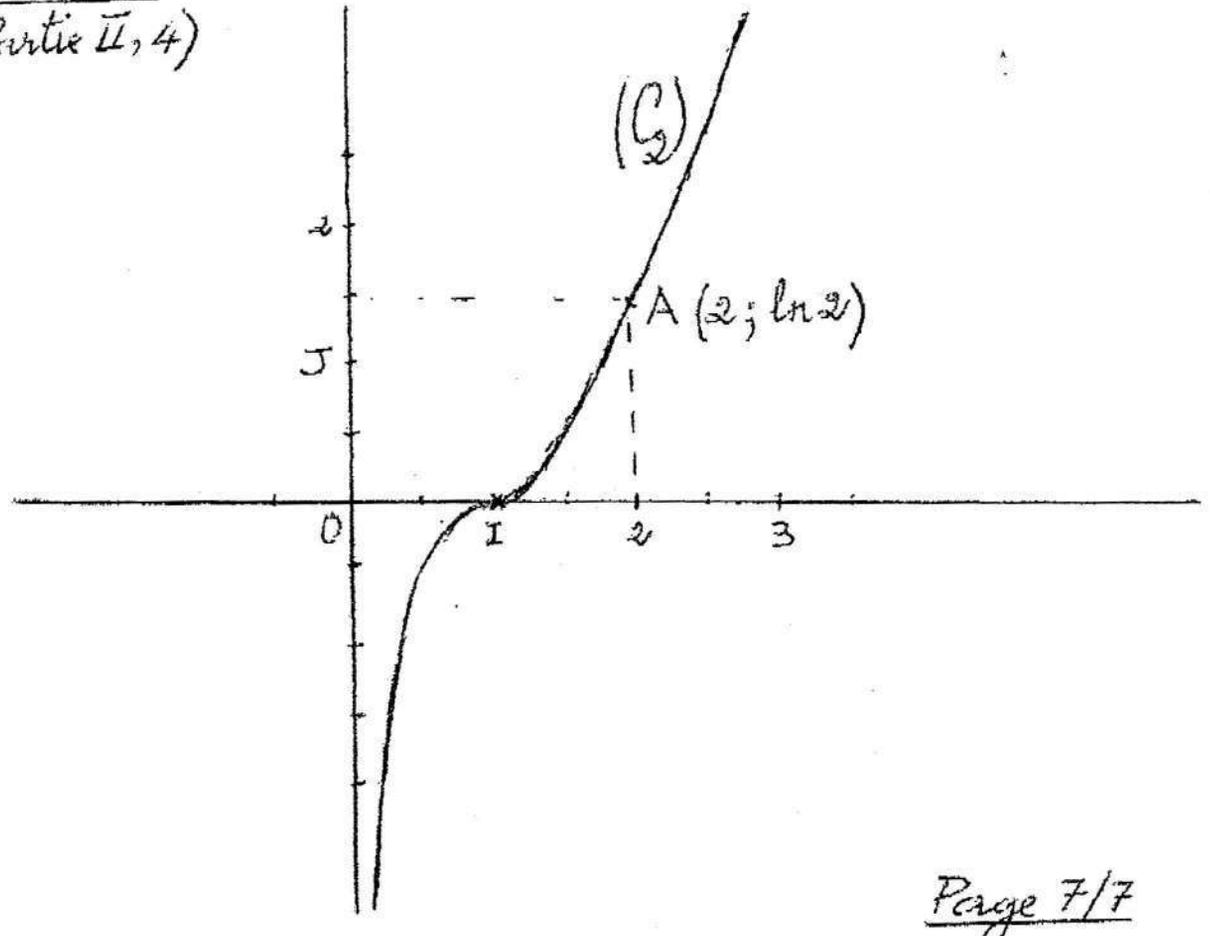
Or $\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n+1} = 0$, donc par le théorème des gendarmes , $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$

Exercice 1



Problème

Partie II, 4)



REPUBLIQUE GABONAISE

OFFICE NATIONAL DU BACCALAUREAT

1–Mathématiques–2005

Séries : C et E
Durée : 4 heures
Cœff. : 5

Exercice 1 (5 points)

Le plan P est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,)$ et f est une application affine de P dans P qui au point $M(x,\,y)$ associe le point $M'(x',\,y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{3}(7x + y + 3) \\ y' = \dfrac{1}{3}(20x + 8y + 15) \end{cases}$$

1. Déterminer l'ensemble (Δ) des points M de P invariants par f.
2. Soit $M(x,\,y)$ un point du plan P n'appartenant pas à (Δ).
   a. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe.
   b. Vérifier que la droite (MM') n'est pas parallèle à (Δ) et que le point H d'intersection des droites (Δ) et (MM') a pour coordonnées $\left(\dfrac{5x - y - 3}{9}\,,\,\dfrac{-20x + 4y - 15}{9}\right)$.
   c. Ecrire le vecteur $\overrightarrow{HM'}$ en fonction de $\overrightarrow{HM}$. En déduire la nature de f dont on précisera les éléments caractéristiques.
3. On considère la suite de points $M_n(x_n\,;\,y_n)$ telle que $M_0(1\,;\,8)$ et $M_{n+1} = f(M_n)$
   a. Exprimer x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et de y_n
   b. Montrer par récurrence que tous les points $M_n(x_n\,;\,y_n)$ sont sur la droite (D) dont une équation est $5x - y + 3 = 0$. En déduire que $x_{n+1} = 4x_n + 2$.
   c. Montrer que tous les x_n sont des entiers naturels. En déduire que tous les y_n sont aussi des entiers naturels.
4. Montrer que :
   a. x_n est divisible par 3 si et seulement si y_n est divisible par 3.
   b. Si x_n et y_n ne sont pas divisibles par 3, alors ils sont premiers entre eux.
5. Montrer que $x_n = \dfrac{1}{3}(4^n \times 5 - 2)$. En déduire que pour tout naturel n, $4^n \times 5 - 2$ est un multiple de 3.

Exercice 2 (4 points)

ABC est un triangle tel que $AB = 7\,cm$, $AC = 5\,cm$ et $BC = 4\,cm$. On désigne par A', B' et C' les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

1. On considère le vecteur $\vec{u} = 16\overrightarrow{BC} + 25\overrightarrow{CA} + 49\overrightarrow{AB}$.
   a. Exprimer $\vec{u}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$
   b. En déduire que $\vec{u} \neq \vec{0}$.
2. Pour tout point M du plan, on pose $f(M) = 16\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{MA'} + 25\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{MB'} + 49\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MC'}$.
   a. Calculer $f(O)$, O étant le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
   b. Montrer que $AC^2 - AB^2 = 2\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AA'}$ On admet de la même manière que

www.tamba-mpsi.com

$BA^2 - BC^2 = 2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BB'}$ et que $CB^2 - CA^2 = 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CC'}$.

c. En déduire que si G désigne le centre de gravité du triangle ABC on a :

$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{GA'} = -4$; $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{GB'} = \frac{11}{2}$ et que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{GC'} = -\frac{3}{2}$.

Calculer alors la valeur de $f(G)$

d. Déterminer l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que $f(M) = 0$.

3. a. Exprimer AA'^2 , BB'^2 et CC'^2 en fonction de AB^2 , AC^2 et BC^2 .

b. Montrer que $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}(AB^2 + AC^2 + BC^2)$.

c. Quel est alors l'ensemble ($\mathscr{C}$) des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 78$.

Problème (11 points)

Soit n un entier naturel non nul. La fonction f_n est définie sur $]-\infty; 0]$ par :

$f_n(x) = -xe^{\frac{1}{nx}}$, si $x < 0$ et $f_n(0) = 0$.

Partie A

1. *Etude des variations de f_n pour n entier naturel non nul.*

a. Prouver que la fonction f_n est continue sur $]-\infty; 0]$.

b. Etudier la dérivabilité de f_n en 0.

c. Calculer $f_n'(x)$ pour $x < 0$ et justifier que f_n est strictement ~~croissante~~ décroissant sur $]-\infty; 0]$.

2. *Etude de f_n au voisinage de $-\infty$.*

a. Déterminer la limite de f_n en $-\infty$

b. Soit la fonction g définie sur $]-\infty; 0]$ par $g(x) = e^x - x - 1$. Donner le tableau de variation de g sur l'intervalle $]-\infty; 0]$. En déduire que pour tout réel x négatif on a $0 \le 1 - e^x \le -x$.

c. Soit $t \le 0$, en intégrant l'inégalité précédente sur $[t; 0]$, montrer que :

$0 \le e^t - (1+t) < \frac{t^2}{2}$.

d. En déduire que pour tout réel $x < 0$ on a $0 \le f_n(x) + (x + \frac{1}{n}) \le \frac{-1}{2n^2x}$. Justifier alors l'existence pour la courbe ($\mathscr{C}_n$) de f_n , d'une asymptote (D_n) en $-\infty$. Préciser la position relative de ($\mathscr{C}_n$) et de (D_n).

e. Dresser le tableau de variation de f_n .

3. *Tracé de courbes.*

a. Déterminer la tangente à ($\mathscr{C}_1$) en 0.

b. Tracer ($\mathscr{C}_1$) et son asymptote (D_1) dans un repère orthonormé d'unité graphique 2 *cm*.

c. Démontrer que pour $n > 0$, ($\mathscr{C}_n$) est l'image de ($\mathscr{C}_1$) par l'homothétie de centre O, de rapport $\frac{1}{n}$. Construire alors ($\mathscr{C}_2$) sur le même graphique que ($\mathscr{C}_1$).

www.tanbatmpsi.com

Partie B. *Etude de l'équation* $f_n(x)=1$.

1. Démontrer que pour tout $n>0$, l'équation $f_n(x)=1$ admet une solution unique α_n dans l'intervalle $]-\infty;-1]$.

2. Démontrer que α_n est solution de l'équation $-x\ln(-x)=\frac{1}{n}$.

3. Soit h la fonction définie sur $]-\infty;-1]$ par $h(x)=-x\ln(-x)$.

   a. Etudier le sens de variation de h.

   b. Prouver que $-1{,}77\le\alpha_1\le-1{,}76$.

   c. Démontrer que la suite (α_n) est croissante. (On remarquera que $h(\alpha_n)=\frac{1}{n}$ et on comparera $h(\alpha_n)$ à $h(\alpha_{n+1})$).

4. Justifier que la suite (α_n) est convergente et que sa limite est inférieure à -1 .

Partie C. *Limite d'une fonction définie par une intégrale.*

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $I_n=\int_{-1}^{0} f_n(t)\,dt$.

1. a. Montrer que la suite (I_n) est croissante.

   b. Montrer que pour tout élément x de $[-1;0]$, on a $f_n(x)\le -x$. En déduire que pour tout $n\ge 1$ on a $I_n\le\frac{1}{2}$

   c. Que peut-on dire de la suite (I_n) ?

2. a. En utilisant la question d du 2 de la partie A, établir la relation $\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\le I_n$.

   b. Déterminer la limite de (I_n) .

www.tamba1mpsi.com

Bac C et E– Session 2005
Corrigé de mathématiques

Exercice 1 (5 points)

1°) **Ensemble des points invariants par f**

f est définie par les équations : $\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(7x + y + 3) \\ y' = \frac{1}{3}(20x + 8y + 15) \end{cases}$ un point est invariant par f si

f(M) = M alors : l'ensemble des points invariants par f est la droite (Δ) d'équation : $4x + y + 3 = 0$.

2°) **a) Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe.**

Soit M$(x ; y) \in$P, M $\notin$ (Δ), le calcul donne $\overrightarrow{MM'} = \frac{1}{3}(4x + y + 3)(\vec{i} + 5\vec{j})$. Puisque M $\notin$(Δ)

Alors $\overrightarrow{MM'}$ a la direction du vecteur $\vec{u} = \vec{i} + 5\vec{j}$.

2°) **b) (MM') n'est pas parallèle à (Δ). Coordonnées du point H.**

(Δ) a pour équation : $4x + y + 3 = 0$ un vecteur directeur de (Δ) est : $\vec{v} = (-1;4)$, il est évident que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, donc (MM') et (Δ) ne sont pas parallèles.

Coordonnées de H intersection de (MM') et de (Δ).

Posons : $H(\alpha;\beta), H \in (\Delta) \Leftrightarrow 4\alpha + \beta + 3 = 0$; $H \in (MM') \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{HM};\vec{u}) = 0$. Cela conduit au système suivant : $\begin{cases} 4\alpha + \beta + 3 = 0 \\ -5\alpha + \beta = -5x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{9}(5x - y - 3) \\ \beta = \frac{1}{9}(-20x + 4y - 15) \end{cases}$ CQFD.

2°) c) **Expression de $\overrightarrow{HM'}$ en fonction de $\overrightarrow{HM}$.**

En utilisant les coordonnées des points H, M et M', on trouve l'égalité vectorielle:

$\overrightarrow{HM'} = 4\overrightarrow{HM}$

Nature et éléments caractéristiques de f.

L'égalité vectorielle nous permet d'affirmer que l'application affine f est une affinité d'axe (D), de direction $\vec{u} = \vec{i} + 5\vec{j}$ et de rapport 4.

3°) **La suite des points M_{n+1} =f(M_n) avec M_0=(1 ;8)**

a) **Expressions de x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et y_n.**

L'expression analytique de l'application f donne : $\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{3}(7x_n + y_n + 3) \\ y_{n+1} = \frac{1}{3}(20x_n + 8y_n + 15) \end{cases}$

b) **Les points M_n appartiennent à une droite.**

Soit (D') la droite d'équation : $5x - y + 3 = 0$; il est évident que le point M_0 (1 ; 8) est un point de cette droite.

Supposons que pour n $\in \mathbb{N}$, $M_n \in$(D'), montrons que cela entraîne que $M_{n+1} \in$ (D').

$M_n \in$ (D') équivaut à : $5x_n - y_n + 3 = 0$, dans cette condition, les coordonnées de M_{n+1} vérifient-elles l'équation de (D') ?

$5x_{n+1} - y_{n+1} + 3 = \frac{5}{3}(7x_n + y_n + 3) - \frac{1}{3}(20x_n + 8y_n + 15) + 3 = 5x_n - y_n + 3$, d'après l'hypothèse de récurrence $M_{n+1} \in$ (D') ; conclusion pour tout n $\in \mathbb{N}$, $M_n \subset$ (D').

Expression de x_{n+1} en fonction de x_n.

$x_{n+1} = \frac{1}{3}(7x_n + y_n + 3)$ et $M_n \in$ (D') : $5x_n - y_n + 3 = 0$ alors on trouve : $x_{n+1} = 4x_n + 2$.

www.mamba-impsi.com

c) **Les x_n et y_n sont des entiers.**

$x_0 = 1 \in \mathbb{N}$, par récurrence on montre que les $x_n \in \mathbb{N}$.

et $y_n = 5x_n + 3$, puisque x_n est dans $\mathbb{N}$, alors y_n aussi.

4°) **Expression de x_n en fonction de n.**

L'égalité proposée $x_n = \frac{1}{3}\left(5 \times 4^n - 2\right)$ est vraie pour $n = 0$ ($x_0 = 1$)

Cela se démontre par récurrence sur n et utilisant la relation entre x_{n+1} et x_n.

5°) **Etude de la divisibilité de x_n et y_n.**

a) x_n divisible par 3 entraîne y_n divisible par 3.

Soit $k \in \mathbb{N}$, si $x_n = 3k$; $\Rightarrow y_n = 5x_n + 3 = 3(5k+1) = 3k'$ avec $k' \in \mathbb{N}$.

y_n divisible par 3 implique x_n aussi.

Soit $y_n = 3k$, avec $k \in \mathbb{N}$, alors $5x_n - 3k + 3 = 0$, donc $5x_n = 3(k-1)$

3 et 5 sont premiers d'après Gauss 3 qui divise $5x_n$ divise x_n.

b) Si **x_n et y_n ne sont pas divisibles par 3.**

Supposons PGCD $(x_n ; y_n) = d \neq 1$, il existe k et k' des entiers naturels tels que :

$x_n = kd$ et $y_n = k'd$ et $5x_n - y_n + 3 = 0 \Leftrightarrow d(k'-5k) = 3$

donc d divise 3,

or les diviseurs de d sont 1 et 3 on a supposé $d \neq 1$, donc d=3 ce qui est absurde puisqu'on a supposé que x_n et y_n ne sont pas divisibles par 3. Alors ils sont premiers entre eux.

Exercice 2 (4 points)

1°) $\vec{u} = 16\overrightarrow{BC} + 25\overrightarrow{CA} + 49\overrightarrow{AB}$

a) **Expression de $\vec{u}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.**

$\vec{u} = 33\overrightarrow{AB} - 41\overrightarrow{AC}$.

b) **Le vecteur $\vec{u} \neq \vec{0}$.**

Les points A, B et C sont non alignés, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont non colinéaires.

2°) $f(M) = 16\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{MA'} + 25\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{MB'} + 49\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MC'}$

a) Calcul de f(O).

Les droites (OA'), (OB') et (OC') sont les médiatrices des segments [BC], [AC] et [AB]

donc : $\overrightarrow{OA'} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OB'} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC'} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, alors f(O) = 0

b) L'égalité $AC^2 - AB^2 = 2\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AA'}$

On utilisant le carré scalaire et la propriété du milieu, on a :

$AC^2 - AB^2 = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB})(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = 2\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BC}$

c) Utilisation des égalités 2°) b)

$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{GA'} = \overrightarrow{BC} \cdot (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AA'})$, or G est le centre de gravité donc $\overrightarrow{GA} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$ et d'après la 1ère égalité du 2°) b) on a :

$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{GA'} = \frac{2}{6}\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AA'} = \frac{1}{6}(AC^2 - AB^2) = \frac{1}{6}(25 - 49) = -4$.

de même $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{GB'} = \frac{1}{6}(2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BB'}) = \frac{1}{6}(BA^2 - BC^2) = \frac{11}{2}$

et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{GC'} = \frac{1}{6}(2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CC'}) = \frac{1}{6}(CB^2 - CA^2) = -\frac{3}{2}$

Calcul de f(G) on utilise les résultats précédents

$f(G) = 16\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{GA'} + 25\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{GB'} + 49\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{GC'} = 0$.

d) **Ensemble des points vérifiant f(M) = 0**

On montre que : $f(M) = \vec{u} \cdot \overrightarrow{MG} + f(G)$

$f(M) = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \overrightarrow{MG} = 0$

(Γ) est la droite passant par G, de vecteur normal $\vec{u}$, c'est la droite (OG).

3°) a) Expressions de AA'^2, BB'^2, CC'^2 en fonction de AB^2, AC^2 et BC^2

www.mba1mpsi.com

A' est le milieu de [BC], donc AA' = $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$ et $2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AC^2+AB^2-BC^2$

$AA'^2=\frac{1}{4}(AB^2+AC^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})=\frac{1}{4}(2AB^2+2AC^2-BC^2)$

Itou : $BB'^2=\frac{1}{4}(2BC^2+2BA^2-AC^2)$

$CC'^2=\frac{1}{4}(2CA^2+2CB^2-AB^2)$.

b) Calcul de $GA^2+GB^2+GC^2$

G est situé au $\frac{2}{3}$ de chaque médiane ainsi $GA=\frac{2}{3}AA'$ alors :

$GA^2+GB^2+GC^2=\frac{4}{9}(AA'^2+BB'^2+CC'^2)$ on utilise le 3°) a) e qui donne

$GA^2+GB^2+GC^2=\frac{1}{3}(AB^2+AC^2+BC^2)=30$

c) **Ensemble ($\mathscr{E}$)**

$M\in(\mathscr{E})$ lorsque $MA^2+MB^2+MC^2=78$,

or G est isobarycentre des points A,B et C : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

$MA^2+MB^2+MC^2=(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})^2+(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB})^2+(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC})^2=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2$

Ce qui donne $MG=4$; ($\mathscr{E}$) est le cercle de centre G de rayon 4.

Problème (11 points)

Partie A

1°) **Variations de f_n avec $n\in\mathbb{N}$**

a) Continuité de f_n sur $]-\infty;0]$

$\lim\limits_{x\to o} f_n(x)=0=f_n(0)$ donc f_n est continue en 0.

f_n est continue sur$]-\infty;0[$ car f_n est composée et produit de fonctions continues sur cet intervalle.

b) Dérivabilité de f_n en 0

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f_n(x)-f_n(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}-e^{\frac{1}{nx}}=0=f_n'(0)$, f_n est dérivable en 0.

c) Dérivée et sens de variation de f_n

$f_n'(x)=\left(\frac{1-nx}{nx}\right)e^{\frac{1}{nx}}$ pour $x<0$, il est vident que sur $]-\infty;0[$ cette dérivée est négative, donc f_n est décroissante sur $]-\infty;0[$.

2°) **Etude de f_n au voisinage de $-\infty$.**

a) Limite de f_n en $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}-xe^{\frac{1}{nx}}=+\infty$

b) **Tableau de variation de g et encadrement.**

$g(x)=e^x-1-x$ sur $]-\infty;0]$, g est dérivable ; $g'(x)=e^x-1$

x	$-\infty$	0
signe de g '		$-$
g	$+\infty$	0

Pour tout $x\le 0$; $g(x)\ge 0$ càd $e^x-x-1\ge 0 \Leftrightarrow 1-e^x\le -x$ de plus $e^x\le 1$ pour $x\le 0$.

On a donc sur $]-\infty;0]$: $0\le 1-e^x\le -x$.

c) **Intégration des inégalités.**

Pour tout $x\le 0$ on a : $0\le 1-e^x\le -x$. intégrons ces inégalités sur [t ; 0], on obtient :

www.tamba1mpsi.com

$0 \le \int_t^0 (1-e^x)dx \le \int_t^0 -x dx$ ce qui donne : $0 \le e^t - (1+t) \le \frac{t^2}{2}$

d) Asymptote à (C_n) en $-\infty$.

Posons : $t = \frac{1}{nx}$, $x < 0$, donc $t < 0$, d'après ce qui précède on a :

$0 \le e^{\frac{1}{nx}} - (1+\frac{1}{nx}) \le \frac{1}{2n^2x^2}$, $x < 0$ donc $-x > 0$ alors : $0 \le -xe^{\frac{1}{nx}} + (x+\frac{1}{n}) \le \frac{-1}{2n^2x}$ cqfd.

Cela s'écrit encore : $0 \le f_n(x) + (x+\frac{1}{n}) \le \frac{-1}{2n^2x}$.

Or $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-1}{2n^2x} = 0$, d'après le théorème des gendarmes on a : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f_n(x)+(x+\frac{1}{n})\right] = 0$ alors la droite (D_n) d'équation $y = -(x + \frac{1}{n})$ est asymptote à la courbe (C_n) en $-\infty$.

e) Tableau de variation de f_n.

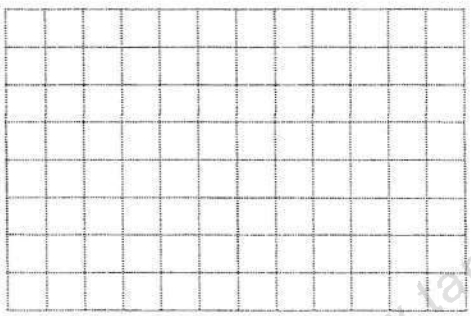
x	$-\infty$	0
signe de f'	−	
f	$+\infty$ ↘	0

3°) **Tracé des courbes**

a) **Tangente à (C_1) en 0.**

La tangente à (C_1) en x=0 a pour équation : $y = 0$

b) Représentation de (C_1)



www.tamba1mpsi.com

c) (C_n) homothétique de (C_1), construction de (C_2)

L'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{n}$ a pour équations : $\begin{cases} x' = \frac{1}{n}x \\ y' = \frac{1}{n}y \end{cases}$.

$M(x\,;y) \in (C_1) \Leftrightarrow y = -xe\frac{1}{x} \Leftrightarrow y' = -x'e\frac{1}{nx} \Leftrightarrow M'(x'\,;y') \in (C_n)$.

(C_2) est l'homothétique de (C_1) par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{2}$.

Partie B

1°) **Existence et localisation d'une solution de $f_n(x) = 1$**

$n > 0$, f_n est continue et strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$,

f_n réalise une bijection de $]-\infty\,;0]$ sur $[0\,;+\infty[$, 1 est une valeur intermédiaire alors l'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution $\alpha_n \in]-\infty\,;0[$.

2°) α_n solution de $-x\ln(-x) = \frac{1}{n}$

Evident.

3°) **Etude de la suite (α_n)**

a) Sens de variation de $h(x) = -x \ln(-x)$

h est continue et strictement décroissante sur $]-\infty ; -1]$ et $h(-1) = 0$

b) **Localisation de α_1.**

$h(-1,77) = 1,01$ et $h(-1,76) = 0,99$; $h(-1,76) < h(\alpha_1) < h(-1,77)$

d'où la localisation cherchée.

c) Croissance de la suite (α_n).

$h(\alpha_n) = \frac{1}{n}$ et $h(\alpha_{n+1}) = \frac{1}{n+1}$; alors $h(\alpha_{n+1}) < h(\alpha_n)$ puisque la fonction h est strictemet décroissante alors la suite (α_n) est croissante.

4°) Convergence de la suite

la suite (α_n) est croissante et majorée par 0 donc elle converge.

Notons α la limite de cette suite, α_n est solution de l'équation $h(x) = \frac{1}{n}$,

h est définie sur $]-\infty ; -1]$ donc $\alpha_n \leq -1$ alors : $\lim_{x\to\infty} \alpha_n = \alpha \leq -1$.

Partie C

1°) **Etude de la suite (I_n)**

a) Sens de variation

$I_n = \int_{-1}^{0} f_n(x)dx$, on calcule la différence $I_{n+1} - I_n$., on montre qu'elle est positive.

Pour $x < 0$, $(n+1)x < nx \Rightarrow e^{\frac{1}{(n+1)x}} > e^{\frac{1}{nx}}$ alors en multipliant par $-x > 0$ on a :

$f_{n+1} > f_n$ par suite en intégrant cette inégalité $I_{n+1} > I_n$. Cette suite est croissante.

b) Majoration de I_n

$x \in [-1 ; 0]$ on a $f_n(x) + x = x(1 - e^{\frac{1}{nx}}) \leq 0$, donc $f_n(x) \leq -x$. En intégrant membre à membre on a : $\int_{-1}^{0} f_n(x)dx \leq \int_{-1}^{0} -xdx \Leftrightarrow I_n \leq \frac{1}{2}$

c) Conclusion

La suite (I_n) est croissante et majorée donc convergente.

2°) **Limite de la suite**

a) Une inégalité

Au A) 2°) d) on a établi pour $x < 0$ que : $0 \leq f_n(x) + (x + \frac{1}{n}) \leq \frac{-1}{2n^2x}$, en intégrant membre à membre on obtient : $0 \leq I_n + \int_{-1}^{0}(x + \frac{1}{n})dx \leq \int_{-1}^{0} \frac{-1}{2n^2x}dx$, on sert d'une partie de cette double inégalité à savoir : $0 \leq I_n + \int_{-1}^{0}(x + \frac{1}{n})dx$: alors $-\int_{-1}^{0}(x + \frac{1}{n})dx \leq I_n$ d'où $\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq I_n$.

b) Limite de I_n.

Finalement on a : $\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq I_n \leq \frac{1}{2}$. La limite de I_n est donc $\frac{1}{2}$.

www.tamba1mpsi.com

REPUBLIQUE GABONAISE
OFFICE NATIONAL DU BACCALAUREAT

2004 –1- MATHEMATIQUES
Série : C- E
Durée : 4 heures
Coef. : 5

Exercice 1 (5 points)

Soit A et B, deux points distincts du plan tels que AB = 6 cm et O le milieu de [AB] ; A' et B' sont les points du plan tels que les triangles AOA' et BOB' soient directs et rectangles respectivement en A et B, on prendra : OA' = OB' = 6 cm.

1°) Placer A' et B' puis montrer que O est le milieu de [A'B'].

2°) Soit s la similitude plane directe qui transforme A en A' et B en B'.

a) Justifier que s(O) = O.

b) Déterminer les éléments caractéristiques de s.

3°) Soit M un point du plan distinct de O, M' son image par s.

a) Montrer que le triangle OMM' est rectangle en M en calculant $\overrightarrow{OM} \bullet \overrightarrow{MM'}$

($\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}$).

b) En déduire une méthode géométrique de construction de M' connaissant M.

4°) On considère le repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ du plan complexe avec $\vec{u} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$.

a) Déterminer les affixes de A, B, A', B'.

b) Déterminer l'écriture complexe de s puis retrouver ses éléments caractéristiques.

c) Donner l'expression analytique de s.

5°) Soit (Γ) la conique de centre O, de foyer F(5 ;0), de directrice la droite D d'équation $x = \frac{9}{5}$ et d'excentricité $e = \frac{5}{3}$.

a) Déterminer l'équation réduite de (Γ) et construire (Γ).

b) Donner la nature exacte de (Γ') image de (Γ) par s, puis donner ses éléments caractéristiques.

c) Que représente A' et B' pour (Γ') ?

Exercice2 (4 points)

On considère l'équation (E) : $11x + 2y = 94$ où x et y sont des entiers relatifs.

1°) a) Donner une solution particulière de l'équation (E).

b) Résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

2°) Soit n un entier naturel tel qu'il existe couple (a ; b) d'entiers relatifs vérifiant :

$n = 11a - 60$ et $n = 2b + 34$.

a) Démontrer que le couple (a ; – b) est solution de l'équation (E).

b) Quel est le reste de la division de n par 22 ?

www.kamba1nasi.com

3°) α et β sont deux entiers naturels inférieurs ou égaux à 9. HOVONO est né en $\overline{19\alpha\beta}^{10}$. En 2004, son âge est curieusement égal à la somme des chiffres de son année de naissance.

a) Exprimer l'âge de HOVONO en 2004 de deux manières différentes.

b) En déduire son âge en 2004.

Problème.(11 points)

Partie A

Dans le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points A (a ;0), B (0 ;2) et C (0 ;-2a) où a est un réel non nul.

1°) Justifier que (O, A, B) est un repère du plan.

2°) Soit f_a l'application affine définie de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ telle que :

$f_a(A) = A$, $f_a(B) = B$, $f_a(O) = C$.

a) Soit M un point de la droite (AB), exprimer M comme barycentre des points A et B.

b) En déduire que tout point de la droite (AB) est invariant par f_a.

3°) On considère φ_a l'application linéaire associée à f_a.

a) Démontrer que :

$\varphi_a(\vec{i}) = \vec{i} + 2\vec{j}$ et $\varphi_a(\vec{j}) = (a+1)\vec{j}$.

b) En déduire l'expression analytique de f_a.

4°) a) Calculer les coordonnées de f_a o f_a(M) où M est un point de coordonnées (x ;y).

b) Montrer qu' il existe une unique valeur b pour laquelle : f_b o $f_b = Id_{\mathscr{P}}$.

c) Quel est l'ensemble ($\mathscr{D}$) des points invariants par f_b.

d) Montrer que pour tout point M de $\mathscr{P}$ et M' son image par f_b, $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire à $\vec{j}$ et le milieu de [MM'] appartient à ($\mathscr{D}$).

e) En déduire la nature exacte de f_b.

5°) On suppose que a appartient à $\mathbb{R}^* \setminus \{-1\}$ démontrer que f_a est bijective.

6°) Soit M (x ; y) un point quelconque qui n'appartient pas à la droite (AB) et M' son image f_a.

a) Déterminer une équation de la droite (AB).

b) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MM'}$, en déduire que M et M' sont distincts et que $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe.

c) Déterminer les coordonnées de H point d'intersection des droites (MM') et (AB).

d) Calculer le nombre réel k tel que : $\overrightarrow{HM'} = k\overrightarrow{HM}$ et montrer que k est indépendant de M et caractériser f_a. (on distinguera les cas a = -1 et a ≠ -1)

www.tamba1mpsi.com

Partie B

Soit u l'application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$u(x) = x + 2 + \frac{\ln x}{x}$$ et $(\mathscr{C})$ sa représentation dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) a) Etudier les variations de la fonction v définie par :

$$v(x) = x^2 + 1 - \ln x$$

b) En déduire le signe de v suivant les valeurs de x.

2°) a) Etudier les variations de u et dresser son tableau de variation.

b) Montrer que la courbe $(\mathscr{C})$ admet une asymptote oblique (D) au voisinage de $+\infty$. Etudier la position de la courbe par rapport à son asymptote (D).

c) Tracer (D) et $(\mathscr{C})$ avec soin.

3°) On appelle $(\mathscr{C}')$ la transformée de $(\mathscr{C})$ par f_{-2}.

a) Représenter $(\mathscr{C}')$ à partir de $(\mathscr{C})$.

b) Ecrire l'équation de la courbe $(\mathscr{C}')$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On notera h la fonction dont le représentation graphique dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est $(\mathscr{C}')$.

c) Calculer les aires des domaines (Δ_1) et (Δ_2) ensemble des points dont les coordonnées (x ; y) vérifient :

(Δ_1) : $\begin{cases} 1 \le x \le m \\ x + 2 \le y \le u(x) \end{cases}$ (Δ_2) : $\begin{cases} 1 \le x \le m \\ h(x) \le y \le x + 2 \end{cases}$

m étant un réel strictement plus grand que 1. Que constatez-vous ?

www.tambe1mpsi.com

Mathématiques : Séries C & E- session 2004

Guide pour la correction et l'harmonisation

N.B. Ceci n'est pas un corrigé détaillé. Les professeurs qui corrigent dans cette série doivent au préalable résoudre individuellement le problème, avant de prendre connaissance de ce document. C'est pendant l'harmonisation que tous les détails seront discutés.

Exercice 1 (5 points).

1°) **Placer les points A' et B', puis montrer que O est le milieu de [A'B']**

Les candidats doivent démontrer que AA'BB' est un parallélogramme,

O milieu d'une diagonale et conclure. 0,25 pt

2°) a) **Justifier que s(O) = O**

Utiliser la conservation du milieu d'un segment. 0,25 pt

b) **Les éléments caractéristiques de la similitude s** (Justifications exigées)

s similitude de centre O de rapport 2 et d'angle $-\frac{\pi}{3}$ 0,5 pt

3°) a) **Montrer que OMM' est un triangle rectangle en M**

Le calcul $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{MM'}$ conduit au résultat (utiliser l'expression du produit scalaire avec le cosinus). 0,25 pt

b) **méthode de construction de M' pour M ≠ O**

M' appartient à la perpendiculaire à (OM) passant par M

tel que $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = -\frac{\pi}{3}$ 0,25 pt

4°) a) **Affixes des points** Il est évident que

A(-3), B(3), A'$(-3 + 3i\sqrt{3})$ et B'$(3 - 3i\sqrt{3})$ (sans justification). 0,5 pt

b) **Ecriture complexe de s**

$z' = (1-i\sqrt{3})\, z$ Calculs détaillés exigés 0,5 pt

On retrouve que O est le point invariant,

- le rapport est $|1 - i\sqrt{3}| = 2$
- l'angle $\theta = \arg(1 - i\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$ 0,25 pt

c) **Expression analytique de s**, au point M(x, y) s associe M'(x', y') tel que

$\begin{cases} x' = x + y\sqrt{3} \\ y' = -x\sqrt{3} + y \end{cases}$ calculs détaillés exigés. 0,25 pt

5°) a) **Détermination de l'équation réduite de la conique Γ et construction**

Connaissant e(excentricité) et c(distance focale) on calcule a et b on trouve

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$ 0,5 pt

Construction on a besoin des sommets et des asymptotes. 0,5 pt

b) **Nature exacte de s(Γ) = Γ ', éléments caractéristiques de Γ '**

L'image d'une conique par une similitude est une conique de même nature.

Les foyers $F'_1 = s(F_1) = (5 , -5\sqrt{3})$ et $F'_2 = s(F_2) = (-5 , 5\sqrt{3})$.

D' = s(D) a pour équation : $5x + 5y\sqrt{3} - 36 = 0$ 0,75 pt

c) **A' et B' représentent les sommets de Γ '** 0,25 pt

Exercice 2 (4 points)

(E) $11x + 2y = 94$

1) a) une solution particulière de (E) (8 ,3) 0,5 pt

(toute autre solution est acceptée) par ex (-94 ; 564).

b) Résolution de (E) dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

résolution de $11x + 2y = 0$. 11 et 2 premiers entre eux donc $S=\{(-2k, 11k)\ k \in \mathbb{Z}\}$ 0,5 pt

la solution générale de (E) est $\{(-2k + 8 , 11k + 3), k \in \mathbb{Z}\}$ 0,25 pt

2°) $n \in \mathbb{N}$ tel que $n = 11a - 60$ et $n = 2b + 34$

a) (a , -b) est solution de (E) car $11a + 2(-b) = (n + 60) - (n - 34) = 94$ 0,5 pt

b) Reste de la division de n par 22. 0,5 pt

$n = 11a - 60 = 11(-2k + 8) - 60 = -22k + 28 = 22(-k + 1) + 6$ Le reste est 6.

3°) a) Expressions de l'âge d'HOVONO

1ère manière $10 + \alpha + \beta$ 0,25 pt

www.tamba1mpsi.com

2ème manière 2004 – (1900 +10α + β) =104 - 10α -β. 0,25 pt

b) L'âge d'HOVONO en 2004

on trouve 11α + 2β =94 Le couple (α ,β) est solution de l'équation (E) 0,25 pt

utiliser les encadrements de α et β,

on trouve α = 8 et β =3 (expliciter les calculs) 0,75 pt

HOVONO est donc né en 1983, il a donc 21 ans. 0,25 pt

Problème (11 points)

Partie A(7 points)

1°) **Justification de (O,A, B) repère du plan**

a ≠ 0, alors O, A et B sont non alignés. 0,25 pt

2°) a) **M barycentre des points A et B**

M ∈ (AB), il existe t réel tel que $(1 - t)\overrightarrow{AM} + t\overrightarrow{BM} = \vec{0}$ 0,25 pt

b) **Tout point de (AB) est invariant par f_a**

Conservation du barycentre par f_a, ce qui conduit à $f_a(M) = M$ 0,5 pt

3°) a)**Justifications de $\varphi_a(\vec{i}) = \vec{i} + 2\vec{j}$ et $\varphi_a(\vec{j}) = (a + 1)\vec{j}$**

On calcule $\varphi_a(\overrightarrow{OA})$ et $\varphi_a(\overrightarrow{OB})$ puis on conclue 0,5 pt

b) **Expression analytique de f_a**

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = 2x + (a+1)y - 2a \end{cases}$$ 0,5 pt

4°) a) **Coordonnées de f_a o f_a (M)** = [x , $(2a+4)x + (a+1)^2y - 4a - 2a^2$] 0,5 pt

b) **f_b o f_b = Id** $\mathscr{P}$ équivaut à b = - 2 0,25 pt

c) $\mathscr{D}$ **ensemble des points invariants par f_b**

C'est la droite d'équation x – y + 2 = 0 0,5 pt

d) **$\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire à $\vec{j}$ et le milieu de [MM'] ∈ $\mathscr{D}$**

$\overrightarrow{MM'} = (2x - 2y + 4)\vec{j}$ 0,25 pt et

le milieu de [MM'] a pour coordonnées (x , x + 2) 0,25 pt

e) **Nature exacte de f_b**

Symétrie d'axe $\mathscr{D}$ et de direction $\vec{j}$ ou affinité de rapport –1 0,25 pt

5°) **f_a bijective pour a ∈ $\mathbb{R}^*\setminus\{-1\}$**

l'image du repère (O,A,B) est le repère (C,A,B) puis conclure 0,5 pt

6°)a) **Equation de la droite (AB) : 2x +ay –2a = 0** 0,25 pt

b)**Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MM'} = (2x + ay - 2a)\vec{j}$**

M et M' sont distincts car M ∉(AB) , donc (2x + ay –2a) ≠ 0 alors

$\overrightarrow{MM'}$ colinéaire à $\vec{j}$ 0,5 pt

c) **Coordonnées de H $(x ; 2 - \frac{2}{a}x)$** point d'intersection de (AB) et (MM') 0,5 pt

d) **Détermination de k** tel que $\overrightarrow{HM'} = k\overrightarrow{HM}$ on trouve k = a + 1 0,5 pt

Caractérisation de f_a

si a = -1 projection sur (AB) de direction $\vec{j}$ 0,25 pt

si a ≠ -1 affinité d'axe (AB) de direction $\vec{j}$ et de rapport a+1 0,5 pt

Partie B (4 points)

1°) a) Variations de v définie par $v(x) = x^2 + 1 - \ln x$ 0,25 pt

b) Signe de v sur $\mathbb{R}^{+*}$ 0,25 pt

2°) a)Variations et tableau de variation de u 0,25 pt

b) Asymptote oblique en +∞. 0,25 pt

Etude des positions relatives de $\mathscr{C}$ et son asymptote oblique. 0,25 pt

c) Représentation. 0,5 pt

3°) a)Représentation de $\mathscr{C}' = f_{-2}(\mathscr{C})$ 0,75 pt

b) Equation de $\mathscr{C}'$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ 0,5 pt

Expression de h la fonction de représentation $\mathscr{C}'$ 0,25 pt

c) Calcul de l'aire du domaine Δ_1 0,25 pt

Calcul de l'aire du domaine Δ_2 0,25 pt

Constat les aires sont égales 0,25 pt

www.tamba1mpsi.com

REPUBLIQUE GABONAISE
OFFICE NATIONAL DU BACCALAUREAT

DEUXIEME SESSION-**2004**
1 – MATHEMATIQUES

Séries : **C et E**
Durée : **4 heures**
Coef. : **5**

Exercice 1 : (5 points)

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral ACB tel que $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$ ait pour mesure $\frac{\pi}{3}$. On note (Δ) la droite orthogonale à (AB) passant par C et I le point de (Δ) tel que $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AI})$ ait pour mesure $\frac{\pi}{4}$. Enfin, on note s la similitude directe de centre A qui transforme C en I et s' la similitude directe de centre B qui transforme I en C.

1° a) Placer les points A, B, C et I sur une figure.

b) Prouver que $r = s \circ s'$ est une rotation d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$.

c) Déterminer le centre de cette rotation.

2° Soit M un point du plan, distinct des points A, B et C, on lui associe le point $N = s(M)$

a) Déterminer l'angle $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN})$.

b) On note σ la similitude directe de centre A qui transforme C en M. Montrer que $\sigma \circ s = s \circ \sigma$. En déduire l'image du point I par σ. Préciser l'image par σ du triangle ACI puis en déduire que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MN}) = -\frac{\pi}{6}$. Donner alors une construction géométrique du point N pour un point M donné.

c) Placer les points M et N sur la figure

3° Au point M du plan, précédemment considéré, on associe le point P tel que $s'(P) = M$.

a) Déterminer l'angle $(\overrightarrow{BP}, \overrightarrow{BM})$.

b) En notant σ' la similitude directe de centre B qui transforme I en P, comparer $\sigma' \circ s'$ et $s' \circ \sigma'$. Déterminer l'angle $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MP})$ puis expliquer pour le point M donné une construction du point P tel que $s'(P) = M$.

c) Placer aussi le point P sur la figure

4° Prouver en exploitant les résultats du 1° que $IP = IN$ et que $(\overrightarrow{IP}, \overrightarrow{IN})$ a pour mesure $\frac{\pi}{2}$

Exercice 2 : (4 points)

1° Montrer que, pour tout entier naturel n, les entiers $14n+3$ et $5n+1$ sont premiers entre eux.

2° On considère l'équation (E) : $87x + 31y = 2$ où x et y sont des entiers relatifs.

a) Vérifier, en utilisant par exemple la question 1°, que 87 et 31 sont premiers entre eux. En déduire que le couple $(5 ; -14)$ est une solution de l'équation $87x + 31y = 1$ puis trouver une solution $(x_0 ; y_0)$ de (E).

b) Déterminer l'ensemble des solutions de (E) dans $\mathbb{Z}^2$.

www.tamba1mpsi.com

c) ***Application :*** Déterminer les points de la droite d'équation : $87x - 31y - 2 = 0$ dont les coordonnées sont des entiers naturels et dont les abscisses sont comprises entre 0 et 100.

Problème **(11 points)**

Partie A

Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = -e^{\sqrt{x}}$. On appelle $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan orienté $(\mathscr{P})$ rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, unité graphique 2 *cm*.

1° a) Justifier la dérivabilité de f sur $]0 ; +\infty[$ et calculer pour tout réel x de cet intervalle $f'(x)$, où la fonction f' désigne la fonction dérivée de f. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

b) Préciser le sens de variation de f sur $[0 ; +\infty[$ Etudier la limite de f en $+\infty$. Dresser le tableau de variation de f.

2° Donner une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathscr{C})$ en son point A d'abscisse 1.

3° Soit φ la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $\varphi(t) = et - e^t$ et g la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = -e^{\sqrt{x}} + \frac{e}{2}x + \frac{e}{2}$.

a) Etudier les variations de φ sur $[0 ; +\infty[$ puis donner le signe de $\varphi(x)$.

b) Si g' est la fonction dérivée de g, montrer que pour tout réel x strictement positif on a : $g'(x) = \frac{\varphi(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$.

c) Déduire des questions précédentes le sens de variation de g et le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x. Etudier alors la position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à sa tangente (T) au point A.

4° Construire dans le repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ la droite (T), la tangente à $(\mathscr{C})$ en son point d'abscisse 0 et la courbe $(\mathscr{C})$.

5° On note $(\mathscr{D})$ la partie du domaine plan limitée par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des ordonnées et la droite (Δ) d'équation : $y = -e$.

Si $\mathcal{A}$ désigne en unités d'aire, l'aire du domaine $(\mathscr{D})$ justifier que :

$$\mathcal{A} = e + \int_0^1 f(x)\,dx .$$

Partie B

Soit r la rotation de centre O et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$.

1° Si M est un point du plan d'affixe $z = x + iy$ et M' le point d'affixe $z' = x' + iy'$, son image par r, exprimer z' en fonction de z et en déduire x' et y' en fonction de x et y.

2° Soit $(\mathscr{C}')$ l'image de $(\mathscr{C})$ par la rotation r. Montrer que $(\mathscr{C}')$ est la courbe représentative de la fonction F définie sur $[1 ; +\infty[$ par $F(x) = (\ln x)^2$.

www.tanba1mpel.com

3° On admet que l'image de $(\mathscr{D})$ par la rotation r est la partie $(\mathscr{D}')$ du plan comprise entre $(\mathscr{C}')$ et les images par r de la droite (Δ) et de l'axe des ordonnées.

a) Etudier les variations de F et la limite de F en $+\infty$. Dresser le tableau de variation de F.

b) Construire sur le même graphique que la courbe $(\mathscr{C})$, la droite (T') image de (T) par r et la courbe $(\mathscr{C}')$.

c) Justifier avec des considérations géométriques que l'aire de $(\mathscr{D})$ est égale à l'aire de $(\mathscr{D}')$. que l'on calculera en unités d'aire, à l'aide de deux intégrations par parties. En déduire alors : $\int_0^1 e^{\sqrt{t}}\,dt$.

Partie C

On se propose dans cette partie de calculer $I = \int_0^1 e^{\sqrt{t}}\,dt$ *d'une autre manière. On appelle* h *la fonction définie sur* IR^+ *par* $h(x) = \int_0^x e^{\sqrt{t}}\,dt$ *et* k *la fonction définie sur* IR *par* $k(x) = x^2$. *On note* ψ *la fonction* $h \circ k$ *définie sur* IR .

1° a) Calculer $\psi(0)$.

b) Justifier la dérivabilité de ψ sur IR et montrer, pour tout x réel que : $\psi'(x) = 2xe^x$.

c) En déduire , pour tout x réel que : $\psi(x) = 2(x-1)e^x + 2$.

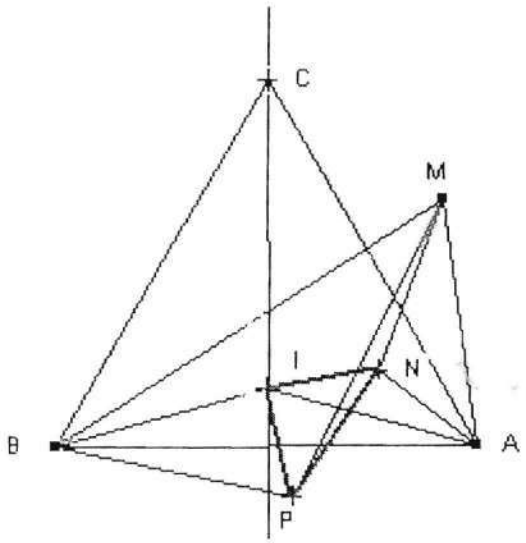
2° Calculer alors : $I = \int_0^1 e^{\sqrt{t}}\,dt$.

www.tamba1mpsi.com

Corrigé *Deuxième session* **1- Math**

Exercice 1

1° a) Figure



0,25

b) La similitude s a pour mesure d'angle $+\frac{\pi}{4}$, mesure de $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AI})$, son rapport est $\frac{AI}{AC}$. La similitude s' a pour angle $(\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BC})$ et pour rapport $\frac{BC}{BI}$. La réflexion d'axe Δ conserve les distances et oppose les angles. Il s'ensuit que : $\frac{BC}{BI}=\frac{AC}{AI}$ et que : $(\overrightarrow{BI}\,;\overrightarrow{BC})=-(\overrightarrow{AI}\,;\overrightarrow{AC})=(\overrightarrow{AC}\,,\overrightarrow{AI})$. Ainsi r est la composé de deux similitudes de rapports inverses ; c'est une similitude de rapport 1 donc une rotation. Son angle est la somme des angles des deux similitudes et a don c pour mesure $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}$ soit $\frac{\pi}{2}$.

0,5

c) On a $r(I)=s\circ s'(I)=s(C)=I$. Donc I est le centre de la rotation r

0,25

2° a) Comme s est la similitude directe de centre A qui transforme M en N, l'angle $(\overrightarrow{AM}\,,\overrightarrow{AN})$ est l'angle de cette similitude et a pour mesure $\frac{\pi}{4}$.

0,25

b) On a $\sigma\circ s=s\circ\sigma$ car σ et s sont deux similitudes de même centre. Par ailleurs $\sigma\circ s(C)=\sigma(I)$ d'une part et d'autre part $s\circ\sigma(C)=s(M)=N$. Ainsi $\sigma(I)=N$. Le triangle ACI a par suite pour image le triangle AMN par la similitude σ. Les similitudes conservant les angles on a $(\overrightarrow{MA}\,;\overrightarrow{MN})=(\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{CI})=-\frac{\pi}{6}$.

1,5

On exploite les deux égalités suivantes pour construire N. $(\overrightarrow{AM}\,;\overrightarrow{AN})=\frac{\pi}{4}$ et $(\overrightarrow{MA}\,;\overrightarrow{MN})=-\frac{\pi}{6}$ en se donnant un point M du plan.

c) (Voir la figure)

3° a) Comme s' est la similitude directe de centre B qui transforme P en M, l'angle $(\overrightarrow{BP}\,,\overrightarrow{BM})$ est l'angle de cette similitude et a pour mesure $\frac{\pi}{4}$.

0,25
0,25

www.tamba1maths.com

b) On a $\sigma' \circ s' = s' \circ \sigma'$ car σ' et s' sont deux similitudes de même centre. Par ailleurs $\sigma' \circ s'(I) = \sigma'(C)$ d'une part et d'autre part $s' \circ \sigma'(I) = s'(P) = M$. Ainsi $\sigma'(C) = M$. Le triangle BCI a par suite pour image le triangle BMP par la similitude σ'. Les similitudes conservant les angles on a $(\overrightarrow{MB} ; \overrightarrow{MP}) = (\overrightarrow{CB} ; \overrightarrow{CI}) = \frac{\pi}{6}$. **1,25**

On exploite les deux égalités suivantes pour construire P. $(\overrightarrow{BP} ; \overrightarrow{BM}) = \frac{\pi}{4}$ et $(\overrightarrow{MB} ; \overrightarrow{MP}) = \frac{\pi}{6}$ en se donnant un point M du plan.

c) (Voir la figure) **0,25**

4° Pour tout point M du plan d'image N par s, et d'antécédent P par s', on a $r(P) = s \circ s'(P) = s(M) = N$. Comme r est la rotation de centre I et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$, **0,5**

on a bien : $IP = IN$ et $(\overrightarrow{IP} , \overrightarrow{IN})$

Exercice 2

1° Comme pour tout entier relatif n, on a : $5(14n + 3) - 14(5n + 1) = 1$, alors on peut dire (théorème de Bézout) que les entiers $14n + 3$ et $5n + 1$ sont premiers entre eux. **1**

2° a) On a : $87 = 14 \times 6 + 3$ et $31 = 5 \times 6 + 1$. Ainsi 87 et 31 sont premiers entre eux. Par suite en prenant $(u ; v) = (5 ; -14)$, on a l'égalité $87u + 31v = 1$ vérifiée et en prenant $(x_0 ; y_0) = (10 ; -28)$, on a une solution particulière de (E). **1**

b) Puisque $(x_0 ; y_0)$ est solution de (E), un couple $(x ; y)$ est solution de (E) si et seulement si $87x + 31y = 87x_0 + 31y_0$ soit $87(x - x_0) = 31(y_0 - y)$. Ainsi si un couple $(x ; y)$ est solution de (E), alors 87 divise $31(y_0 - y)$ et comme 87 et 31 sont premiers entre eux, 87 divise $y_0 - y$. Il existe donc un entier relatif k tel que (théorème de Gauss) $y_0 - y = 87k$ et il s'ensuit que $x - x_0 = 31k$. Ainsi $(x ; y) = (10 + 31k ; -28 - 87k)$. Réciproquement si $(x ; y) = (10 + 31k ; -28 - 87k)$, alors (E) est vérifiée. Donc l'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des couples $(10 + 31k ; -28 - 87k)$ lorsque k décrit $\mathbb{Z}$. **1**

c) *Application :* Il faut remarquer ici qu'un point $M(x ; y)$ à coordonnées entières appartient à la droite donnée si et seulement si le couple $(x ; -y)$ est solution de (E). On cherche donc les points $M(x ; y)$ tels que $\begin{cases} x = 10 + 31k \\ y = 28 + 87k \\ 0 \le x \le 100 \end{cases}$. **1**

Trois valeurs de k sont possibles 0, 1 et 2. d'où les trois points $M_1(10 ; 28)$; $M_2(41 ; 115)$ et $M_3(72 ; 202)$

www.tamba1maps.com

Problème

Partie A (5,5 points)

1° a) *Dérivabilité de f*

- La fonction f est la composée des fonctions $x \mapsto \sqrt{x}$ dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $x \mapsto -e^{x}$, dérivable sur IR. Elle est donc dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $f'(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}$ — **0,25 + 0,25**

- On a pour tout réel strictement positif x, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \dfrac{-e^{\sqrt{x}}+1}{x} = -\dfrac{1}{\sqrt{x}} \times \dfrac{e^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}}$. Or $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} -\dfrac{1}{\sqrt{x}} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \dfrac{e^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{e^{h}-1}{h} = 1$; donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = -\infty$. La fonction f n'est donc pas dérivable en 0. — **0,5**

b) *Variations de f*

- Sur $]0\,;+\infty[$ la dérivée de f est strictement négative. La fonction f est donc strictement décroissante sur son ensemble de définition — **0,25**
- Par ailleurs on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ — **0,25**
- *Tableau de variation*

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	
f	**-1** ↘	$-\infty$

0,25

2° *Equation de la tangente* (T)

La tangente (T) a pour équation : $y = f'(1)(x-1) + f(1) = -\dfrac{e}{2}(x-1) + (-e)$ — **0,5**

soit $y = -\dfrac{e}{2}x - \dfrac{e}{2}$

3° *Position relative de la courbe et de la tangente* (T)

a) *Variations de φ*

La fonction φ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $\varphi'(t) = e - e^{t}$. Ainsi elle admet sur $]0\,;+\infty[$, un maximum absolu égal à 0 en 1 — **0,25**

b) *Calcul de g'(x)*

La fonction g est bien dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et on a pour tout réel x strictement positif, $g'(x) = -\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} + \dfrac{e}{2} = \dfrac{e\sqrt{x} - e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} = \dfrac{\varphi(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$. — **0,5**

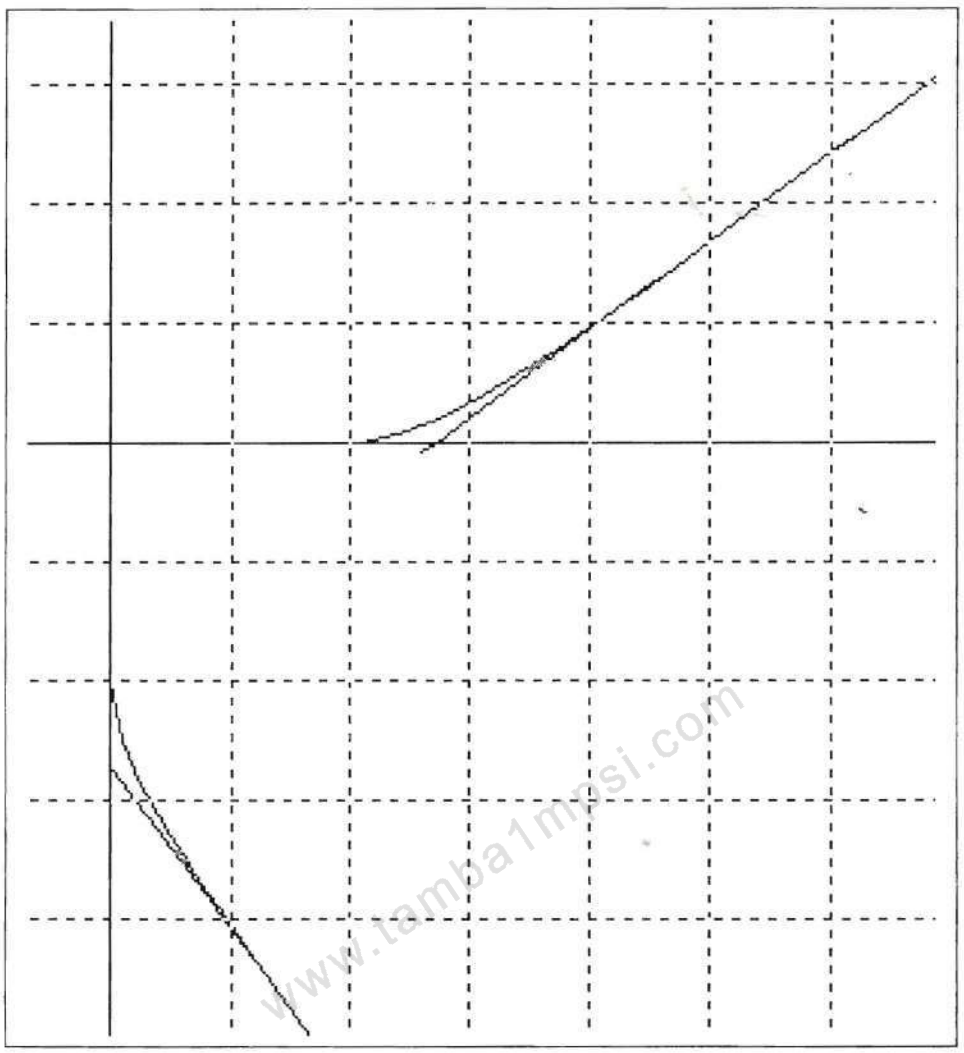
c) *Conclusion*

La fonction g' a le même signe sur $]0\,;+\infty[$ que $\varphi(\sqrt{x})$. Or on a $\varphi(t) \le 0$ sur $]0\,;+\infty[$. Donc g' est négative sur $]0\,;+\infty[$, ne s'annulant qu'en 1. La fonction g est strictement décroissante et s'annule en 1. Donc sur $]0\,;1]$ on a $g(x) \ge 0$ et sur — **1**

www.tamba1mpsi.com

$[1 ; +\infty[$ on a $g(x) \leq 0$ Comme $g(x) = f(x) - (-\frac{e}{2}x - \frac{e}{2})$, on peut conclure que la courbe $(\mathscr{C})$ est au dessus de la tangente (T) sur $]0 ; 1]$ puis passe en dessous de cette dernière sur $[1 ; +\infty[$. Ainsi le point d'abscisse 1 est un point d'inflexion de la courbe $(\mathscr{C})$

4° *Courbe esquissée*



0,75

5° *Justification d'une écriture*

On peut considérer le domaine $(\mathscr{D})$ comme la partie du plan, ensemble des points $M(x ; y)$ tels que : $0 \leq x \leq 1$ et $-e \leq y \leq f(x)$. En unités d'aire on a l'aire de $(\mathscr{D})$ égal à $\mathcal{A}$ avec $\mathcal{A} = \int_0^1 (f(x) - (-e))\,dx = [ex]_0^1 + \int_0^1 f(x)\,dx$. On a bien $\mathcal{A} = e + \int_0^1 f(x)\,dx$.

0,75

www.tamba1mpsi.com

Partie B **(3 points)**

1° *Définition analytique de r* .

Pour tout point M d'affixe z, d'image M' d'affixe z', on a $z' = e^{i\frac{\pi}{2}} z = i z$. Il s'ensuit que $x' + i y' = i (x + i y) = - y + i x$. On a donc $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$ **0,5**

2° *Equation de l'image de* $(\mathscr{C})$ par r .

Pour tout point $M(x ; y)$ d'image $M'(x' ; y')$, dire que M décrit $(\mathscr{C})$ signifie que x varie sur $\mathbb{R}^+$ et que $y = -e^{\sqrt{x}}$. Ce qui équivaut à y décrit $]-\infty ; -1]$ et $-x' = -e^{\sqrt{y'}}$ soit x' décrit $[1 ; +\infty[$ et $x' = e^{\sqrt{y'}}$ soit x' décrit $[1 ; +\infty[$ et $\sqrt{y'} = \ln(x')$. soit enfin $y' = (\ln x')^2$ pour x' décrivant $[1 ; +\infty[$. L'image $(\mathscr{C}')$ de $(\mathscr{C})$ par r est donc bien la courbe représentative de la fonction F définie sur $[1 ; +\infty[$ par $F(x) = (\ln x)^2$. **0,5**

3° a) *Variations de F*

- La fonction F est dérivable sur $[1 ; +\infty[$ et pour tout réel x de cet intervalle on a : $F'(x) = 2\frac{1}{x}\ln x = 2\frac{\ln x}{x}$. Sur $[1 ; +\infty[$ la dérivée reste positive donc la fonction F est strictement croissante sur cet intervalle. **0,5**
- F a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ **0,25**
- On a donc comme *tableau de variation* :

x	1		$+\infty$
$f'(x)$	**0**	+	
f	**0**	↗	$+\infty$

0,25

b) (Voir figure) **0,5**

c) *Calcul de l'aire de* $(\mathscr{L}')$

Cette aire est en unités d'aire $\int_1^e (\ln x)^2 dx = [x(\ln x)^2]_1^e - 2\int_1^e \ln x\, dx$. Avec une deuxième intégration par parties on trouve $e - 2[x\ln x - x]_1^e = e - 2$ **1**

Déduction de I

On a : $\mathcal{A} = e - I$, or $\mathcal{A} = e - 2$ donc $I = 2$

Partie C **(2,5 points)**

1° a) *Calcul de* $\psi(0)$ **0,5**

On a immédiatement $\psi(0) = 0$

b) La fonction ψ est une composée des fonctions h et k dérivables ; elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\psi'(x) = k'(x) \times h'[k(x)] = 2x.e^x$. **0,5**

c) Ainsi la fonction ψ est la primitive de la fonction $x \mapsto 2xe^x$ et qui s'annule en 0 soit $\int_0^x 2te^t dt = [2te^t]_0^x - 2\int_0^x e^t dt = 2xe^x - 2[e^t]_o^x = 2xe^x - 2(e^x - 1)$. On a bien $\psi(x) = 2(x - 1)e^x + 2$. **1**

2° *Calcul de I* **0,5**

On a $I = \psi(1) = 2$

www.tambaMpsi.com

corrigé p. 69-72

Exercice 1 : Q.C.M (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples

Pour chacune des ***cinq*** *questions, une seule des* ***trois*** *réponses est exacte. Aucune justification n'est demandée. Pour chaque réponse, vous indiquerez sur votre copie le numéro de la question et le code (A, B ou C) correspondant à la réponse choisie.*

Une bonne réponse vaut ***1 point,*** *une mauvaise réponse fait perdre* ***0,5 point****, l'absence de réponse n'ajoute ni ne retranche aucun point ; si le total des points est négatif, la note est ramenée à* ***0 point.***

1- Dans un repère orthonormal, la parabole (P) a pour équation $y=3x^2$. Alors :

A. *Le foyer de (P) a pour coordonnées $\left(\frac{1}{12};0\right)$;*

B. *Le foyer de (P) a pour coordonnées $\left(0;\frac{1}{12}\right)$ et sa directrice a pour équation $y=-\frac{1}{12}$;*

C. *Le foyer de (P) a pour coordonnées $\left(0;\frac{1}{12}\right)$ et sa directrice a pour équation $y=\frac{1}{12}$.*

2- Soit (E) l'ensemble des entiers naturels écris en base 10, sous la forme $\overline{abba}$ où a est un chiffre supérieur ou égal à 2 et b un chiffre quelconque. Le nombre d'éléments de (E) est :

A. 8 ;
B. 18 ;
C. 80.

3- Soit (u_n) la suite définie par son premier terme u_0 et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+3$.

A. *Si (u_n) converge, sa limite est 3 ;*

B. *Si $u_0\in[6;+\infty[$ la suite (u_n) est croissante ;*

C. *Si $u_0\in[6;+\infty[$ la suite (u_n) est décroissante et minorée.*

4- Z est un nombre complexe non nul. On pose : $Z=1+e^{i\theta}$ avec $\pi<\theta<\frac{3\pi}{2}$. Alors :

A. $\arg(\overline{Z})=\pi-\frac{\theta}{2}[2\pi]$;

B. $\arg(\overline{Z})=-\frac{\theta}{2}[2\pi]$;

C. $\arg(\overline{Z})=\pi-\frac{\theta}{2}[2\pi]$.

5- Soit A et B deux évènements de probabilité non nulles d'une même expérience aléatoire.

A. *$P_A(B)$ et $P_A(\overline{B})$ sont des probabilités d'évènements contraires.*

B. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$;

C. $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$.

Exercice 2 : Etude d'une fonction (5 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;I,J)$.

On considère la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{1}{x+3}\times\ln(x+3).$$

1-a) Justifier que f est dérivable sur $[0;+\infty[$.

b) Etudier la limite de f en $+\infty$.

c) Déterminer $f'(x)$ où f' désigne la fonction dérivée de f sur Df.

d) En déduire le sens de variation de f sur $[0;+\infty[$.

e) Démontrer que pour tout $x\in[0;+\infty[$, $f(x)>0$.

2- On définit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ par : $u_n=\int_n^{n+1}f(x)dx$.

a) Démontrer que pour tout $x\in[n;n+1]$,

$f(n+1)\leq f(x)\leq f(n)$.

b) Démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$f(n+1)\leq u_n\leq f(n)$.

c) En déduire que la suite (u_n) est décroissante, puis qu'elle est convergente et déterminer sa limite.

3-On pose pour tout entier naturel n,

$I_n=\int_0^n f(x)dx$.

Démontrer que, pour tout entier naturel n,

$$I_n=\frac{\left(\ln(n+3)^2\right)}{2}-\frac{(\ln 3)^2}{2}.$$

4- Pour tout entier naturel $n\geq 1$, on donne :

Scanné avec CamScanner

$S_n = u_0 + u_1 + ... + u_{n-1}$.

a) Justifier que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $I_n = S_n$.

b) En déduire la limite de la suite $\left(\frac{1}{n^2} S_n\right)_{n \geq 1}$.

Exercice 3 : (5 points)

Rotations - composées de réflexions d'axes sécants.

Dans le plan orienté, on considère un triangle AOB rectangle et isocèle en O tel que $\left(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}\right)$ est orienté dans le sens direct.

On note R_A et R_B les rotations de centres respectifs A et B et d'angle $\frac{\pi}{2}$, S_O la symétrie de centre O. On place un point C n'appartenant pas à (AB) et situé dans le demi-plan de frontière (AB) contenant le point O.

1-a) Construire les carrés $BEDC$ et $ACFG$.

b) Donner les mesures de $\left(\overrightarrow{BE}; \overrightarrow{BC}\right)$ et $\left(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AG}\right)$.

c) Déterminer $R_A \circ R_B(E)$.

2-a) Donner la nature et les éléments caractéristiques de $S_{(AO)} \circ S_{(AB)}$ composée de réflexions d'axes (AB) et (AO).

b) Ecrire R_B comme composées de deux réflexions.

c) Démontrer que $R_A \circ R_B = S_O$.

3- Justifier que O est le milieu du segment $[EG]$.

4- On note R_F et R_D les rotations de centres respectifs F et D et de même angle $\frac{\pi}{2}$.

a) Déterminer l'image de C par la transformation $R_F \circ S_O \circ R_D$.

b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $R_F \circ S_O \circ R_D$.

5- Soit H le symétrique de D par rapport à O.

a) Placer H.

b) Démontrer que $R_F(H) = D$.

c) Démontrer que le triangle FOD est rectangle et isocèle en O.

Exercice 4 : Applications de l'espace (5 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1- Soit (D) la droite passant par $E(1;1;0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1;0;1)$.

Justifier que pour tout point M de l'espace, on a :

$$M(x;y;z) \in (D) \Leftrightarrow \begin{cases} x = t+1 \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

2-Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace et $M'(x';y';z')$ son symétrique par rapport à la droite (D) ; K milieu de $[MM']$.

a)Démontrer que le point K appartient à (D) si et seulement s'il existe un nombre réel t tel que :

$$\begin{cases} x' = 2t+2-x \\ y' = 2-y \\ z' = 2t-z \end{cases}.$$

b) Démontrer que $(MM') \perp (D)$ si et seulement si : $(x'-x)+(z'-z)=0$.

c) En déduire que l'expression analytique de S_D est

$$\begin{cases} x' = z+1 \\ y' = 2-y \\ z' = x-1 \end{cases}.$$

3-Soient (π) un plan orthogonal à (D) au point $E(1;1;0)$ et S_π la réflexion de plan (π).

a) Déterminer l'équation cartésienne de (π).

b) Justifier que l'expression analytique de S_π est :

$$\begin{cases} x' = -z+1 \\ y' = y \\ z' = -x+1 \end{cases}.$$

c)Soit $M(x;y;z)$, $M_1(x_1;y_1;z_1)$ et $M'(x';y';z')$ trois points de l'espace tels que $M_1 = S_\pi(M)$ et $M' = S_D(M_1)$.

Déterminer l'expression analytique de $S_D \circ S_\pi$.

d)Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace et $M'(x';y';z')$ son image par S_E.

Déterminer l'expression analytique de S_E.

e) Que pouvez-vous en conclure ?

Scanné avec CamScanner

corrigé p. 73-76

Exercice 1 : Q.C.M (5 points)

*Pour chacune des questions, une seule des quatre propositions est exacte. Vous indiquerez sur votre copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Une bonne réponse vaut **1 point**, une mauvaise réponse fait perdre **0,25 point**, l'absence de réponse ne donne droit à aucun point et n'en fait perdre aucun ; si le total des points est négatif, la note est ramenée à **0 point**.*

1- Quel est l'ensemble des points M d'affixe z tels que : $|\bar{z}+i|=|i-1|$?

A. *le cercle de centre A d'affixe i et de rayon 2.*

B. *le cercle de centre A d'affixe $-i$ et de rayon 2.*

C. *le cercle de centre A d'affixe i et de rayon $\sqrt{2}$.*

D. *le cercle de centre A d'affixe $-i$ et de rayon $\sqrt{2}$.*

2- La courbe paramétrée $(\mathscr{C})$ définie par :

$\begin{cases} x(t)=t^2-2t \\ y(t)=t^2+t \end{cases}$ **avec $t\in\mathbb{R}$ admet au point $M(1)$ une tangente dont un vecteur directeur est $\vec{u}$. Quelles sont les coordonnées du vecteur $\vec{u}$?**

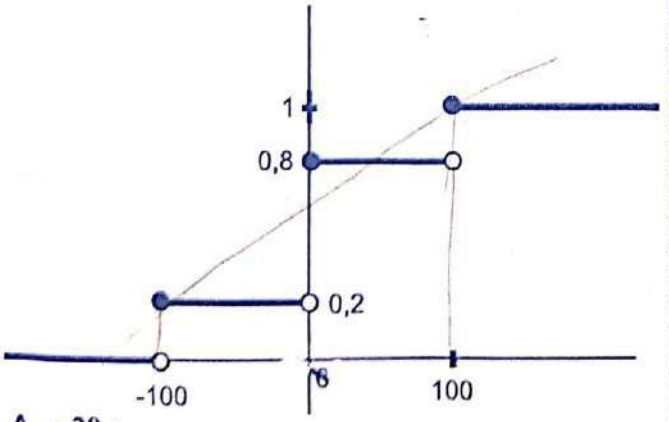
A. $(0;1)$;

B. $(-1;2)$;

C. $(-1;0)$;

D. $(1;1)$.

3- Soit X la variable aléatoire dont la fonction de répartition est représentée ci-dessous :



A. -20 ;

B. 0 ;

C. -100 ;

D. $\frac{1}{100}$.

4- On considère une parabole (P) définie dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ par : $y=\frac{1}{4}x^2-2x+1$. Quelles sont les coordonnées du foyer F de la parabole (P) dans $(O;\vec{i},\vec{j})$?

A. $(4;-3)$;

B. $(0;1)$;

C. $\left(\frac{1}{4};-2\right)$;

D. $(4;-2)$.

5- On considère un plan $(\mathscr{P})$ d'équation cartésienne $x+y-z-1=0$, un point $A(1;-1;2)$ de l'espace et H son projeté orthogonal sur le plan $(\mathscr{P})$.

Laquelle des affirmations suivantes est correcte ?

A. *la droite (AH) a pour vecteur directeur $\vec{u}(-1;1;-1)$;*

B. $AH=\sqrt{6}$;

C. *le point H a pour coordonnées $(1;1;-1)$;*

D. *le point $B(1;1;1)$ appartient à $(P)\cap(AH)$.*

Exercice 2 : (5 points)

Arithmétique et cryptographie

Le but de cet exercice est de déterminer, à partir des propriétés des congruences et des propriétés de divisibilités dans $\mathbb{Z}$, une procédure de cryptage et de décryptage d'un message donné.

A. Résolution d'une équation diophantienne

1- On considère l'équation : $(E_1): 17x-27y=1$, où, $(x;y)\in\mathbb{Z}^2$.

a) Justifier que l'équation (E_1) admet au moins une solution.

b) En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer un couple d'entiers relatifs $(x_0\,;\,y_0)$ solution de (E_1).

c) Résoudre l'équation de (E_1).

2- Déterminer une solution particulière de l'équation $(E): 17x-27y=m$, où m est un entier relatif.

3- Résoudre alors l'équation (E).

B. Application : Cryptographie

Scanné avec CamScanner

On assimile chaque lettre de l'alphabet à un nombre entier naturel comme l'indique le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23

Y	Z
24	25

La procédure de cryptage d'une lettre est assimilée à un entier x compris entre 0 et 25 est la suivante :

Etape 1 : On calcule $17x+5$.

Etape 2 : On calcule le reste m de la division euclidienne de $17x+5$ par 27.

Etape 3 : On détermine à l'aide du tableau précédent la lettre correspondant à m.

1- En utilisant cette procédure de codage, Coder le mot « **B A C** ».

2- Dans cette question, on se propose de déterminer une procédure de décodage.

a) Montrer que pour tous les nombres entiers relatifs x et m : $17x \equiv m[27]$ équivaut à $x \equiv 8m[27]$.

b) En déduire que $8m-40$ est le reste de la division euclidienne de x par 27.

c) Décoder alors les trois lettres « **W F M** ».

Exercice 3 : Isométries du plan (4 points)

Soit $ABCD$ un carré de sens direct tel que $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)=\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et (Δ) la médiatrice du segment $[BC]$.

Soit f une isométrie distincte de la symétrie orthogonale $S_{(\Delta)}$ telle que : $\begin{cases} f(B)=C \\ f(D)=A \end{cases}$.

1- Faire une figure soignée.

2- Soit O le milieu du segment $[BD]$.

a) Montrer que O est l'unique point du plan invariant par f.

b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.

3- Soit g et h des applications du plan définies respectivement par : $g=f\circ S_{(\Delta)}$ et $h=S_{(\Delta)}\circ f$.

a) Déterminer $g(A)$ et $g(C)$ et en déduire que $g=S_{(AC)}$.

b) Montrer que : $h=S_{(BD)}$.

4- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $g\circ h$.

Exercice 4 : (5 points)

Etude d'une fonction logarithme népérien – calcul d'aire

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1.

Partie A : Encadrement d'une intégrale

Soit g la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $g(x)=\frac{\ln x}{x}$.

1-a) Etudier le sens de variation de la fonction g.

b) En déduire que pour $n\geq 3$ et $n\leq x\leq n+1$, on a : $g(n+1)\leq g(x)\leq g(n)$.

2- On pose, pour $n>1$: $a_n=\int_n^{n+1} g(x)\,dx$.

a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer a_n.

b) Montrer que pour tout $n\geq 3$, $0<a_n\leq g(n)$, puis déduire la limite de a_n en $+\infty$.

Partie B : Etude d'une fonction - Calcul d'aire

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{x}{2}+\frac{\ln x}{x}-1$. On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'unité graphique : $2cm$.

1-a) Justifier que f est dérivable sur $]0;+\infty[$, puis calculer $f'(x)$.

b) Montrer que la fonction f' admet un minimum que l'on précisera, puis déduire le signe $f'(x)$.

c) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

2-a) Montrer que $(\mathscr{C})$ admet au voisinage de $+\infty$, une asymptote $(\mathscr{D})$ dont on précisera l'équation.

b) Déterminer les positions relatives de $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{D})$.

3- Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par $(\mathscr{C})$, $(\mathscr{D})$ et les droites d'équation $x=n$ et $x=n+1$.

4- Quelle est la limite de cette aire quand n tend vers $+\infty$?

Scanné avec CamScanner

Exercice 1 : QCM (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des sous-questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Le choix d'une bonne réponse rapporte 0,5 point. Une mauvaise réponse ou l'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point. Recopie sur ta feuille de composition la bonne réponse en indiquant le numéro de la question et les deux propositions choisies. **Exemple : 1.a$_1$ et b$_1$.**

1- On donne l'équation différentielle :

$$(E_1) : y''+2y'+1=x+1.$$

a) Les solutions de l'équation homogène, $(E_0) : y''+2y'+1=0$ sont des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$:

$a_1 : x \mapsto (Ax+B)e^{-x}$ avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$;

$a_2 : x \mapsto Ae^{-x}+Be^{x}$ avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$;

$a_3 : x \mapsto (A\cos x+B\sin x)e^{-x}$ avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$;

a_4 : ***Aucune des réponses précédentes n'est juste.***

b) Une solution de l'équation (E_1) est définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et :

$b_1 : x \mapsto (x+1)e^{-x}+x-1$;

$b_2 : x \mapsto e^{-x}+e^{x}+x+1$;

$b_3 : x \mapsto [\cos x+\sin x]e^{-x}+x-1$;

b_4 : ***Aucune des réponses précédentes n'est juste.***

2- L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. $A(3;-1;1)$; $B(-1;2;-1)$; $A(3;-1;1)$ et $M(x;y;z)$ un point de l'espace.

a) La norme $\|\overrightarrow{AB}\|$ du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est égale à :

$a_1 : \|\overrightarrow{AB}\| = 2\sqrt{2}$;

$a_2 : \|\overrightarrow{AB}\| = 4$;

$a_3 : \|\overrightarrow{AB}\| = 6$;

a_4 : ***Aucune des réponses précédentes n'est juste.***

b) L'ensemble (Γ) des points M de l'espace tels que : $\|\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}\| = 12$ est :

$b_1 : (\Gamma) = \varnothing$;

b_2 : *(Γ) est le cercle de diamètre $[AB]$;*

b_3 : *(Γ) est le cylindre d'axe (AB) et de rayon 2 ;*

b_4 : ***Aucune des réponses précédentes n'est juste.***

3- Soit A et B deux points du plan, $r\left(A;\frac{\pi}{3}\right)$ et $r'\left(B;\frac{5\pi}{3}\right)$.

a) L'application du plan dans lui-même $f = r \circ r'$ est :

a_1 : *une rotation ;*

a_2 : *une translation ;*

a_3 : *une symétrie orthogonale ;*

a_4 : ***Aucune des réponses précédentes n'est juste.***

b) L'ensemble Ψ des points invariants par f est :

$b_1 : \Psi = \varnothing$;

b_2 : *Ψ est un singleton ;*

b_3 : *Ψ est la droite (AB) ;*

b_4 : ***Aucune des réponses précédentes n'est juste.***

4- Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = \sqrt{3u_n+4}$.

a) $(u_n)_n$ est une suite :

a_1 : *constante ;*

a_2 : *décroissante ;*

a_3 : *croissante ;*

a_4 : ***Aucune des réponses précédentes n'est juste.***

b) $(u_n)_n$ est une suite qui :

b_1 : *converge vers -1 ;*

b_2 : *diverge ;*

b_3 : *converge vers 4 ;*

b_4 : ***Aucune des réponses précédentes n'est juste.***

Scanné avec CamScanner

corrigé p.77- 80

Exercice 2 : Arithmétique (4 points)

Soient a, b et x trois nombres entiers non nuls avec $a = \overline{x432}^5$ et $b = \overline{11}^5$.

1- Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $a \equiv 0[b]$.

2- Déterminer l'expression de a et b dans la base décimale.

3- Démontrer que : $PGCD(a\,;b) = PGCD(5x+3\,;6)$.

4-a) Donner l'ensemble des diviseurs de 6.

b) Pour quelles valeurs de x, les nombres a et b sont-ils premiers entre eux ?

Exercice 3 : (5 points)

Equation dans $\mathbb{C}$ et similitude plane directe

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A : Equation dans $\mathbb{C}$

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) :

$z^3 - (3+3i)z^2 + (-6+4i)z + 10 - 14i = 0.$

1-Démontrer que le nombre complexe $z_1 = 1 - i$ est une solution de (E).

2- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$z^2 - (2+4i)z - 12 + 2i = 0.$

3-a) Développer l'expression :

$p(z) = (z-1+i)\left[z^2 - (2+4i) - 12 + 2i\right].$

b) En déduire toutes les solutions de l'équation (E).

Partie B : Nombres complexes et géométrie

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique $1\,cm$. On donne les points A, B et M d'affixes respectives $z_A = -2+2i$; $z_B = 4+2i$ et $z_M = 1-i$.

1- Placer les points A, B et M dans le repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

2-a) Déterminer la forme exponentielle du nombre complexe $\dfrac{z_A - z_M}{z_B - z_M}$.

b) En déduire la nature du triangle AMB.

3- Soit f une transformation du plan dans lui-même vérifiant : $f(A) = A$ et $f(M) = M'$ où M' est le centre de gravité du triangle de sens direct AMB.

a) Déterminer l'affixe du point M'.

b) Démontrer que pour $M \neq A$,

$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AM}\,;\overrightarrow{AM'}}\right) = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ et $\sin\left(\widehat{\overrightarrow{AM}\,;\overrightarrow{AM'}}\right) = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$ et

$\dfrac{AM'}{AM} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

c) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f.

Exercice 4 : (7 points)

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A : Etude d'une fonction

n est un entier naturel non nul. Soit f_n la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f_n(x) = \dfrac{(\ln x)^n}{x}$.

On note (C_n) sa courbe représentative dans un repère $(O\,;I,J)$ d'unité $2\,cm$.

1-a) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x)$. Donner une interprétation graphique de ce résultat. (On discutera suivant la parité de n).

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} f_n(x)$. Donner une interprétation graphique de ce résultat.

2-a) Calculer $f_n'(x)$ où f_n' désigne la fonction dérivée de la fonction f_n et montrer que $f_n'(x)$ est du signe de $(n-\ln x)(\ln x)^{n-1}$ pour x élément de $]0\,;+\infty[$.

b) Etudier le signe de $f_n'(x)$ puis dresser le tableau de variations de f_n sur $]0\,;+\infty[$. (On discutera suivant la parité de n).

3- Démontrer que pour n non nul, les courbes (C_n) se coupent en deux points A et B dont on déterminera les coordonnées. $(x_A < x_B)$.

4- Tracer dans le repère $(O\,;I,J)$ les courbes (C_1) et (C_2).

Partie B : Calcul d'intégrale

Pour $n \geq 1$, on pose : $u_0 = 1$ et $u_n = \displaystyle\int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x}\,dx$.

Scanné avec CamScanner

corrigé p.77- 80

1- Calculer $u_n = \int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x} dx$.

2- On pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k+1}\right)^2 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^2}.$$

a) Calculer S_1 et S_2.

b) Démontrer par récurrence que : pour tout $n \geq 1$:

$$\frac{\pi^2}{6}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right) \leq \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < \frac{\pi^2}{6}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right).$$

c) Etudier la convergence de la suite $\left(S_n\right)$ et préciser sa limite.

Scanné avec CamScanner

Exercice 1 : (5 points)

Dans le plan orienté, on considère deux points A et B (on prendra $AB = 6\ cm$ pour la figure).

1- Déterminer et représenter l'ensemble (Σ) des points M du plan tels que : $\frac{MA}{MB} = 3$.

2- Déterminer et représenter l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que : $mes\left(\widehat{\overrightarrow{MA}\,;\,\overrightarrow{MB}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[\pi]$.

3-a) Placer le point C, image de B par la rotation r de centre A et d'angle orienté de mesure $\frac{2\pi}{3}$.

b) Placer le point D tel que : $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

4- On désigne par s la similitude directe du plan qui transforme A en B et C en D. On note Ω le centre de s.

a) Déterminer le rapport et l'angle de s.

b) Exprimer ΩB en fonction de ΩA et donner une mesure de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega A}\,;\,\overrightarrow{\Omega B}}\right)$.

c) En déduire la position de Ω et le placer sur la figure.

d) Démontrer que les points Ω, A, C et D sont cocycliques.

Exercice 2 : (4 points)

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher.

U_1 contient : 7 boules bleues et 3 boules rouges.

U_2 contient : 2 boules bleues et 1 boule rouge.

On tire au hasard une boule de U_1 et on la met dans U_2 puis on tire au hasard une boule de U_2 et on la met dans U_1. L'ensemble de ces opérations constitue une épreuve.

1- On considère les évènements suivants :

A : « après l'épreuve, les urnes se retrouvent dans leur configuration initiale » ;

B : « après l'épreuve, l'urne U_2 contient une seule boule bleue ».

On note $p(A)$ la probabilité de l'évènement A et $p(B)$ celle de l'évènement B. Vérifier que $p(A) = \frac{27}{40}$ et calculer $p(B)$.

2- Un joueur mise $200\ FCFA$ et effectue une épreuve. A l'issue de cette épreuve, on compte le nombre de boules bleues contenues dans U_2.

- Si U_2 contient une seule boule bleue, le joueur reçoit $600\ FCFA$;
- Si U_2 contient deux boules bleues, le joueur ne reçoit rien ;
- Si U_2 contient trois boules bleues, le joueur reçoit $200\ FCFA$.

On appelle gain algébrique la différence (positive ou négative) entre la somme reçue par le joueur et la mise. Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

a) Déterminer les valeurs prises par X.

b) Déterminer la loi de probabilité de X.

c) Montrer que l'espérance mathématique $E(X)$ est égale à -75 et calculer la variance $V(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$ de la variable X.

3- MBADINGA joue cinq fois de suite à ce jeu. Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'il obtienne au moins un gain strictement positif à l'issue des cinq épreuves.

Problème : (11 points)

Partie A :

Pout tout entier naturel n, soit f_n la fonction définie sur l'intervalle $K = [0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f_0(x) = e^{-x} \\ f_n(x) = \frac{x^n}{n!}e^{-x} \quad pour\ n \neq 0. \end{cases}$$

Soit a un élément non nul fixé dans K. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n(a) = \int_0^a f_n(x)\,dx$.

1- Justifier l'existence de $I_n(a)$.

2-a) Montrer que : $\forall x \in K$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n'(x) = f_{n-1}(x) - f_n(x)$ et $f_n(0) = 0$.

b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n(a) - I_{n-1}(a) = -\frac{a^n}{n!}e^{-a}.$$

c) Ensuite en déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_n(a) = 1 - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!}\right)e^{-a}.$$

Scanné avec CamScanner

3- Dans cette question, on pose $a = 1$.

On appelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par :

$$u_n = 1 - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right) e^{-1} = \int_0^1 f_n(x)\,dx.$$

On note (C_n) la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé d'unité graphique : $3\,cm$.

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$, puis donner une interprétation géométrique de u_n.

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x \in [0;1]$, on a :

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{n!}x^n.$$

c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{(n+1)!}$.

Déterminer la limite de u_n en $+\infty$.

d) En déduire que : $e = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)$.

Partie B :

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

$f(x) = \ln\left(e^x + e^{-x}\right)$; $(\mathscr{C})$ est sa courbe représentative.

1-a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b) Montrer que : $\forall x \geq 0$, $f(x) = x + \ln\left(1+e^{-2x}\right)$.

c) En déduire que la courbe $(\mathscr{C})$ admet pour asymptote la droite (Δ) d'équation $y = x$.

d) Etudier la position relative de $(\mathscr{C})$ et de (Δ).

2-a) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variations.

b) Construire $(\mathscr{C})$ et (Δ) dans un même repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité $3\,cm$.

Partie C :

Pour tout x élément de $[0;+\infty[$, on pose :

$$F(x) = \int_0^x \ln\left(1+e^{-2t}\right)dt.$$

On ne cherchera pas à calculer $F(x)$.

1-a) Montrer que F est bien définie et positive sur $[0;+\infty[$.

b) Soit λ un réel strictement positif. En utilisant la **question 1** de la **partie B**, interpréter graphiquement $F(\lambda)$.

2-a) Justifier que F est dérivable sur $[0;+\infty[$ et calculer $F'(x)$.

b) Etudier le sens de variation de F sur $[0;+\infty[$.

3- Soit a un réel strictement positif.

a) Montrer que : $\forall t \in [1;1+a]$, on a :

$$\frac{1}{1+a} \leq \frac{1}{t} \leq 1.$$

b) En appliquant les inégalités des accroissements finis à la fonction $\ln$, établir que :

$$\frac{a}{1+a} \leq \ln(1+a) \leq a.$$

4- Soit x un réel strictement positif.

a) Déduire de la **question 3** que :

$$\int_0^x \frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}}\,dt \leq F(x) \leq \int_0^x e^{-2t}\,dt.$$

b) Ensuite que :

$$\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln\left(1+e^{-2}\right) \leq F(x) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x}.$$

5- On admet que la limite de F en $+\infty$ existe et est un nombre réel noté k. Etablir que : $\frac{1}{2}\ln 2 \leq k \leq \frac{1}{2}$.

6- Pour tout entier naturel n, on pose :

$$v_n = \int_n^{n+1} \ln\left(1+e^{-2t}\right)dt$$

a) En utilisant la **question 4.b)** de la **partie C**, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq v_n \leq \frac{\left(1-e^{-2}\right)e^{-2n}}{2}$.

b) Déterminer la limite de la suite v_n en $+\infty$.

Scanné avec CamScanner

Exercice 1 : (5 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique $1cm$.

On considère les points M_0, M_1 et M_2 d'affixes respectives $z_0=-4+i$, $z_1=-2-3i$ et $z_2=1-4i$.

1-a) Justifier l'existence d'une unique similitude directe S telle que : $S(M_0)=M_1$ et $S(M_1)=M_2$.

b) Etablir que l'écriture complexe de S est :

$$z'=\frac{1+i}{2}z+\frac{1-3i}{2}.$$

c) En déduire le rapport, l'angle et l'affixe ω du centre Ω de la similitude S.

d) On considère un point M, d'affixe z avec $z\neq 0$, et son image $M'=S(M)$ d'affixe z'.

vérifier la relation $\omega-z'=-i(z-z')$. En déduire la nature du triangle $\Omega MM'$.

2- Pour tout entier naturel n, le point M_n a pour affixe z_n. Et le point M_{n+1} est défini par $M_{n+1}=S(M_n)$ et on pose $U_n=M_nM_{n+1}$.

a) Placer les points M_0, M_1 et M_2 et construire géométriquement les points M_3, M_4, M_5 et M_6.

b) Démontrer que la suite (U_n) est géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3- La suite (V_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$V_n=U_0+U_1+...+U_n=\sum_{k=0}^{n}U_k.$$

a) Exprimer V_n en fonction de n.

b) Déterminer la limite de la suite (V_n).

4-a) Calculer, en fonction de n, la longueur ΩM_n notée r_n.

b) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $r_n<0,001$.

Exercice 2 : (5 points)

1- On considère l'équation $(E):10x+11y=95$ où x, y et z sont des entiers relatifs.

a) Déterminer un couple d'entiers relatifs $(u;v)$ vérifiant $10x+11y=1$; en déduire une solution particulière $(x_0;y_0)$ de l'équation (E).

b) Déterminer les couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

2- Soit (O,I,J,K) un repère orthonormé de l'espace.

On considère le plan $(\mathcal{P})$ d'équation :

$10x+11y+12z=95$.

On considère les points du plan $(\mathcal{P})$ qui appartiennent aussi au plan (O,I,J).

Montrer qu'un seul de ces points a pour coordonnées des entiers naturels ; déterminer les coordonnées de ce point.

3- On considère un point M du plan $(\mathcal{P})$ dont les coordonnées x, y et z sont des entiers naturels.

a) Montrer que l'entier y est impair.

b) On pose $y=2p+1$ où p est entier naturel.

Montrer qu'on a : $p+z\equiv 2[5]$.

c) On pose $p+z=5q+2$ où q est un entier naturel.

Montrer que les entiers x, p et q vérifient la relation : $x+p+6q=6$. En déduire que q prend les valeurs 0 ou 1.

d) En déduire les coordonnées de tous les points de $(\mathcal{P})$ dont les coordonnées sont des entiers naturels.

Problème : (10 points)

On désigne par n un entier supérieur ou égal à 2 et on considère les fonctions notées f_n, qui sont définies pour x appartenant à l'intervalle $]1;+\infty[$ par :

$$f_n(x)=\frac{1+n\ln(x-1)}{(x-1)^2}.$$

Partie A : Etude de la fonction f_n

1- Calculer $f_n'(x)$ et démontrer que l'on peut écrire le résultat sous la forme d'un quotient dont le numérateur est $n-2-2n\ln(x-1)$.

2- Résoudre l'inéquation $f_n'(x)\geq 0$. En déduire le signe de $f_n'(x)$.

Scanné avec CamScanner

3- Déterminer les limites de f_n en 1 et en $+\infty$.

4-a) Démontrer que pour tout n entier supérieur ou égal à 2 : $f_n\left(e^{\frac{n-2}{2n}}+1\right)=\frac{n}{2}e^{\frac{2-n}{2n}}$.

b) Etablir le tableau de variation de f_n et calculer sa valeur maximale en fonction de n.

Partie B :

Représentation graphique de quelques fonctions f_n

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O,I,J). Unité graphique : $5\ cm$). On note (C_n) la courbe représentative de la fonction f_n dans ce repère.

1- Construire (C_2) et (C_3).

2-a) Calculer $f_{n+1}(x)-f_n(x)$. En déduire que pour tout n supérieur ou égal à 2, on a :

$$f_n(x)=n\left[f_3(x)-f_2(x)\right]+\frac{1}{(x-1)^2}.$$

b) Expliquer comment il est possible de construire point par point la courbe (C_4) à partir de (C_2) et (C_3).

Partie C : Calcul d'aires

1- Calculer l'aire, en unités d'aire du domaine du plan limité par les courbes (C_n) et (C_{n+1}) et les droites d'équations $x=2$ et $x=e+1$.

2- On note A_n l'aire, en unités d'aire, du domaine plan limité par les courbes (C_n) et les droites d'équations $y=0$, $x=2$ et $x=e+1$.

a) Calculer A_2.

b) Déterminer la nature de la suite (A_n).

Scanné avec CamScanner

corrigé p. 93 - 97

Exercice 1 : (5 points)

Dans cet exercice, une seule des quatre réponses proposées est correcte et attendue pour chaque question. On écrira simplement le numéro de la question suivi de la lettre correspondant à la réponse jugée correcte. La réponse correcte attendue vaut 1 point. Une réponse fausse enlève 0,5 point. Toute absence de réponse vaut 0 point. Lorsque le total des points est négatif, l'exercice est noté 0 point.

1- Les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation d'inconnue z :

$z^4+(5-2i)z^3+(8-10i)z^2+(6-16i)z-12i=0$

sont :

A. $-2\,;\,3i\,;-1-i$ *et* $-1+i$;

B. $-3\,;\,2i\,;1-i$ *et* $1+i$;

C. $-2i\,;\,3\,;-2-i$ *et* $-2+i$;

D. $-3\,;\,2i\,;-1-i$ *et* $-1+i$.

2- La solution dans $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$y''-7y'+12y=e^{3x}$ **qui satisfait aux conditions** $y(0)=y'(0)=-1$ **est la fonction** f **définie sur** $\mathbb{R}$ **par :**

A. $f(x)=(x^2-7x+12)e^x$;

B. $f(x)=3e^{4x}-4e^{3x}-xe^{3x}$;

C. $f(x)=(x^2-7x+12)e^{3x}$;

D. $f(x)=(3-4e^x-x)e^{3x}$.

3- ABC **est un triangle tels que** $AB=AC=7$ **et** $BC=4$; I **est le milieu de** $[BC]$ **et** G **le centre gravité du triangle** ABC. **Le lieu géométrique des points** M **de l'espace tels que :**

$-2AM^2+BM^2+CM^2=38$ **est :**

A. la sphère de diamètre $[AG]$;

B. le cercle de diamètre $[AG]$;

C. le plan médiateur du segment $[AG]$;

D. la médiatrice du segment $[AG]$;

4- On considère la fonction définie par :

$f(x)=(x^2-1)e^{\frac{1}{x+1}}$.

Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x)$.

A. $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x)=0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x)=-\infty$;

B. $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x)=0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x)=+\infty$;

C. $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x)=+\infty$;

D. $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x)=0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x)=0$.

5- Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. L'ensemble des points M dont les coordonnées $(x\,;\,y)$ vérifie $x^2-4x+4y=0$ est :

A. la parabole de sommet $S(2;1)$, de foyer $F(-4\,;\,4)$ de directrice (D) : $y=1$;

B. l'ellipse de centre $\Omega(-4;4)$, d'excentricité $\frac{\sqrt{3}}{2}$, de sommets $A(4\,;\,0)$ et $A'(-4\,;\,0)$;

C. l'hyperbole de centre $\Omega(-4;4)$, d'excentricité 2, de sommets $A(4\,;\,0)$ et $A'(-4\,;\,0)$;

D. la parabole de sommet $S(2;1)$, de foyer $F(2\,;\,0)$ de directrice (D) : $y=2$.

Exercice 2 : (5 points)

Arithmétique :

PGCD de deux entiers dépendant d'un entier naturel n.

1- a et b sont des nombres entiers naturels non nuls.

a) Définir $PGCD(a\,;\,b)$.

b) Définir $PPCM(a\,;\,b)$.

c) Enoncer la propriété (ou le théorème) de Bézout.

d) Enoncer la propriété (ou le théorème) de Gauss.

e) Enoncer l'algorithme d'Euclide.

f) Utiliser l'algorithme d'Euclide pour déterminer le $PGCD(2\,;\,9)$.

2- n est un entier naturel non nul, a et b les nombres tels que $a=2n-1$ et $b=9n+4$.

a) Justifier que a et b sont des nombres entiers naturels non nuls.

b) Calculer $2b-9a$.

c) Soit k un diviseur commun à a et b. Justifier que k divise 17.

d) En déduire les valeurs possibles de $PGCD(a\,;\,b)$.

3- On donne $PGCD(a\,;\,b)=17$. On note x et y les entiers naturels premiers entre eux tels que : $a=17x$ et

Scanné avec CamScanner

$b=17y$.

a) Trouver deux entiers naturels x_0 et y_0 tels que : $-9x_0+2y_0=1$.

b) Résoudre dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, l'équation d'inconnue $(x;y)$ $-9x+2y=0$.

c) Déterminer les nombres entiers naturels a et b tels que : $-9a+2b=17$.

d) En déduire les valeurs de n pour lesquelles $PGCD(a;b)=17$.

e) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles a et b sont premiers entre eux.

Exercice 3 : (5 points)

Dérivée d'une bijection réciproque.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. L'unité est $2\,cm$ sur l'axe des abscisses et $1\,cm$ sur l'axe ordonnée. Soit f la fonction définie sur $]0;\pi[$ par $f(x)=\dfrac{1}{\sin x}$ et (C) sa courbe représentative dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1-a) Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to \pi\\ x<\pi}} f(x)$. Interpréter éventuellement les résultats obtenus.

b) Justifier que f est dérivable sur $]0;\pi[$, puis déterminer $f'(x)$, où f' est la fonction dérivée de f.

c) Etudier le sens de variation de f, puis dresser son tableau complet de variation sur $]0;\pi[$.

2- Soit g la restriction de f à $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

a) Démontrer que g est une bijection de $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ vers un intervalle que l'on précisera.

b) Soit g^{-1} la bijection réciproque de g. Justifier que g^{-1} est dérivable sur $]1;+\infty[$.

c) Préciser le sens de variation de g^{-1}, puis dresser son tableau complet de variation.

d) Soit (H) la courbe représentative de g^{-1}. Construire (C) et (H) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

3- Résoudre dans $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ l'équation $g(x)=2$, puis déterminer $\left(g^{-1}\right)'(2)$.

4-a) Montrer que pour tout x de $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, $g(x)>0$ et que $g'(x)=-g(x)\sqrt{[g(x)]^2-1}$.

b) En déduire que, pour tout x de $]1;+\infty[$,

$$\left(g^{-1}\right)'(x)=-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

5-a) Trouver deux nombres réels a et b tels que : $f(x)=\dfrac{a\sin x}{1+\cos x}+\dfrac{b\sin x}{1-\cos x}$, pour tout x de $]0;\pi[$.

b) En déduire l'aire $\mathcal{A}$, exprimée en unité d'aires, de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses, ainsi que les droites d'équations $x=\dfrac{\pi}{4}$ et $x=\dfrac{3\pi}{4}$.

Exercice 4 : (5 points)

Similitude directe et problème de géométrie.

1- $ABCD$ est un carré de sens direct, I est son centre et J le milieu de $[AI]$.

a) Justifier qu'il existe une unique similitude directe S telle que : $S(A)=I$ et $S(B)=J$.

b) Montrer que le rapport de S est $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ et que son angle est $-\dfrac{3\pi}{4}$.

c) Démontrer que l'image D' de D par S est le milieu de $[IB]$.

d) Montrer que l'image C' du point C par S est le milieu de $[AB]$.

e) Quelle est la nature du quadrilatère $IJC'D'$? Justifier la réponse.

2- On note Ω le centre de la similitude S.

a) Montrer que : $2\left(\overrightarrow{\Omega A};\overrightarrow{\Omega I}\right)=2\left(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{ID}\right)$ et que, $2\left(\overrightarrow{\Omega B};\overrightarrow{\Omega J}\right)=2\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AJ}\right)$.

b) En déduire que les points Ω, A, I et D d'une part et les points Ω, A, B et J d'autre part sont cocycliques.

c) Comment construire Ω ? Justifier la réponse.

d) Montrer que les droites (ΩA) et (ΩD) sont orthogonales.

Scanné avec CamScanner

corrigé p. 98 - 101

Exercice 1 : QCM (5 points)

*Pour chaque question, trois réponses sont proposées et une seule est juste. Vous indiquerez le numéro de la question suivi de la lettre de votre choix sans justifier ce choix. Chaque bonne réponse vaut **1 point** et toute autre réponse ou absence de réponse vaut 0.*

1- L'ensemble des points M du plan tels que $mes\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}\right)=\alpha+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$, $\alpha\neq 0$ et $\alpha\neq\pi$ est :

A. le cercle passant par les points A et B privé des points A et B ;

B. un arc du cercle de corde $[AB]$ privé des points A et B ;

C. le segment $[AB]$ privé des points A et B.

2- Dans l'espace muni d'un repère orthonormé (O,I,J,K), on donne les points $A(1;2;3)$, $B(-1;4;3)$, $C(2;0;1)$ et $D(0;4;15)$. Le volume en unités de volume du tétraèdre $ABCD$ est :

A. $\frac{10}{3}uv$;

B. $\frac{20}{3}uv$;

C. $\frac{5}{3}uv$.

3- Soit le complexe $z=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$ alors z^{1972} est :

A. 1 ;

B. -2 ;

C. -1.

4- Un sac contient n objets dont certains sont noirs et les autres blancs. On extrait simultanément deux objets du sac. On suppose qu'il y a équiprobabilité. La probabilité d'obtenir deux objets noirs est :

A. $\frac{n(n-1)}{90}$;

B. $\frac{n(10-n)}{45}$;

C. $\frac{n(n-1)}{45}$.

5- L'expression $\ln\frac{1}{2}+\ln\frac{2}{3}+\ln\frac{3}{4}+...+\ln\frac{98}{99}+\ln\frac{99}{100}$ est :

A. $2\ln 10$;

B. $-2\ln 10$;

C. $-10\ln 2$.

Exercice 2 : (4 points)

Les parties A et B sont indépendantes.

A.1. Montrer que n^2+4n+3 est divisible par $n+1$.

2. Vérifier que $2n^2+8n+9=2\left(n^2+4n+3\right)+3$ puis déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que $n+1$ divise $2n^2+8n+9$.

B. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, l'entier relatif $3^{n+3}-4^{4n+2}$ est divisible par 11.

Exercice 3 : (4,5 points)

Dans le plan, on considère un triangle équilatéral ABC tel que $mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)=\frac{\pi}{3}rad$. On appelle (C) le cercle circonscrit au triangle ABC. La médiatrice de $[BC]$ coupe (C) en A et D. On appelle A' le point d'intersection des droites (BD) et (AC), (Δ) étant la droite passant par A et parallèle à (DC).

1- Faire une figure.

2.a. Justifier que : $mes\left(\widehat{\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AC}}\right)=\frac{\pi}{6}$;

$mes\left(\widehat{\overrightarrow{A'A};\overrightarrow{A'B}}\right)=\frac{\pi}{6}$ et $(AC)\perp(DC)$.

b. En déduire que C est le milieu de $[AA']$.

3- Soit $S_{(BD)}$, $S_{(DC)}$, $S_{(CA)}$ et $S_{(AB)}$ les symétries orthogonales d'axes respectifs (BD), (DC), (AC) et (AB).

a- Donner la nature et les éléments caractéristiques des transformations $g=S_{(BD)}\circ S_{(DC)}$ et $h=S_{(CA)}\circ S_{(AB)}$

b- Montrer que $S_{(DC)}\circ S_{(DA)}=g$ et $S_{(DA)}\circ S_{(\Delta)}=h$.

4- On considère les transformations $f=g\circ h$ et $t_{\overrightarrow{AA'}}$ ($t_{\overrightarrow{AA'}}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$).

a- Déterminer $f(A)$ puis, préciser la nature et l'élément caractéristique de f.

Scanné avec CamScanner

corrigé p. 98 - 101

b- Préciser la nature et les éléments qui caractérisent $t_{\overrightarrow{AA'}} \circ S_{(AC)}$.

Exercice 4 : (6,5 points)

A- Etude d'une famille de fonction

Soit la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f_n(x) = -x^n e^x + 1$ et (C_n) sa courbe représentative. L'entier n est tel que : $n \geq 1$.

1- Montrer que toutes les courbes (C_n) passent par deux points A et B, A étant le point dont l'ordonnée est positive.

2- Calculer la limite f_n en $-\infty$ et en $+\infty$ puis, interpréter.

3- Etudier suivant la parité de n, les variations de f_n et dresser le tableau de variations. (Faites-y figurer les points A et B.

B- Etude d'une suite de la fonction f.

On considère pour $n \geq 1$, la suite (U_n) définie par :

$U_n = \int_0^x f_n(t)\,dt$, $x \in [0;1]$.

1- Justifier l'existence de la suite (U_n) et calculer U_1.

2- Montrer que pour tout $x \in [0;1]$, $f_{n+1}(x) - f_n(x) \geq 0$ puis, déduire que la suite (U_n) est croissante.

3-Utiliser le résultat de **A-3** pour montrer que pour $x \in [0;1]$, $f_n(x) \leq 1$ puis, déduire que la suite (U_n) est majorée.

4- La suite est-elle convergente ?

Scanné avec CamScanner

Exercice 1 : (5 points)

Soit f une application du plan dans lui-même. On se propose d'établir que :

f est affine si et seulement si il existe une application vectorielle linéaire φ associée à f.

Partie A : *on suppose que f est affine.*

Soit M, N, P et Q les points d'images respectives M', N', P' et Q' par f.

1- Justifier que : si $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$ alors $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{Q'P'}$.

2- Soit φ l'application vectorielle, du plan dans lui-même, qui à tout vecteur $\overrightarrow{MN}$ associe $\varphi\left(\overrightarrow{MN}\right) = \overrightarrow{f(M)f(N)}$.

a) Démontrer que est φ linéaire.

b) En déduire que : $\varphi\left(\vec{0}\right) = \vec{0}$.

c) Démontrer que si φ' est une application vectorielle linéaire associée à f alors $\varphi = \varphi'$. (On pourra montrer que pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan de représentant $\overrightarrow{MN}$: $\varphi\left(\vec{u}\right) = \varphi'\left(\vec{u}\right)$.)

d) Enoncer le résultat établi dans cette partie.

Partie B : *On suppose dans cette partie qu'il existe une application vectorielle linéaire φ associée à f telle que pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan de représentant $\overrightarrow{MN}$:* $\varphi\left(\vec{u}\right) = \overrightarrow{f(M)f(N)}$.

1- Soit $(A\,;a)$ et $(B\,;a)$ deux points pondérés quelconques de barycentre G.

Démontrer que $f(G)$ est le barycentre des points pondérés $\left(f(A)\,;a\right)$ et $\left(f(B)\,;a\right)$.

2- En déduire que f est une application affine.

3- D'après ce qui précède, comment peut-on montrer qu'une application du plan dans lui-même est affine ?

Partie C :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$, f est l'application du plan dans lui-même qui à tout point M associe le point M' tel que : $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + \left(\overrightarrow{OM}\cdot\vec{j}\right)\vec{i}$

1- Soit φ l'application vectorielle associée à f.

Démontrer que, pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan, on a : $\varphi\left(\vec{u}\right) = \vec{u} + \left(\vec{u}\cdot\vec{j}\right)\vec{i}$.

2- Démontrer alors que f est une application affine.

3- Soit $\vec{u}$ un vecteur quelconque du plan.

On pose $y = \vec{u}\cdot\vec{j}$, où y est un nombre réel.

a) Déterminer l'image par φ du vecteur $\vec{u} - y\vec{i}$.

b) En déduire que f est une transformation affine.

c) Quel est l'image du plan f ?

Exercice 2 : (5 points)

1-a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul k et pour tout entier naturel x, on a :

$$(1-x)\left(1+x+x^2+\ldots+x^{k-1}\right) = 1-x^k.$$

b) Soit un nombre entier a supérieur ou égal à 2, n un entier naturel non nul et d un diviseur positif de n tel que : $n = dk$, $(k \in \mathbb{N})$.

Montrer que : $a^d - 1$ est un diviseur de $a^n - 1$.

c) En déduire que : $2^{2004} - 1$ est divisible par 7 et par 63.

2- On se propose de trouver le reste de la division euclidienne de 7^{1988} par 9.

a) Montrer que : $7^0 \equiv 1[9]$; $7^1 \equiv 1[9]$; $7^2 \equiv 1[9]$; $7^3 \equiv 1[9]$.

b) Que peut-on conjecturer ?

c) Démontrer que, pour tout entier naturel k : $7^{3k} \equiv 1[9]$; $7^{3k+1} \equiv 1[9]$; $7^{3k+2} \equiv 1[9]$.

d) Effectuer la division euclidienne de 1988 par 3.

e) En déduire le reste de la division euclidienne de 7^{1988} par 9.

3- On se propose de résoudre dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation $(E) : 17x - 24y = 9$.

a) Ecrire l'algorithme d'Euclide relatif aux nombres 17 et 24.

b) En déduire une solution particulière de (E).

c) Résoudre alors (E).

Exercice 3 : (10 points)

Partie A :

Le but de cette partie est d'étudier la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x\ln x}{x+1} & si\ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$.

1- Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

2- Soit h la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $h(x) = \ln x + x + 1$.

a) Etudier le sens de variation de h.

b) Etablir que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique β telle que $0,27 \leq \beta \leq 0,28$.

Scanné avec CamScanner

c) En déduire le signe de h sur $]0;+\infty[$.

3-a) Justifier que f est dérivable sur $]0;+\infty[$, puis calculer $f'(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

b) Etudier le sens de variations de f sur $]0;+\infty[$.

c) Déterminer la limite de f en $+\infty$, puis la limite en $+\infty$ de $f(x)-\ln x$. Interpréter graphiquement ce résultat.

d) Construire les courbes représentatives (C) de f et (Γ) de la fonction $x\mapsto \ln x$ dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$. Unité graphique : $4\,cm$.

Partie B :

On se propose de résoudre par la méthode du point fixe l'équation $f(x)=1$.

A cet effet on considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=e.e^{\frac{1}{x}}$ où e est un nombre réel tel que $\ln e=1$.

1- Démontrer que l'équation $f(x)=1$ admet une solution unique α et que $\alpha\in[3,5;3,7]$.

2- Justifier que l'équation $f(x)=1$ équivaut à l'équation $g(x)=x$.

3-a) Etudier le sens de la variation de g.

b) Prouver que, pour tout élément $x\in[3,5;3,7]$, on a : $g(x)\in[3,5;3,7]$.

c) Etablir que pour tout $x\in[3,5;3,7]$, on a :

$$|g'(x)|\le|g'(3,5)|\le\frac{1}{3}.$$

d) En déduire que, pour tout élément $x\in[3,5;3,7]$:

$$|g(x)-\alpha|\le\frac{1}{3}|x-\alpha|.$$

4-Soit (u_n) la suite définie par : $u_0=3,5$ et $u_{n+1}=g(u_n)$.

a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$u_n\in[3,5;3,7]$.

b) Justifier que, pour tout entier naturel n, on a :

$$|u_{n+1}-\alpha|\le\frac{1}{3}|u_n-\alpha|.$$

c) Démontrer que, pour tout entier naturel $n\ge 0$, on a :

$$|u_n-\alpha|\le\frac{1}{5}\times\frac{1}{3^n}.$$

d) Déterminer la limite de la suite (u_n).

e) Trouver le plus petit entier naturel p tel que :

$|u_n-\alpha|\le 10^{-3}$.

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 1 :

Choisissons la bonne réponse.

1	2	3	4	5
B	C	C	C	A

EXERCICE 2 :

1-a) *Justifions que f est dérivable sur $[0;+\infty[$.*

Soient les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x+3}$ et $x \mapsto \ln(x+3)$, la fonction f est dérivable sur $[0;+\infty[$ comme produit de deux fonctions toutes dérivables sur $[0;+\infty[$.

b) Etudions la limite de f en $+\infty$.

Posons : $u = x+3$.

* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{u\to+\infty} \dfrac{\ln(u)}{u} = 0.$

c) Déterminons $f'(x)$.

Pour tout $x \in [0;+\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x+3}\times x+3-\ln(x+3)}{(x+3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1-\ln(x+3)}{(x+3)^2}.$$

d) Déduisons le sens de variation de f.

Pour tout $x \in [0;+\infty[$, $\ln(x+3) \geq \ln 3 \geq \ln e = 1$ alors, $0 \geq 1-\ln(x+3)$ soit, $1-\ln(x+3) \leq 0$.

Il s'ensuit que, $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in [0;+\infty[$ et par conséquent la fonction f est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$.

e) Démontrons que $\forall x \in [0;+\infty[$, $f(x) > 0$.

Comme la fonction f est dérivable sur $[0;+\infty[$ et donc continue sur $[0;+\infty[$ et qu'en plus f est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$ alors on en déduit que :

$f([0;+\infty[) = \left]0;\dfrac{\ln 3}{3}\right]$. En conclusion, Pour tout $x \in [0;+\infty[$, $f(x) > 0$.

AUTRE METHODE

Pour tout $x \in [0;+\infty[$, $\dfrac{1}{x+3} > 0$ et $\ln(x+3) > 0$ par produit, il vient que : $f(x) > 0$.

2- a) *Démontrons que pour tout $x \in [n;n+1]$, $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$.*

De ce qui précède, on sait que la fonction f est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$ ce qui demeure valable pour tout $x \in [n;n+1]$ soit, $n \leq x \leq n+1$, et par suite, $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$.

b) Démontrons :

De ce qui précède, on sait que pour tout $x \in [n;n+1]$ $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$. En intégrant cette inégalité et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que :

$$\int_n^{n+1} f(n+1)\,dx \leq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq \int_n^{n+1} f(n)\,dx$$

c'est-à-dire $\int_n^{n+1} f(n+1)\,dx \leq u_n \leq \int_n^{n+1} f(n)\,dx$

soit finalement : $f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$.

c) Déduisons que la suite (u_n) est décroissante, puis qu'elle est convergente et déterminons sa limite.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-f(n) \leq -u_n \leq f(n+1)$

$f(n+2) \leq u_{n+1} \leq f(n+1)$. En additionnant membres à membres ces deux inégalités, il vient : $f(n+2)-f(n) \leq u_{n+1}-u_n \leq 0$. Donc la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ **est décroissante et minorée par 0.**

Et par conséquent, elle **converge.**

3- *Démontrons :*

Pour tout entier naturel n,

$$I_n = \int_0^n f(x)\,dx = \left[\frac{1}{2}\ln^2(x+3)\right]_0^n$$

$$I_n = \frac{(\ln(n+3))^2}{2} - \frac{(\ln(3))^2}{2}.$$

4-

a) *Justifions :*

Pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$I_n = \sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k} f(x)\,dx = S_n.$$

b) *Déduisons la limite de la suite $\left(\dfrac{1}{n^2}S_n\right)_{n\geq 1}$.*

Pour tout $n \geq 1$, on a :

Scanné avec CamScanner

$$\frac{1}{n^2}I_n=\frac{1}{n^2}S_n=\frac{1}{n^2}\left[\frac{\left(\ln(n+3)\right)^2}{2}-\frac{\left(\ln(3)\right)^2}{2}\right].$$

Il s'ensuit alors que :

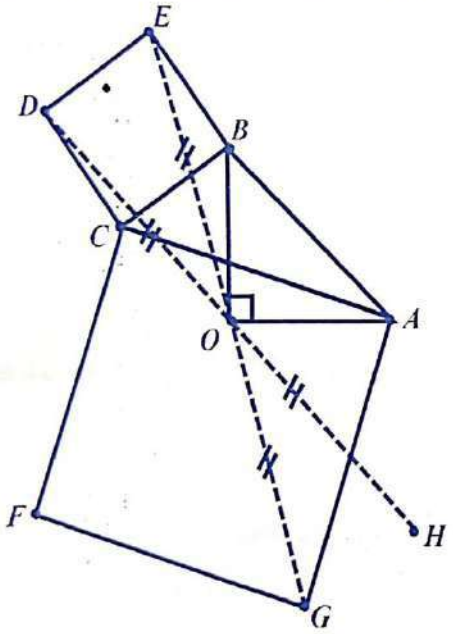
* $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}S_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\left(\frac{\left(\ln(n+3)\right)^2}{2}-\frac{\left(\ln(3)\right)^2}{2}\right)$

* $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}S_n=0.$

EXERCICE 3 :

Rotations - composées de réflexions d'axes sécants.

1-a) *Construisons les carrés $BEDC$ et $ACFG$.*



b) *Donnons les mesures de ces angles :*

* $\left(\widehat{\overrightarrow{BE};\overrightarrow{BC}}\right)=\frac{\pi}{2}.$

* $\left(\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AG}}\right)=\frac{\pi}{2}.$

c) *Déterminons $R_A\circ R_B(E)$.*

$R_A\circ R_B(E)=R_A(C)=G.$

2-a) *Donnons la nature et les éléments caractéristiques de $S_{(AO)}\circ S_{(AB)}$ composée de réflexions d'axes (AB) et (AO).*

On constate que les droites (AB) et (AO) se coupent au point A et comme le triangle AOB est rectangle et isocèle en O, la mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AO}}\right)=\frac{\pi}{4}$.

Alors, $S_{(AO)}\circ S_{(AB)}$ est la rotation de centre A et d'angle $2\times\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AO}}\right)=\frac{\pi}{2}$ qui n'est rien d'autre que R_A. Donc, $S_{(AO)}\circ S_{(AB)}=R_A$ qui est la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

b) *Ecrivons R_B comme composées de deux réflexions.*

$R_B=S_{(AB)}\circ S_{(BO)}.$

c) *Démontrons :*

$R_A\circ R_B=S_{(AO)}\circ S_{(AB)}\circ S_{(AB)}\circ S_{(BO)}.$

$R_A\circ R_B=S_{(AO)}\circ S_{(BO)}.$

Comme les droites (AO) et (BO) sont perpendiculaires, on conclut que $R_A\circ R_B=S_O$.

3- *Justifions que O est le milieu du segment $[EG]$.*

De ce qui précède cf. questions 1-c) et 2-c) on peut affirmer que : $R_A\circ R_B(E)=S_O(E)=G$. Donc, le point O est le milieu du segment $[EG]$.

4-a) *Déterminons l'image de C.*

$R_F\circ S_O\circ R_D(C)=R_F\circ S_O(E)=R_F(G)=C.$

b) *Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $R_F\circ S_O\circ R_D$.*

$R_F\circ S_O\circ R_D$ est la composée des rotations R_A, R_B R_F et R_D. On en conclut que c'est une rotation d'angle $4\times\frac{\pi}{2}=2\pi$ qui n'est rien d'autre que **l'identité** du plan.

D'où, $R_F\circ S_O\circ R_D=I_P$.

5-a) *Plaçons H. (Voir figure précédente).*

b) *Démontrons que $R_F(H)=D$.*

De ce qui précède, comme $R_F\circ S_O\circ R_D=I_P$ on en déduit que : $R_F=\left(S_O\circ R_D\right)^{-1}$ et par conséquent, on a : $R_F(H)=\left(S_O\circ R_D\right)^{-1}(H)$.

Or, $\left(S_O\circ R_D\right)(D)=S_O(D)=H$. On en déduit que $\left(S_O\circ R_D\right)^{-1}(H)=D$ et par suite, $R_F(H)=D$.

c) *Démontrons :*

Scanné avec CamScanner

D'après la relation précédente à savoir $R_F(H)=D$, il vient : $FD=FH$ et $\widehat{HFD}=\frac{\pi}{2}$.

On conclut que le triangle FOD est **rectangle** et **isocèle** en O.

EXERCICE 4 :

1- *Justifions :*

$M(x;y;z)\in(D)$ équivaut à dire qu'il existe un réel $t\in\mathbb{R}$ tel que : $\overrightarrow{EM}=t\vec{u}$.

D'où, $\begin{pmatrix}x-1\\y-1\\z\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ soit, $\begin{cases}x=t+1\\y=1\\z=t\end{cases}$.

2-a) *Démontrons :*

On sait que le point K est milieu de $[MM']$ ce qui se traduit par la relation : $\begin{cases}x_K=\frac{x+x'}{2}\\y_K=\frac{y+y'}{2}\\z_K=\frac{z+z'}{2}\end{cases}$; dire que le point K appartient à la droite (D) signifie d'après ce qui précède qu'il existe $t\in\mathbb{R}$ tel que : $\begin{cases}x_K=t+1\\y_K=1\\z_K=t\end{cases}$.

En remplaçant, il vient :

$\begin{cases}\frac{x+x'}{2}=t+1\\\frac{y+y'}{2}=1\\\frac{z+z'}{2}=t\end{cases}$ et par suite, $\begin{cases}x'=2t+2-x\\y'=2-y\\z'=2t-z\end{cases}$.

b) *Démontrons :*

Soient, $\overrightarrow{MM'}(x'-x\,;y'-y\,;z'-z)$ et $\vec{u}(1;0;1)$.

Les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux signifie que :

$1\times(x'-x)+0\times(y-y')+1\times(z'-z)=0$.

Donc, $(MM')\perp(D)$ équivaut à dire que :

$(x'-x)+(z'-z)=0$.

c) *Déduisons l'expression analytique de S_D.*

De ce qui précède question 2.a), et en remplaçant dans l'égalité $(x'-x)+(z'-z)=0$, on obtient :

$2t+2-x-x+2t-z-z=0\Rightarrow 4t+2-2x-2z=0$

soit, $4t=2x+2z-2$ et par suite : $2t=x+z-1$.

D'où, $\begin{cases}x'=x+z-1+2-x\\y'=2-y\\z'=x+z-1-z\end{cases}$ et enfin, $\begin{cases}x'=z+1\\y'=-y+2\\z'=x-1\end{cases}$

qui est **l'expression analytique** de S_D.

3-a) *Déterminons l'équation cartésienne de (π).*

$M(x,y,z)\in(\pi)$ équivaut à dire que :

$\overrightarrow{EM}\times\vec{u}=0$. Or, $\overrightarrow{EM}(x-1;y-1;z)$ et $\vec{u}(1;0;1)$

d'où, $(x-1)\times1+0\times(y-1)+z=0$ et par suite,

$x+z-1=0$ qui est l'équation cartésienne de (π).

b) *Déterminons l'expression analytique de S_π.*

$M(x',y',z')$ est l'image de $M(x,y,z)$ par S_π si et seulement si d'une part le milieu I du segment $[MM']$ appartient à (π) et d'autre part, les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires. Comme $\begin{cases}x_I=\frac{x+x'}{2}\\y_I=\frac{y+y'}{2}\\z_I=\frac{z+z'}{2}\end{cases}$ et que I doit appartenir à (π) il vient : $x_I+z_I-1=0$

soit, $x+x'+z+z'-2=0$ (1). D'autre part, $\overrightarrow{MM'}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires alors il existe un réel $t\in\mathbb{R}$ tel que :

$\overrightarrow{MM'}=t\vec{u}$. D'où, $\begin{pmatrix}x'-x\\y'-y\\z'-z\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ soit, $\begin{cases}x'=x+t\\y'=y\\z'=z+t\end{cases}$.

En remplaçant dans la relation (1), il vient :

$x+x+t+z+z+t-2=0\Rightarrow t=-x-z+1$ et par suite, $\begin{cases}x'=x-x-z+1\\y'=y\\z'=z-x-z+1\end{cases}$ soit, $\begin{cases}x'=-z+1\\y'=y\\z'=-x+1\end{cases}$

qui est **l'expression analytique de S_π.**

c) *Déterminons l'expression analytique de $S_D\circ S_\pi$.*

$S_D\circ S_\pi(M)=M'$ avec, $S_\pi(M)=M_1$ qui équivaut à :

Scanné avec CamScanner

$\begin{cases} x_1 = -z+1 \\ y_1 = y \\ z_1 = -x+1 \end{cases}$ et $S_D(M_1) = M'$ ce qui conduit à

$\begin{cases} x' = z_1 + 1 \\ y' = -y_1 + 2 \\ z' = x_1 - 1 \end{cases}$ et par suite il vient :

$\begin{cases} x' = (-x+1)+1 = -x+2 \\ y' = -y+2 \\ z' = (-z+1)-1 = -z \end{cases}$

L'expression analytique de $S_D \circ S_\pi(M) = M'$ est :

$\begin{cases} x' = -x+2 \\ y' = -y+2 . \\ z' = -z \end{cases}$

d) *Déterminons l'expression analytique de S_E.*

$M(x', y', z')$ est l'image de $M(x, y, z)$ par S_E si et seulement si $\begin{cases} x_E = \dfrac{x+x'}{2} \\ y_E = \dfrac{y+y'}{2} \\ z_E = \dfrac{z+z'}{2} \end{cases}$ avec $E(1;1;0)$ ce qui conduit à : $\begin{cases} 1 = \dfrac{x+x'}{2} \\ 1 = \dfrac{y+y'}{2} \\ 0 = \dfrac{z+z'}{2} \end{cases}$ et par suite à : $\begin{cases} x' = -x+2 \\ y' = -y+2 . \\ z' = -z \end{cases}$

Donc, S_E a pour expression analytique : $\begin{cases} x' = -x+2 \\ y' = -y+2 . \\ z' = -z \end{cases}$

e) *Concluons* :

On remarque que, $S_D \circ S_\pi(M) = S_E(M)$.

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 1 :

Choisissons la bonne réponse.

1	2	3	4	5
C	A	B	D	

EXERCICE 2 :

A. Résolution d'une équation diophantienne

1-a) ***Justifions que l'équation*** (E_1) ***admet au moins une solution.***

Le $PGCD(27\,;17)=1$ alors, d'après le théorème de Bézout, l'équation (E_1) admet au moins une solution.

b) ***Utilisons l'algorithme d'Euclide, et déterminons un couple*** $(x_0\,;y_0)$ ***solution de*** (E_1).

$27=17\times1+10$

$17=10\times1+7$

$10=7\times1+3$

$7=3\times2+\underline{1}$ Ce qui confirme que le $PGCD(27\,;17)=1$

$3=3\times1+0.$

* **Recherchons les coefficients de Bézout :**

$1=7-3\times2$

$=7-2(10-7)$

$=7-2\times10+2\times7$

$=3\times7-2\times10$

$=3(17-10)-2\times10$

$=3\times17-3\times10-2\times10$

$=3\times17-5\times10$

$=3\times17-5(27-17)$

$=3\times17+5\times17-5\times27$

$1=(8)\times17+(5)\times-27.$

On en déduit que : $(x_0\,;y_0)=(8\,;5)$ est une solution particulière de (E_1).

c) ***Résolvons cette équation.***

De ce qui précède, on en déduit que :

$17(x-8)-27(y-5)=0$ ce qui équivaut à dire que :

$17(x-8)=27(y-5)$. Or, le $PGCD(27\,;17)=1$ ce qui veut dire que 27 et 17 sont premiers entre eux et donc, d'après le théorème de Gauss, il existe un entier relatif $k\in\mathbb{Z}$, tel que : $x=8+27k$ et $y=5+17k$.

2- Déterminons-en une solution particullère.

D'après ce qui précède, une solution particulière de l'équation (E) est donc : $(x_0\,;y_0)=(8m\,;5m)$.

3- Résolvons l'équation (E).

En s'inspirant de la résolution de l'équation (E_1), on en déduit qu'il existe un entier relatif $k\in\mathbb{Z}$, tel que :

$x=8m+27k$ et $y=5m+17k$.

B. Application : Cryptographie

1- En utilisant cette procédure de codage, Codons le mot « B A C ».

• Pour la lettre **B**, $x=1$ et $17x+5=17(1)+5=22$ or, $22\equiv22[27]$ d'où $m=22$ ce qui correspond d'après le tableau à la lettre **W**.

• Pour la lettre **A**, $x=0$ et $17x+5=17(0)+5=5$ or, $5\equiv5[27]$ d'où $m=5$ ce qui correspond d'après le tableau à la lettre **F**.

• Pour la lettre **C**, $x=2$ et $17x+5=17(2)+5=39$ or, $39\equiv12[27]$ d'où $m=12$ ce qui correspond d'après le tableau à la lettre **M**.

Alors, le mot « **B A C** » est crypté en « **W F M** ».

2-a) Montrons que pour tous les nombres entiers relatifs x ***et*** m ***:*** $17x\equiv m[27]$ ***équivaut à*** $x\equiv8m[27]$.

Si $17x\equiv m[27]$, alors on peut dire qu'il existe un entier relatif $y\in\mathbb{Z}$ tel que $17x=27y+m$ ou encore :

$17x-27y=m$. Or, d'après ce qui précède dans la partie A, il vient : $x=8m+27k$ qui équivaut à $x\equiv8m[27]$.

b) Déduisons que $8m-40$ ***est le reste de la division euclidienne de*** x ***par*** 27.

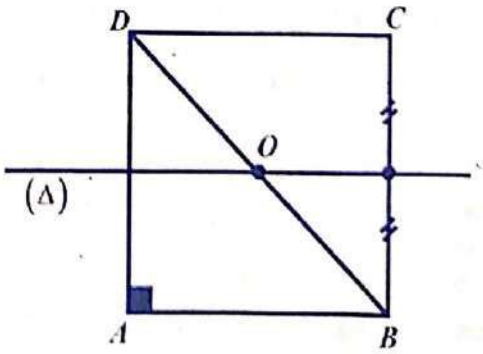
Selon l'énoncé, $17x+5\equiv m[27]$ ce qui équivaut à :

$17x\equiv(m-5)[27]$. De ce qui précède, si $17x\equiv m[27]$ alors $x\equiv8m[27]$. Et donc, si $17x\equiv(m-5)[27]$ alors $x\equiv8(m-5)[27]$ soit, $x\equiv8m-40[27]$.

En conclusion, $8m-40$ est le reste de la division euclidienne de x par 27.

EXERCICE 3 : Isométries du plan

1- Faisons une figure soignée.



Scanné avec CamScanner

2-a) *Montrons que O est l'unique point du plan invariant par f.*

Si un point M du plan est tel que : $f(M)=M$, alors M appartient aux médiatrices des segments $[AC]$, $[BD]$. Alors, par conséquent M est le point d'intersection des droites (AC) et (BD). En conséquence, s'il existe un point invariant M par f il est unique. D'autre part, le seul point d'intersection des droites (AC) et (BD) est le point O. En conclusion, O est l'unique point invariant.

b) *Déduisons la nature et les éléments caractéristiques de f.*

Puisque f est une isométrie qui admet un unique point invariant O, on en déduit que f est une rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$; en effet $mes\left(\widehat{\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}}\right)=\frac{\pi}{2}$.

3-a) *Déterminons $g(A)$ et $g(C)$.*

* $g(A)=f\circ S_{(\Delta)}(A)=f\left[S_{(\Delta)}(A)\right]$ avec, $S_{(\Delta)}(A)=D$ et ainsi, $f\left[S_{(\Delta)}(A)\right]=f(D)=A$ d'où finalement, $g(A)=A$.

* $g(C)=f\circ S_{(\Delta)}(C)=f\left[S_{(\Delta)}(C)\right]$ avec, $S_{(\Delta)}(C)=B$ et ainsi, $f\left[S_{(\Delta)}(C)\right]=f(B)=C$ d'où finalement, $g(C)=C$.

* ***Déduisons que $g=S_{(AC)}$.***

g est une composée d'isométries donc c'est une isométrie qui en plus, admet au moins deux points invariants que sont les point A et C ; g est donc une symétrie orthogonale d'axe (AC).

b) *Montrons que : $h=S_{(BD)}$.*

* $h=S_{(\Delta)}\circ f(B)=S_{(\Delta)}\left[f(B)\right]$ or, $f(B)=C$ et ainsi, $S_{(\Delta)}\left[f(B)\right]=S_{(\Delta)}[C]=B$. Donc, $h(B)=B$.

* $h=S_{(\Delta)}\circ f(D)=S_{(\Delta)}\left[f(D)\right]$ or, $f(D)=A$ et ainsi, $S_{(\Delta)}\left[f(D)\right]=S_{(\Delta)}[A]=D$. Donc, $h(D)=D$.

h est la composée de deux isométries et donc est une isométrie qui admet également à son tour, au moins deux points invariants. Comme précédemment, h est une symétrie orthogonale d'axe (BD).

4- *Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de $g\circ h$.*

Comme les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires au point O, alors $g\circ h$ est la symétrie de centre O.

EXERCICE 4 :

Etude d'une fonction logarithme népérien – calcul d'aire

Partie A : Encadrement d'une intégrale

Soit g la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $g(x)=\frac{\ln x}{x}$.

1-a) *Etudions le sens de variation de la fonction g.*

La fonction g est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$ comme produit de deux fonctions continues et dérivables sur $]0;+\infty[$

* **Calcul de la dérivée :**

$\forall x\in]0;+\infty[,\ g'(x)=-\frac{1}{x^2}\times\ln x+\frac{1}{x}\times\frac{1}{x}$

$g'(x)=\frac{1}{x^2}(-\ln x+1)$

$\boxed{g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}.}$

$g'(x)=0$ équivaut à dire que : $1-\ln x=0$ soit alors, $\ln x=1\Rightarrow x=e$.

* Pour $x\in]0;e[$, $1-\ln x>0$ et $g'(x)>0$;

* Pour $x\in]e;+\infty[$, $1-\ln x<0$ et $g'(x)<0$.

Tableau de variations

x	0		e		$+\infty$
$g'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$g(x)$	|| $-\infty$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0

* Pour $x\in]0;e[$, la fonction g est strictement croissante.

* Pour $x\in]e;+\infty[$, la fonction g est strictement décroissante.

b) *Déduisons que pour $n\geq 3$ et $n\leq x\leq n+1$, on a :*

$g(n+1)\leq g(x)\leq g(n)$.

Comme $n\geq 3$ donc $n>e$, la fonction g est strictement décroissante pour $n\leq x\leq n+1$ et par conséquent, il vient : $g(n+1)\leq x\leq g(n)$.

2- On pose, pour $n>1$: $a_n=\int_n^{n+1}g(x)\,dx$.

Scanné avec CamScanner

a) *A l'aide d'une intégration par parties, calculons* a_n.

$$a_n = \int_n^{n+1} g(x)\,dx = \int_n^{n+1} \frac{\ln x}{x}\,dx.$$

$$a_n = \int_n^{n+1} \frac{\ln x}{x}\,dx.$$

Posons : $u(x) = \ln x$; $u'(x) = \frac{1}{x}$

$v'(x) = \frac{1}{x}$; $v(x) = \ln x$.

$$a_n = \int_n^{n+1} \frac{\ln x}{x}\,dx = \left[(\ln x)^2\right]_n^{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{\ln x}{x}\,dx$$

$$a_n = \left[(\ln x)^2\right]_n^{n+1} - a_n$$

$$2a_n = \left[\ln(n+1)\right]^2 - \left[\ln(n)\right]^2 = \left[\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\right]^2$$

$$\boxed{a_n = \frac{1}{2}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^2.}$$

b) ***Montrons que pour tout*** $n \geq 3$, $0 < a_n \leq g(n)$.

D'après ce qui précède, on sait depuis la question 1-b), que pour $n \geq 3$, $g(n+1) \leq g(x) \leq g(n)$. Alors, on a :

$$0 < \int_n^{n+1} g(x)\,dx \leq \int_n^{n+1} g(n)\,dx = g(n).$$

En conclusion, on obtient : $0 \leq a_n \leq g(n)$ pour tout $n \geq 3$.

* ***Déduisons la limite de*** a_n ***en*** $+\infty$.

$$\lim_{n\to+\infty} g(n) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n} \times \ln n\right) = 0.$$

D'après le théorème des gendarmes, $\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = 0.}$

Partie B : Etude d'une fonction - Calcul d'aire

1-a) ***Justifions que*** f ***est dérivable sur*** $]0;+\infty[$.

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{\ln x}{x} - 1 = g(x) + \frac{x}{2} - 1.$$

f est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme somme de deux fonctions dérivable sur $]0;+\infty[$.

* ***Calculons*** $f'(x)$.

$$f'(x) = g'(x) + \frac{1}{2} = \frac{1-\ln x}{x^2} + \frac{1}{2} = \frac{2 - 2\ln x + x^2}{2x^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{x^2 - 2\ln x + 2}{2x^2}.}$$

b) ***Montrons que la fonction*** f' ***admet un minimum que l'on précisera, puis déduire le signe*** $f'(x)$.

$f'(x)$ a le même signe que : $v(x) = x^2 - 2\ln x + 2$.

Etudions le signe de la fonction v qui est dérivable sur $]0;+\infty[$; sa dérivée est : $v'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2x^2-2}{x}$.

$v'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2(x^2-1)}{x} = 0$ ce qui implique que : $x = 1$.

Dressons le tableau de variations de v.

x	0		1		$+\infty$
$v'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$v(x)$	‖ $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

Le numérateur $v(x) = x^2 - 2\ln x + 2$ de $f'(x)$ est strictement positif d'après le tableau ci-dessus. f' admet ainsi un minimum qui est 0.

* ***Déduisons le signe*** $f'(x)$.

De ce qui précède, $\forall x \in]0;+\infty[$, $f'(x) > 0$.

c) ***Dressons le tableau de variations de*** f.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

2-a) ***Montrons que*** $(\mathscr{C})$ ***admet au voisinage de*** $+\infty$, ***une asymptote*** $(\mathscr{D})$ ***dont on précisera l'équation.***

Calculons : $\lim_{n\to+\infty}\left[f(x) - \left(\frac{x}{2} - 1\right)\right] = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{\ln x}{x}\right] = 0.$

Alors, la droite d'équation $y = \frac{x}{2} - 1$ est une asymptote oblique à la courbe $(\mathscr{C})$ à $+\infty$.

b) ***Déterminons les positions relatives de*** $(\mathscr{C})$ ***et*** $(\mathscr{D})$.

$$f(x) - \left(\frac{x}{2} - 1\right) = \frac{\ln x}{x}.$$

* Pour $x \in]0;1[$, $f(x) - \left(\frac{x}{2} - 1\right) = \frac{\ln x}{x} < 0$;

La courbe $(\mathscr{C})$ est en dessous de la droite $(\mathscr{D})$.

* Pour $x \in]1;+\infty[$, $f(x) - \left(\frac{x}{2} - 1\right) = \frac{\ln x}{x} > 0$.

La courbe $(\mathscr{C})$ est au-dessus de la droite $(\mathscr{D})$.

* Le point de coordonnées $\left(1;-\frac{1}{2}\right)$ est le point d'intersection de $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{D})$.

Scanné avec CamScanner

sujet voir p.17-18

3- *Calculons cette aire.*

Soit $\mathscr{A}$ cette aire : $\mathscr{A} = \int_n^{n+1} \left[f(x) - \left(\frac{x}{2} - 1 \right) \right] dx$.

$$\mathscr{A} = \int_n^{n+1} \left(\frac{\ln x}{x} \right) dx.$$

D'après les calculs précédents, on a :

$$\boxed{\mathscr{A} = \frac{1}{2} \left[\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right]^2.}$$

4- *Déterminons la limite de cette aire quand n tend vers $+\infty$.*

De ce qui précède, on a : $\boxed{\lim_{n \to +\infty} \mathscr{A} = 0.}$

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 1 :

Choisissons la bonne réponse.

1	2	3	4
a_1 et b_1	a_3 et b_3	a_2 et b_1	a_3 et b_3

EXERCICE 2 :

Soient a, b et x trois nombres entiers non nuls avec $a=\overline{x432}^5$ et $b=\overline{11}^5$.

1- Résolvons dans $\mathbb{Z}$ l'équation $a\equiv 0[b]$.

a et b sont en base 5, convertissons-les en base décimale on obtient : $a=x\times5^3+4\times5^2+3\times5^1+2\times5^0$ soit, $a=125x+100+15+2=125x+117$ de façon analogue, on a : $b=\overline{11}^5=1\times5^1+1\times5^0=6.$

$a\equiv 0[b]$ équivaut à $125x+117\equiv 0[6]$ ce qui conduit à $6(20x+19)+5x+3\equiv 0[6]\Rightarrow 5x\equiv -3[6].(2)$

Or, le $PGCD(5;6)=1$ d'après le théorème de Bézout, il existe $u\in\mathbb{Z}$ et $v\in\mathbb{Z}$ tels que : $5u+6v=1$ on trouve alors $5(-1)+6(1)=1$ et par suite, $5(-1)\equiv 1[6].$

En multipliant la relation (2) par (-1), on obtient :

$5x\times -1\equiv 3[6]$ comme, $5(-1)\equiv 1[6]$ il vient alors :

$x\equiv 3[6]$ d'où, $x=6k+3=2(3k+1),\ k\in\mathbb{Z}.$

2- Déterminons l'expression de a et b dans la base décimale.

De ce qui précède, on a :

$a=x\times5^3+4\times5^2+3\times5^1+2\times5^0$

$a=125x+100+15+2$

* $a=125x+117.$

* $b=1\times5^1+1\times5^0=6.$

3- Démontrons :

$PGCD(a;b)=PGCD(5x+3;6).$

$a=6(20x+19)+5x+3$ et $b=6.$

$PGCD(6(20x+19)+5x+3;6)=PGCD(5x+3;6).$

4-a) Donnons l'ensemble des diviseurs de 6.

On a : $D_6=\{-6;-3;-2;-1;1;2;3;6\}.$

b) Déterminons ces valeurs de x.,

Les nombres a et b sont premiers entre eux lorsque le $PGCD(a;b)=PGCD(5x+3;6)=1.$

On remarque que si x est un entier pair non nul, on a les nombres a et b premiers entre eux.

EXERCICE 3 :

Partie A : Equation dans $\mathbb{C}$

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) :

$z^3-(3+3i)z^2+(-6+4i)z+10-14i=0.$

1- Démontrons que le nombre complexe $z_1=1-i$ est une solution de (E).

$z_1^2=(1-i)^2=1-2i+i^2=-2i$

$z_1^3=-2i(1-i)=-2i+2i^2=-2i-2.$

Posons : $z_1^3-(3+3i)z_1^2+(-6+4i)z_1+10-14i=K$

$K=(-2i-2)-(3+3i)(-2i)+(-6+4i)(1-i)+10-14i$

$K=(-2i-2)-(3+3i)(-2i)+(-6+4i)(1-i)+10-14i$

$K=-2i-2+6i+6i^2-6+6i+4i-4i^2+10-14i$

$K=-2i-2+6i-6-6+6i+4i+4+10-14i$

$K=-14+14+16i-16i$

$k=0$; donc $z_1=1-i$ est une solution de (E).

2- Résolvons cette équation dans $\mathbb{C}$:

$z^2-(2+4i)z-12+2i=0.$

Calculons le discriminant $\Delta=b^2-4ac$ on a :

$\Delta=(2+4i)^2-4(-12+2i)$

$=4+16i+16i^2+48-8i$

$=4+16i-16+48-8i$

$\Delta=36+8i=4(9+2i)$

Déterminons le nombre complexe $\delta=\alpha+i\beta$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$, $\beta\in\mathbb{R}$ tels que $\Delta=\delta^2=(\alpha+i\beta)^2$ Il vient :

$\delta^2=\alpha^2+2\alpha\beta i-\beta^2$. Et par suite,

$$\begin{cases}\alpha^2-\beta^2=36\\2\alpha\beta=8\\\alpha^2+\beta^2=1360\end{cases}$$

En additionnant la 1ère et la 3ème équation, on obtient : $2\alpha^2=36+1360=1396\Rightarrow\alpha^2=698$ et par suite, on a :

$\alpha=\sqrt{698}$ d'où, $\beta=\dfrac{4}{\sqrt{698}}$. On obtient alors que :

$$\delta=\sqrt{698}+i\frac{4}{\sqrt{698}}=\sqrt{698}+i\frac{4\sqrt{698}}{698}.$$

Les solutions sont : $z_2=\dfrac{2+4i+\delta}{2}$ et $z_3=\dfrac{2+4i-\delta}{2}$.

L'ensemble solution est : $S=\{z_2;z_3\}.$

Scanné avec CamScanner

3-a) *Développons cette expression :*

$$p(z)=(z-1+i)\left[z^2-(2+4i)z-12+2i\right]$$
$$=z^3-z^2+iz^2-(2+4i)z(z-1+i)-12(z-1+i)+2i(z-1+i)$$
$$=z^3-z^2+iz^2-\left[2z^2-2z+2zi+4iz^2-4iz+4i^2z\right]-12(z-1+i)+2i(z-1+i)$$
$$p(z)=z^3-z^2+iz^2-2z^2+2z-2iz-4iz^2+4iz+4z-12z+12-12i+2iz-2i-2$$
$$p(z)=z^3-3z^2-3iz^2-6z+4iz-14i+10$$
$$p(z)=z^3-\left(3z^2+3i\right)z^2+(-6+4i)z-14i+10.$$

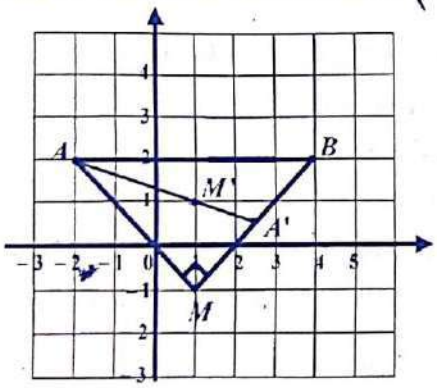
b) *Déduisons toutes les solutions de (E).*

De ce qui précède, l'ensemble solution de (E) est :

$$S=\left\{z_1\,;z_2\,;z_3\right\}.$$

Partie B : Nombres complexes et géométrie

1- *Plaçons ces points dans le repère $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.*



2-a) *Déterminons la forme exponentielle du nombre complexe $\frac{z_A-z_M}{z_B-z_M}$.*

$$\frac{z_A-z_M}{z_B-z_M}=\frac{(-2+2i-1+i)}{(4+2i-1+i)}$$
$$\frac{z_A-z_M}{z_B-z_M}=\frac{-3+3i}{3+3i}=i\frac{3+3i}{3+3i}=i=e^{i\pi/2}.$$

b) *Déduisons la nature du triangle AMB.*

AMB est un triangle rectangle isocèle en M.

3-a) *Déterminons l'affixe du point M'.*

$\overrightarrow{M'A}+\overrightarrow{M'M}+\overrightarrow{M'B}=\vec{0}$ par définition. D'après la relation de Chasles, on a : $\overrightarrow{M'A}+\overrightarrow{M'A}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{M'A}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ soit, $3\overrightarrow{M'A}=-\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}$ et par suite, $\overrightarrow{AM'}=\frac{\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AB}}{3}$ donc,

$$z_{M'}-z_A=\frac{z_M-z_A+z_B-z_A}{3}$$
$$z_{M'}=z_A+\frac{z_M-z_A+z_B-z_A}{3}$$
$$z_{M'}=-2+2i+\frac{(1-i+2-2i+4+2i+2-2i)}{3}$$
$$z_{M'}=-2+2i+\frac{9-3i}{3}=-2+2i+3-i$$
$$z_{M'}=1+i.$$

b) *Démontrons :*

Pour $M\neq A$, déterminons l'affixe $z_{A'}$ du point A', milieu du segment $[MB]$. Il vient :

$$z_{A'}=\frac{z_B+z_M}{2}=\frac{4+2i+1-i}{2}=\frac{5+i}{2}.$$

On a : $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AM'}}\right)=\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AA'}}\right)=\frac{AM}{AA'}$

Or, $AM=\left|z_M-z_A\right|=\left|1-i+2-2i\right|=\left|3-3i\right|=\sqrt{18}$

et $AA'=\left|z_{A'}-z_A\right|=\left|\frac{5+i}{2}+2-2i\right|=\left|\frac{9}{2}-\frac{3i}{2}\right|=\frac{\sqrt{90}}{2}.$

$$AA'=\frac{\sqrt{90}}{2}=\frac{\sqrt{9\times10}}{2}=3\frac{\sqrt{10}}{2}.$$
$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AM'}}\right)=\frac{AM}{AA'}=\frac{\sqrt{18}}{3\frac{\sqrt{10}}{2}}$$
$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AM'}}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{1}\times\frac{2}{3\sqrt{10}}$$
$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AM'}}\right)=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$
$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AM'}}\right)^2+\sin\left(\widehat{\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AM'}}\right)^2=1$$
$$\sin\left(\widehat{\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AM'}}\right)^2=1-\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AM'}}\right)^2$$
$$\sin\left(\widehat{\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AM'}}\right)=\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2}$$
$$\sin\left(\widehat{\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AM'}}\right)=\sqrt{1-\frac{4\times5}{25}}=\sqrt{\frac{25-20}{25}}$$

Scanné avec CamScanner

$$\sin\left(\widehat{\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AM'}}\right)=\sqrt{\frac{25-20}{25}}=\sqrt{\frac{5}{25}}$$

$$\sin\left(\widehat{\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AM'}}\right)=\sqrt{\frac{1}{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

$$\frac{AM'}{AM}=\frac{\left|z_{M'}-z_A\right|}{\left|z_M-z_A\right|}=\frac{\left|1+i+2-2i\right|}{\left|1-i+2-2i\right|}$$

$$\frac{AM'}{AM}=\frac{\left|1+i+2-2i\right|}{\left|1-i+2-2i\right|}=\frac{\left|3-i\right|}{\left|3-3i\right|}$$

$$\frac{AM'}{AM}=\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{18}}=\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{5}}{3\sqrt{2}}$$

$$\boxed{\frac{AM'}{AM}=\frac{\sqrt{5}}{3}.}$$

c) *Déduisons la nature et les éléments caractéristiques de f.*

De ce qui précède on déduit que f est une similitude directe de centre A, de rapport $\frac{\sqrt{5}}{3}$ et d'angle $\theta=\left(\widehat{\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AM'}}\right)$.

EXERCICE 4 :

Partie A : Etude d'une fonction

1-a) *Déterminons* $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x)$.

* $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\ln x)^n}{x}=+\infty$ pour n pair ;

* $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\ln x)^n}{x}=-\infty$ pour n impair.

Donnons une interprétation graphique de ce résultat.

Alors la droite d'équation $x=0$ est une asymptote verticale à (C_n).

b) *Déterminons* $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$.

$$\boxed{* \lim_{x\to+\infty} f_n(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{\frac{1}{x^n}}\right)^n=0.}$$

Donnons une interprétation graphique de ce résultat.

Alors la droite d'équation $y=0$ est une asymptote horizontale à (C_n).

2-a) Calculons $f_n'(x)$

f_n est une fonction définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$ à savoir $u:x\mapsto\frac{1}{x}$ et $v:x\mapsto(\ln x)^n$.

Pour tout $x\in]0;+\infty[$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$f_n'(x)=\frac{n\times\frac{1}{x}(\ln x)^{n-1}\times x-(\ln x)^n}{x^2}$$

$$f_n'(x)=\frac{n(\ln x)^{n-1}-(\ln x)^n}{x^2}$$

$$\boxed{f_n'(x)=\frac{(\ln x)^{n-1}(n-\ln x)}{x^2}.}$$

$\forall x\in]0;+\infty[,\ x^2>0$; alors le signe de f_n' est celui de $(n-\ln x)(\ln x)^{n-1}$.

b) *Etudions le signe de* $f_n'(x)$.

$(n-\ln x)(\ln x)^{n-1}=0\Rightarrow n-\ln x=0$ ou $(\ln x)^{n-1}=0$.

Or, $n-\ln x=0\Rightarrow x=e^n$ et $(\ln x)^{n-1}=0\Rightarrow x=1$.

- Pour n pair, $n-1$ est impair on a :

x	0		1		e^n	$+\infty$
$n-\ln x$	$+$		$+$	0	$-$	
$(\ln x)^{n-1}$	$-$	0	$+$		$+$	

- ***Dressons le tableau de variations***

x	0		1		e^n	$+\infty$
$f_n'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	e^n ↘	0	↗	$\left(\frac{n}{e}\right)^n$	↘	0

- Pour n impair, $n-1$ est pair on a :

x	0		0		1	e^n
$n-\ln x$	$+$		$+$	0	$-$	
$(\ln x)^{n-1}$	$+$	0	$+$		$+$	

- ***Dressons le tableau de variations***

x	0		0		1	e^n
$f_n'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	$-\infty$ ↗	0	↗	$\left(\frac{n}{e}\right)^n$	↘	0

Scanné avec CamScanner

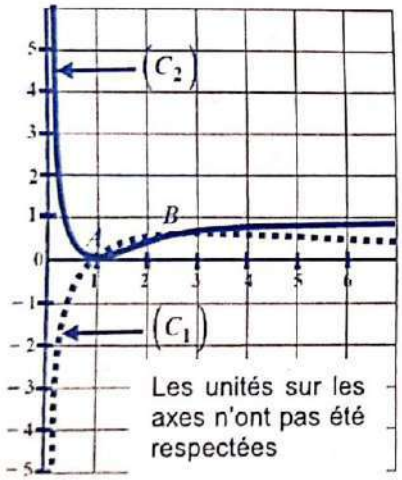
3- *Démontrons :*

Pour tout $x \in]0\,;+\infty[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$f_{n+1}(x) = f_n(x)$ équivaut à : $\dfrac{(\ln x)^{n+1}}{x} = \dfrac{(\ln x)^n}{x}$

$(\ln x)_t^{n+1} - (\ln x)^n = 0$ soit, $(\ln x)^n[\ln x - 1] = 0$ et par suite, $(\ln x)^n = 0$ ou $\ln x - 1 = 0$ et finalement, $x = 1$ ou $x = e$. Ainsi, pour $x = 1$, $f_n(1) = 0$ et pour $x = e$, on a : $f_n(e) = e^{-1}$. Donc, les courbes (C_n) se coupent en aux $A(1\,;0)$ et $B(e\,;e^{-1})$.

4- *Le tracé des courbes (C_1) et (C_2).*



Partie B : Calcul d'intégrale

1- *Calculons :*

$$u_n = \int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x}\,dx = \left[\frac{(\ln x)^{n+1}}{n+1}\right]_1^e = \frac{1}{n+1}.$$

2- On pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k+1}\right)^2 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^2}.$$

a) *Calculons S_1 et S_2.*

- S_1
- $S_2 = 1 + \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{5}{4}$.

b) *Démontrons par récurrence :*

pour $n = 1$ on a : $\dfrac{\pi^2}{6} \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{3} \leq 1 < \dfrac{\pi^2}{6} \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{4}{3}$ qui équivaut à $\dfrac{2\pi^2}{54} \leq 1 < \dfrac{8\pi^2}{54}$ la propriété est initialisée.

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 1 :

1- Déterminons et représentons l'ensemble (Σ).

Soit M un point du plan. $M \in (\Sigma)$ équivaut à dire que :

$MA = 3MB$ soit, $\left(\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}\right)\left(\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\right) = 0$. Soit I le barycentre des points $(A,1)$ et $(B,-3)$ et J le barycentre des points $(A,1)$ et $(B,3)$ il vient :

$\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right) - 3\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)$

$\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} - 3\overrightarrow{MI} - 3\overrightarrow{IB}$

$\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} - 3\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} - 3\overrightarrow{IB}$ *or*, $\left(\overrightarrow{IA} - 3\overrightarrow{IB}\right) = \vec{0}$

d'où, $\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = -2\overrightarrow{MI}$.

Et de façon analogue, on a :

$\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \left(\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JA}\right) + 3\left(\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JB}\right)$

$\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JA} + 3\overrightarrow{MJ} + 3\overrightarrow{JB}$

$\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MJ} + 3\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JA} + 3\overrightarrow{JB}$ *or*, $\left(\overrightarrow{JA} + 3\overrightarrow{JB} = \vec{0}\right)$

d'où, $\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = 4\overrightarrow{MJ}$.

Ainsi, $\left(\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}\right)\left(\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\right) = 0$ équivaut alors à $-2\overrightarrow{MI}\left(4\overrightarrow{MJ}\right) = 0$ soit, $\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} = 0$.

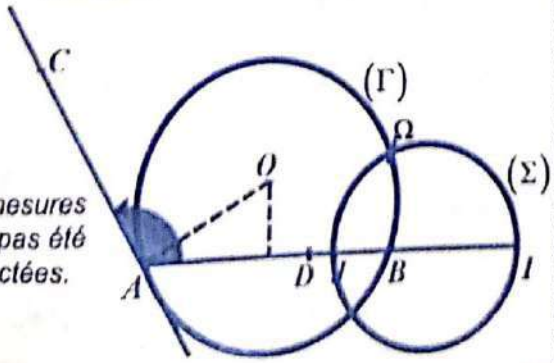
(Σ) est donc le cercle de diamètre $[IJ]$.

I étant le barycentre des points $(A,1)$ et $(B,-3)$ il vient : $\overrightarrow{IA} - 3\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} - 3\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}\right) = \vec{0}$ soit, $-2\overrightarrow{IA} = 3\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ de façon analogue, on a : J étant le barycentre des points $(A,1)$ et $(B,3)$, il vient :

$\overrightarrow{JA} + 3\overrightarrow{JB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{JA} + 3\left(\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AB}\right) = \vec{0}$ et ainsi,

$$4\overrightarrow{JA} = 3\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}.$$

La représentation de (Σ).



Les mesures n'ont pas été respectées.

2- Déterminons et représentons l'ensemble (Γ).

Soit O un point de la médiatrice du segment $[AB]$ tel que $mes\left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}\right) = \frac{2\pi}{3}$, l'ensemble des points tel que $mes\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}\right) = \frac{\pi}{3}[\pi]$ est le cercle de centre O passant par les points A et B et privé de ces points.
Sa représentation est sur la figure précédente.

3-a) *Plaçons le point* C.

$r_A(B) = C$ équivaut à dire :

$$AB = AC \text{ et } mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right) = \frac{2\pi}{3}.$$

(Voir figure précédente).

b) *Plaçons le point* D.

$$\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}.$$

Le point D est placé sur la figure précédente.

4-a) *Déterminons le rapport et l'angle de* s.

$s(A) = B$ et $s(C) = D$ alors, $k = \frac{BD}{AC}$. D'autre part, on sait que : $AB = AC = 6$ et $BD = AB - AD$ soit, $BD = AB - \frac{2}{3}AB = \frac{1}{3}AB = 2$. Ainsi, $k = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

$s(A) = B$ et $s(C) = D$ et θ l'angle de la similitude s.

Il vient : $\theta = mes\left(\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BD}}\right) = \pi + mes\left(\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{DB}}\right)$

Ainsi, $\theta = \pi + \left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$.

s est la similitude directe de rapport $k = \frac{1}{3}$ et d'angle de mesure $\theta = \frac{\pi}{3}$.

b) *Exprimons* ΩB ***en fonction de*** ΩA.

Ω est le centre de la similitude s et $s(A) = B$ donc on a : $\Omega B = \frac{1}{3}\Omega A$.

Donnons ensuite une mesure de $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega A};\overrightarrow{\Omega B}}\right)$.

$$mes\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega A};\overrightarrow{\Omega B}}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

c) *Déduisons la position de* Ω ***et plaçons-le sur la figure.***

$\frac{\Omega B}{\Omega A} = \frac{1}{3}$ et $mes\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega A};\overrightarrow{\Omega B}}\right) = \frac{\pi}{3}$; donc Ω appartient à

Scanné avec CamScanner

$(\Sigma)\cap(\Gamma)$ et appartient également au demi-plan de frontière (AB) contenant O.

d) *Démontrons que les points Ω, A, C et D sont cocycliques.*

$\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}\right)=\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)$ d'après la relation de Chasles. Or, $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)=\vec{0}$ en effet les points A, B et D sont alignés ainsi, $\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}\right)=\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)$ alors, $\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}\right)=-\frac{2\pi}{3}$. D'autre part, on sait que : $mes\left(\overrightarrow{\Omega A};\overrightarrow{\Omega B}\right)=\frac{\pi}{3}$, il vient donc que : $mes\left(\overrightarrow{\Omega A};\overrightarrow{\Omega B}\right)=mes\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}\right)+\pi$ alors, les points Ω, A, C et D sont cocycliques.

EXERCICE 2 :

1- *Vérifions que $p(A)=\frac{27}{40}$.*

Soit Ω l'univers des éventualités, $card(\Omega)=10\times4=40$

$card(A)=7\times3+3\times2=27$ et ainsi, $\boxed{p(A)=\frac{27}{40}.}$

* ***Calculons $p(B)$.***

$card(B)=3\times2=6$; il vient : $\boxed{p(B)=\frac{6}{40}=\frac{3}{20}.}$

2-

a) *Déterminons les valeurs prises par X.*

$X\in\{-200\,;\,0\,;\,400\}$.

b) *Déterminons la loi de probabilité de X.*

* $p(X=-200)=p(A)=\frac{27}{40}$;

* $p(X=0)=\frac{card(X=0)}{card(\Omega)}=\frac{7}{40}$;

* $p(X=400)=p(B)=\frac{6}{40}=\frac{3}{20}$.

Résumons tout ceci dans un tableau :

X	-200	0	400
$p(X)$	$\frac{27}{40}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{3}{20}$

c) *Montrons que l'espérance mathématique $E(X)$ est -75.*

$E(X)=\sum_{i=1}^{n}X_i\cdot p_i$

$E(X)=\left(\frac{-200\times27}{40}\right)\left(\frac{0\times7}{40}\right)+\left(\frac{400\times6}{40}\right)$

$\boxed{E(X)=-75.}$

* ***Calculons la variance $V(X)$.***

$V(X)=E\left(X^2\right)-\left[E(X)\right]^2$

$V(X)=(-200)^2\times\frac{27}{40}+0^2\times\frac{7}{40}+400^2\times\frac{6}{40}-(-75)^2$

$\boxed{V(X)=45375}$

* ***Calculons l'écart-type $\sigma(X)$.***

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$.

$\boxed{\sigma(X)=\sqrt{45375}\approx213.}$

3- *Calculons, à 10^{-3} près, cette probabilité.*

Appelons G l'évènement : « obtenir au moins un gain strictement positif » ; l'évènement contraire à G qui est noté $\overline{G}$ correspond à : « obtenir au plus un gain négatif ou nul » ainsi donc, $p\left(\overline{G}\right)=\frac{7}{40}+\frac{27}{40}=\frac{34}{40}=\frac{17}{20}$

A l'issue de cinq épreuves, $p\left(\overline{G}\right)=\left(\frac{17}{20}\right)^5$. Or, on sait aussi que, $p\left(\overline{G}\right)=1-p(G)\Rightarrow p(G)=1-p\left(\overline{G}\right)$.

$\boxed{p(G)=1-\left(\frac{17}{20}\right)^5\approx0,556.}$

PROBLÈME :

Partie A :

1- *Justifions l'existence de $I_n(a)$.*

f_n est continue sur K et partant, sur $[0;a]$ comme produit de fonctions continues sur K donc, $I_n(a)$ existe.

* ***Calculons $I_0(a)$.***

$I_0(a)=\int_0^a e^{-x}\,dx=\left[-e^{-x}\right]_0^a=-e^{-a}+1.$

2-a) *Montrons :*

$\forall x\in K$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $f_n'(x)=\frac{nx^{n-1}}{n!}e^{-x}-\frac{x^n}{n!}e^{-x}$ or, $n!=n(n-1)!$ d'où $f_n'(x)=\frac{nx^{n-1}}{n(n-1)!}e^{-x}-\frac{x^n}{n!}e^{-x}$

Scanné avec CamScanner

$f_n'(x)=\frac{nx^{n-1}}{n(n-1)!}e^{-x}-\frac{x^n}{n!}e^{-x}$

$f_n'(x)=\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^{-x}-\frac{x^n}{n!}e^{-x}=f_{n-1}(x)-f_n(x).$

* Calculons $f_n(0)=0.$

$$\boxed{f_n(0)=\frac{(0)^n e^0}{n!}=0.}$$

b) ***Déduisons :*** $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ I_n(a)-I_{n-1}(a)=-\frac{a^n}{n!}e^{-a}.$

de ce qui précède, on sait désormais que :

$f_n'(x)=f_{n-1}(x)-f_n(x)$ alors,

$\int_0^a f_n'(x)\,dx=\int_0^a f_{n-1}(x)dx-\int_0^a f_n(x)dx$ donc,

$\int_0^a f_n'(x)\,dx=I_{n-1}(a)-I_n(a)$ avec,

$\int_0^a f_n'(x)\,dx=\left[f_n(x)\right]_0^a=f_n(a)-f_n(0)$ soit,

$f_n(a)-f_n(0)=\frac{a^n e^{-a}}{n!}$. Et par conséquent, il vient :

$I_{n-1}(a)-I_n(a)=f_n(a)-f_n(0)=\frac{a^n e^{-n}}{n!}$ alors,

$I_n(a)-I_{n-1}(a)=-\frac{a^n e^{-a}}{n!}.$

c) ***Déduisons :*** $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ I_n(a)=1-\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!}\right)e^{-a}.$

On sait de ce qui précède que :

$I_n(a)-I_{n-1}(a)=-\frac{a^n e^{-a}}{n!}$; alors,

$\sum_{k=1}^{n}\left(I_k(a)-I_{k-1}(a)\right)=\sum_{k=1}^{n}-\frac{a^k e^{-a}}{k!}=-\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{a^k}{k!}\right)e^{-a}$

$\sum_{k=1}^{n}\left(I_k(a)-I_{k-1}(a)\right)=1-\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!}\right)e^{-a}$ de plus, on sait que : $\sum_{k=1}^{n}\left(I_k(a)-I_{k-1}(a)\right)=I_n(a)$ donc finalement,

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ I_n(a)=1-\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!}\right)e^{-a}.$

3-a) ***Montrons que :*** $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\geq 0.$

Pour tout réel $x\geq 0$, $\frac{x^n}{n!}e^{-x}\geq 0$ ce qui équivaut à dire que $f_n(x)\geq 0$ et par positivité de l'intégrale, on a : $\int_0^1 f_n(x)dx\geq 0$ et par conséquent, $u_n\geq 0.$

* ***Donnons une interprétation géométrique de*** u_n.

u_n représente l'aire en unités d'aire du plan délimité par la courbe (C_n), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=0$ et $x=1.$

b) ***Montrons :***

$\forall n\in\mathbb{N}^*$ et $\forall x\in[0;1]$, on a : $0\leq x\leq 1$ et donc, $e^{-1}\leq e^{-x}\leq e^0$ soit, $e^{-1}\leq e^{-x}\leq 1$ ce qui conduit à $0\leq x^n e^{-x}\leq x^n$ d'où, $0\leq\frac{x^n e^{-x}}{n!}\leq\frac{x^n}{n!}$ et enfin,

$0\leq f_n(x)\leq\frac{1}{n!}x^n.$

c) ***Déduisons que :*** $\forall n\in\mathbb{N},\ 0\leq u_n\leq\frac{1}{(n+1)!}.$

$\forall n\in\mathbb{N},\ 0\leq f_n(x)\leq\frac{1}{n!}x^n$ d'après ce qui précède.

Alors, $0\leq\int_0^1 f_n(x)dx\leq\int_0^1\frac{1}{n!}x^n\,dx$ soit,

$0\leq u_n\leq\int_0^1\frac{1}{n!}x^n\,dx$. Or, $\int_0^1\frac{1}{n!}x^n\,dx=\left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)n!}\right]_0^1$

$\int_0^1\frac{1}{n!}x^n\,dx=\left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right]_0^1=\frac{1}{(n+1)!}$. Et par conséquent, $0\leq u_n\leq\frac{1}{(n+1)!}.$

* ***Déterminons la limite de*** u_n ***en*** $+\infty.$

D'après ce qui précède $0\leq u_n\leq\frac{1}{(n+1)!}$. Or, comme $\frac{1}{(n+1)!}\leq\frac{1}{n}$ alors, $0\leq u_n\leq\frac{1}{(n+1)!}\leq\frac{1}{n}$ donc, $0\leq u_n\leq\frac{1}{n}$. De plus, $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ et par conséquent,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}u_n=0.}$$

Partie B :

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

$f(x)=\ln\left(e^x+e^{-x}\right)$:

Scanné avec CamScanner

1-a) *Déterminons la limite de f en $+\infty$.*

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0\end{array}\right\}$ alors, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x+e^{-x}\right)=+\infty$ puis d'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)=+\infty$ et par composition des limites, il vient : $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(e^x+e^{-x}\right)=+\infty$.

b) *Montrons que :* $\forall x\geq 0,\ f(x)=x+\ln\left(1+e^{-2x}\right)$.

$\forall x\geq 0,\ f(x)=\ln\left[e^x\left(1+e^{-2x}\right)\right]=\ln e^x+\ln\left(1+e^{-2x}\right)$

$f(x)=x+\ln\left(1+e^{-2x}\right)$.

c) *Déduisons que la courbe $(\mathscr{C})$ admet pour asymptote la droite (Δ) d'équation $y=x$.*

$f(x)-x=x+\ln\left(1+e^{-2x}\right)-x=\ln\left(1+e^{-2x}\right)$ alors,

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+e^{-2x}\right)=0$.

Alors la droite d'équation $y=x$ est asymptote à $(\mathscr{C})$ à $+\infty$.

d) *Etudions la position relative de $(\mathscr{C})$ et de (Δ).*

$\forall x\geq 0,\ f(x)-x=\ln\left(1+e^{-2x}\right)$. Or, $1+e^{-2x}>0$ et par conséquent, $f(x)-x=\ln\left(1+e^{-2x}\right)>0$. Alors, la courbe est au-dessus de l'asymptote d'équation $y=x$ sur $[0;+\infty[$.

2-a) *Etudions le sens de variation de f et dressons son tableau de variations.*

$\forall x\geq 0$, la fonction f est continue et dérivable sur $[0;+\infty[$ comme composée de deux fonctions dérivables sur $[0;+\infty[$.

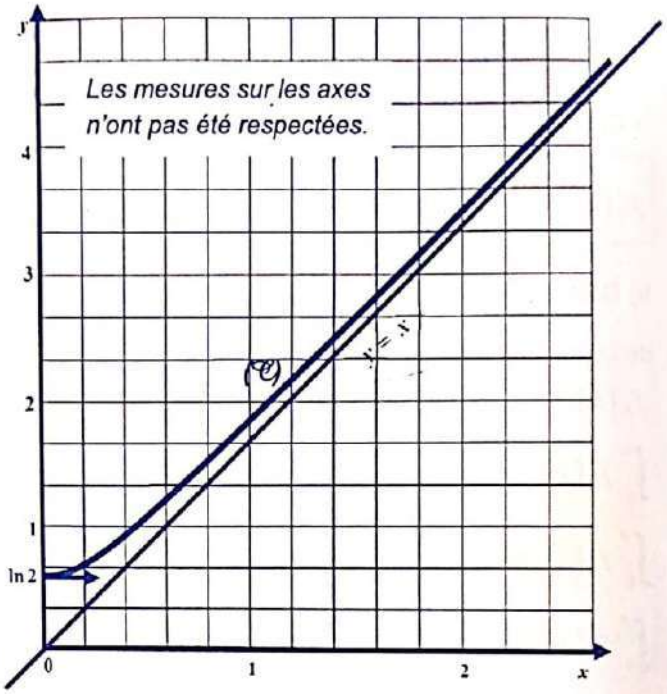
$\boxed{f'(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}}$. Cette dérivée s'annule lorsque :

$e^x-e^{-x}=0\Leftrightarrow e^x=e^{-x}\Rightarrow x=0$.

$f(0)=\ln\left(e^0+e^0\right)=\ln(1+1)=\ln 2$.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$
$f(x)$	$\ln 2$	$+\infty$

$\forall x\geq 0$, la fonction f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.



Construction de $(\mathscr{C})$ et de (Δ).

Partie C :

1-a) *Montrons que F est bien définie et positive sur $[0;+\infty[$.*

La fonction qui à $t\mapsto\left(1+e^{-2t}\right)$ est continue sur $[0;+\infty[$. Alors, F est définie sur $[0;+\infty[$.

D'autre part pour tout réel $t\geq 0$, $\left(1+e^{-2t}\right)>0$ ainsi, $\forall x\geq 0,\ F(x)>0$.

b) *En utilisant la question 1 de la partie B, interprétons graphiquement $F(\lambda)$.*

$F(\lambda)$ est l'aire du domaine du plan compris entre $(\mathscr{C})$ et de (Δ) et les droites d'équations $x=0$ et $x=\lambda$.

2-a) *Justifions que F est dérivable sur $[0;+\infty[$.*

F est la primitive de la fonction $x\mapsto\ln\left(1+e^{-2x}\right)$ donc, F est dérivable sur $[0;+\infty[$.

- ***Calculons $F'(x)$.***

$\forall x\geq 0,\ \boxed{F'(x)=\ln\left(1+e^{-2x}\right)}$.

Scanné avec CamScanner

Sujet voir p.22 - 23

b) *Etudions le sens de variation de F sur $[0;+\infty[$.*

$\forall x \geq 0$, $F'(x) = \ln\left(1+e^{-2x}\right) > 0$.

Alors, est F strictement croissante $[0;+\infty[$.

3- Soit a un réel strictement positif.

a) *Montrons :*

Comme $a > 0$ et que $t \in [1;1+a]$ ou encore :

$1 \leq t \leq 1+a$, alors : $\frac{1}{1+a} \leq \frac{1}{t} \leq 1$.

b) *Etablissons que :* $\frac{a}{1+a} \leq \ln(1+a) \leq a$.

A partir de ce qui précède, intégrons dans l'intervalle $[1;1+a]$ l'inégalité suivante :

$$\int_1^{1+a} \frac{1}{1+a}\,dt \leq \int_1^{1+a} \frac{1}{t}\,dt \leq \int_1^{1+a} dt$$

$$\frac{1}{1+a}[t]_1^{1+a} \leq [\ln t]_1^{1+a} \leq [t]_1^{1+a}$$

$$\frac{1}{1+a}(1+a-1) \leq \ln(1+a) - \ln 1 \leq (1+a-1)$$

$$\frac{a}{1+a} \leq \ln(1+a) \leq a.$$

4-

a) *Déduisons de la question 3 que :*

$$\int_0^x \frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}}\,dt \leq F(x) \leq \int_0^x e^{-2t}\,dt.$$

Pour tout réel t, $e^{-2t} > 0$ donc après la question 3-, on sait que : $\frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}} \leq \ln\left(1+e^{-2t}\right) \leq e^{-2t}$ d'où finalement,

$$\int_0^x \frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}}\,dt \leq \int_0^x \ln\left(1+e^{-2t}\right)dt \leq \int_0^x e^{-2t}\,dt \text{ soit,}$$

$$\int_0^x \frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}}\,dt \leq F(x) \leq \int_0^x e^{-2t}\,dt.$$

b) *Déduisons :*

On a : $\int_0^x \frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}}\,dt = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln\left(1+e^{-2x}\right)$ et alors,

$\int_0^x e^{-2t}\,dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x}$. D'où finalement il vient :

$\forall x \geq 0$, $\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln\left(1+e^{-2x}\right) \leq F(x) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x}$.

5- *Etablissons que :* $\frac{1}{2}\ln 2 \leq k \leq \frac{1}{2}$.

$\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln\left(1+e^{-2x}\right) \leq F(x) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x}$ d'après ce qui précède.

Calculons :

* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln\left(1+e^{-2x}\right)\right] = \frac{1}{2}\ln 2$

* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x}\right] = \frac{1}{2}$.

* $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = k$. Donc, on a : $\frac{1}{2}\ln 2 \leq k \leq \frac{1}{2}$.

6-a) *En utilisant la question 4.b) de la partie C, montrons :*

D'après la question 4.b) de la partie C, il vient :

$\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln\left(1+e^{-2}\right) \leq F(x) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$,

$\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln\left(1+e^{-2(n+1)}\right) \leq F(n+1) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2(n+1)}$ (1).

et, $\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln\left(1+e^{-2n}\right) \leq F(n) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2n}$ (2).

En faisant : (1) − (2), il vient :

$$-\frac{1}{2}\ln\left(1+e^{-2(n+1)}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(1+e^{-2n}\right) \leq F(n+1) - F(n) \leq -\frac{1}{2}e^{-2(n+1)} + \frac{1}{2}e^{-2n} \text{ (2).}$$

On obtient donc :

$$\frac{1}{2}\left[\ln\frac{\left(1+e^{-2n}\right)}{\left(1+e^{-2(n+1)}\right)}\right] \leq F(n+1) - F(n) \leq \frac{1}{2}\left[e^{-2n} - e^{-2(n+1)}\right]$$

$$\frac{1}{2}\left[\ln\frac{\left(1+e^{-2n}\right)}{\left(1+e^{-2(n+1)}\right)}\right] \leq v_n \leq \frac{1}{2}\left[e^{-2n} - e^{-2(n+1)}\right]$$

Comme, $\frac{1+e^{-2n}}{1+e^{-2(n+1)}} > 1$ alors, $\ln\frac{\left(1+e^{-2n}\right)}{\left(1+e^{-2(n+1)}\right)} > 0$ et par conséquent, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq v_n \leq \frac{\left(1-e^{-2}\right)e^{-2n}}{2}$.

b) *Déterminons la limite de la suite v_n en $+\infty$.*

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{\left(1-e^{-2}\right)e^{-2n}}{2}\right] = 0$. Alors, d'après le théorème des gendarmes, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0.}$

Scanné avec CamScanner

sujet voir p.24 - 25

EXERCICE 1 :

1-a) *Justifions l'existence de cette unique similitude directe S.*

On remarque $z_0 \neq z_1$ et $z_1 \neq z_2$ ce qui veut dire que $M_0 \neq M_1$ et bien sûr $M_1 \neq M_2$. Par conséquent il existe une unique similitude directe S.

b) Etablissons que l'écriture complexe de S.

Comme S est une similitude directe, son expression complexe est alors de la forme $z' = az + b$.

$S(M_0) = M_1 \Rightarrow z_1 = az_0 + b$ ce qui correspond à :

$-2-3i = a(-4+i) + b.$ (1) D'autre part, on a :

$S(M_1) = M_2 \Rightarrow z_2 = az_1 + b$ ce qui correspond à :

$1-4i = a(-2-3i) + b.$ (2) Des relations (1) et (2) on obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} a(-4+i) + b = -2-3i & (1) \\ a(-2-3i) + b = 1-4i & (2) \end{cases}$$

$(1)-(2) \Rightarrow a(2-4i) = 3-i$ soit, $a = \dfrac{3-i}{2-4i}$ d'où,

$$a = \frac{(3-i)(2+4i)}{(2-4i)(2+4i)} = \frac{1}{20}(6+12i-2i+4)$$

$$a = \frac{10+10i}{20} = \frac{1+i}{2}.$$

D'autre part, dans (2) on obtient :

$1-4i = \left(\dfrac{1+i}{2}\right)(-2-3i) + b$ soit,

$2-8i = -2-3i-2i+3+2b$ ce qui conduit à :

$2b = 2-8i+2+3i+2i-3 = 1-3i$

$$b = \frac{1-3i}{2}.$$

En conclusion, l'écriture complexe de S est :

$$z' = \frac{1+i}{2}z + \frac{1-3i}{2}.$$

c) Déduisons le rapport, l'angle et l'affixe ω du centre Ω de la similitude S.

- $\dfrac{1+i}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$

$$\frac{1+i}{2} = \frac{1}{2}(1+i) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\frac{1+i}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\pi/4}.$$

- **Déterminons ω l'affixe de Ω.**

$S(\Omega) = \Omega$ implique que, $\omega = \dfrac{1+i}{2}\omega + \dfrac{1-3i}{2}$ soit,

$\omega - \dfrac{1+i}{2}\omega = \dfrac{1-3i}{2}$ ce qui équivaut à dire que :

$2\omega - (1+i)\omega = 1-3i$ d'où, $\omega(2-1-i) = 1-3i$ et donc, $\omega = \dfrac{1-3i}{1-i} = \dfrac{(1-3i)(1+i)}{2}$ d'où finalement,

$$\omega = \frac{1+i-3i+3}{2} = \frac{4-2i}{2} = 2-i.$$

En conclusion, S est la similitude directe de rapport $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, de centre Ω d'affixe $\omega = 2-i$ et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.

d) *Vérifions cette relation.*

$$\omega - z' = \omega - \left(\frac{1+i}{2}z + \frac{1-3i}{2}\right)$$

$$\omega - z' = \frac{4-2i-z-iz-1+3i}{2} = \frac{3+i}{2} - \frac{(1+i)}{2}z$$

D'autre part, $-i(z-z') = -i\left(z - \left(\dfrac{1+i}{2}z + \dfrac{1-3i}{2}\right)\right)$

d'où, $-i(z-z') = -i\left(z - \left(\dfrac{1+i}{2}z + \dfrac{1-3i}{2}\right)\right)$

$$-i(z-z') = -i\left(\frac{2z-z-iz-1+3i}{2}\right)$$

$$-i(z-z') = \frac{-2zi+zi-z+i+3}{2}$$

$$-i(z-z') = \frac{3+i}{2} - \frac{(1+i)}{2}z.$$

On constate bien que : $\omega - z' = -i(z-z')$.

Déduisons la nature du triangle $\Omega MM'$.

De ce qui précède, on remarque que :

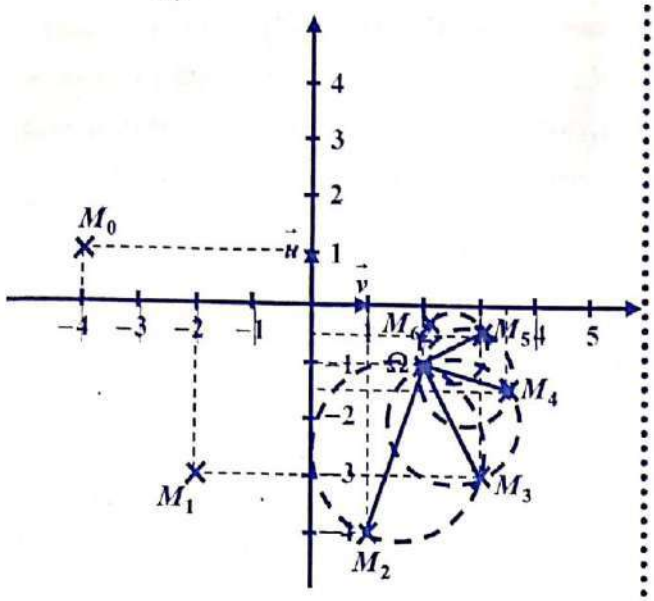
$\omega - z' = -i(z-z') \Rightarrow \dfrac{\omega - z'}{z-z'} = -i = e^{-i\pi/2}$. Alors, le triangle $\Omega MM'$ est isocèle et rectangle en M'.

2-

a) *Plaçons les points M_0, M_1 et M_2 et construisons les points M_3, M_4, M_5 et M_6.*

- M_3 est le point d'intersection du cercle de diamètre $[\Omega M_2]$ et de la médiatrice du segment $[\Omega M_2]$ tel que le triangle $\Omega M_2 M_3$ soit direct.

Scanné avec CamScanner



- M_4 est le point d'intersection du cercle de diamètre $[\Omega M_3]$ et de la médiatrice du segment $[\Omega M_3]$ tel que le triangle $\Omega M_3 M_4$ soit direct.
- M_5 est le point d'intersection du cercle de diamètre $[\Omega M_4]$ et de la médiatrice du segment $[\Omega M_4]$ tel que le triangle $\Omega M_4 M_5$ soit direct.
- M_6 est le point d'intersection du cercle de diamètre $[\Omega M_5]$ et de la médiatrice du segment $[\Omega M_5]$ tel que le triangle $\Omega M_5 M_6$ soit direct.

b) *Démontrons que la suite (U_n) est géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$.*

$U_n = M_n M_{n+1} = |z_{n+1} - z_n|$

$U_{n+1} = M_{n+1} M_{n+2}$

$U_{n+1} = |z_{n+2} - z_{n+1}|$

$$U_{n+1} = \left|\frac{(1+i)}{2} z_{n+1} + \frac{1-3i}{2} - \frac{(1+i)}{2} z_n - \frac{1-3i}{2}\right|$$

$$U_{n+1} = \left|\frac{(1+i)}{2}\left(z_{n+1} - z_n\right)\right|$$

$$U_{n+1} = \left|\frac{1+i}{2}\right| |z_{n+1} - z_n|$$

$U_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} U_n$; alors (U_n) est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3-a) *Exprimons V_n en fonction de n.*

$$V_n = \sum_{k=0}^{n} U_n = \frac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} \times U_0$$

Calculons U_0 : $U_0 = |z_1 - z_0|$ soit alors,

$U_0 = |(-2-3i) - (-4+i)|$

$U_0 = |-2-3i+4-i|$

$U_0 = |2-4i| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$

Par conséquent, $V_n = \frac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} \times \left(2\sqrt{5}\right)$ d'où,

$V_n = \frac{4\sqrt{5}}{2-\sqrt{2}}\left[1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}\right]$ il vient :

$V_n = \frac{4\sqrt{5}\left(2+\sqrt{2}\right)}{\left(2-\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)}\left[1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}\right]$ et finalement,

$V_n = \left(4\sqrt{5}+2\sqrt{10}\right)\left[1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}\right].$

b) *Déterminons la limite de la suite (V_n).*

Comme, $0 \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \leq 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1} = 0.$

Par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 4\sqrt{5}+2\sqrt{10}.$

4-a) *Calculons, en fonction de n, la longueur ΩM_n notée r_n.*

$M_{n+1} = S(M_n) \Rightarrow \Omega M_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\Omega M_n$ ce qui implique, $r_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} r_n$. Alors la suite (r_n) est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et de premier terme r_0. Par conséquent, $r_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n r_0$ avec, $r_0 = \Omega M_0$ soit donc,

Scanné avec CamScanner

$r_0 = |z_\Omega - z_0| = |(2-i)-(-4+i)|$

$r_0 = |2-i+4-i| = |6-2i|$

$r_0 = \sqrt{36+4}$

$r_0 = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}.$

Donc finalement, $\boxed{r_n = 2\sqrt{10}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n}$.

b) *Déterminons ce plus petit entier naturel n.*

$$r_n < 0,001 \Leftrightarrow 2\sqrt{10}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n < 0,001$$

$$r_n < 0,001 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n < \frac{0,001}{2\sqrt{10}}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n < \ln\left(\frac{10^{-3}}{2\sqrt{10}}\right)$$

$$\Leftrightarrow n\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) < \ln\left(\frac{10^{-3}}{2\sqrt{10}}\right)$$

$$r_n < 0,001 \Leftrightarrow n > \frac{\ln\left(\frac{10^{-3}}{2\sqrt{10}}\right)}{\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} \approx 18,60$$

- Ce plus petit entier naturel n est : $n = 19$.

EXERCICE 2 :

1-

a) *Déterminons le couple d'entiers relatifs $(u;v)$.*

Nous remarquons que : $10(-1)+11(1)=1$ alors, on pourra donc prendre : $u=-1$ et $v=1$.

Déduisons une solution particulière $(x_0;y_0)$.

Par ailleurs, $10(-1)\times 95+11(1)\times 95=95$; alors le couple $(-95;95)$ est une solution particulière de (E).

b) *Déterminons les couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).*

On recherche ensuite la solution générale de (E) on a :

$$\begin{cases} 10x+11y=95 \\ 10(-95)+11(95)=95 \end{cases}$$

par soustraction des termes des deux égalités, on obtient : $10(x+95)+11(y-95)=0$ (E') soit alors, $10(x+95)=11(95-y)$; 11 divise $10(x+95)$ or, le $PGCD(10;11)=1$ alors, 11 divise $(x+95)$ d'après le théorème de Gauss et par conséquent, $x+95=11k$ soit, $x=11k-95$ avec $k\in\mathbb{Z}$. En remplaçant dans l'équation (E') il vient :

$10(11k-95+95)+11(y-95)=0$

$110k+11y-1045=0$

$11y=1045-110k$

$y=95-10k$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

L'ensemble solution : $S=\{11k-95\,;95-10k\,,k\in\mathbb{Z}\}$.

2- *Montrons qu'un seul de ces points a pour coordonnées des entiers naturels.*

$y=95-10k\geq 0 \Rightarrow k\leq \frac{95}{10}=9,5$

$x=11k-95\geq 0 \Rightarrow k\geq \frac{95}{10}=9,5$ alors, $k=9$.

Comme k est unique, alors il existe un unique point à coordonnées entiers naturels.

- *Déterminons les coordonnées de ce point.*

$x=11\times 9-95=4$

$y=95-10\times 9=5$

$z=0.$

Les coordonnées de ce point sont : $M(4;5;0)$.

3-a) *Montrons que l'entier y est impair.*

Soit $M(x;y;z)$ un point du plan tel que : x, y et z sont des entiers naturels.

$M(x;y;z)\in(\mathcal{P})$ équivaut à dire que :

$10x+11y+12z=95$ soit,

$11y=95-10x-12z$ ou encore,

$11y=\underbrace{2(47-5x-6z)}_{K}+1=2K+1$ avec $K\in\mathbb{N}$

$11y$ est donc impair et par conséquent, y est impair.

b) *Montrons qu'on a : $p+z\equiv 2[5]$.*

$10x+11(2p+1)+12z=95$

$10x+22p+11+12z=95$

$22p+12z=95-11-10x$

$22p+12z=84-10x$

$11p+6z=42-5x$

Or, $42\equiv 2[5]$ et $-5x\equiv 0[5]$ alors, $42-5x\equiv 2[5]$ ce qui signifie que $11p+6z\equiv 2[5]$. D'autre part, on remar-

Scanné avec CamScanner

que que, $11p+6z=5(2p+z)+p+z$, il vient : $5(2p+z)\equiv 0[5]$. De ce qui précède, $11p+6z\equiv 2[5]$ C'est-à-dire $5(2p+z)+p+z\equiv 2[5]$ alors, sachant que $5(2p+z)\equiv 0[5]$ donc, $p+z\equiv 2[5]$ d'après les propriétés sur les congruences.

c) *Montrons :*

$p+z=5q+2 \Rightarrow z=5q+2-p$; d'autre part, on a : $y=2p+1$. En remplaçant y et z par leurs expressions précédentes dans la relation $10x+11y+12z=95$, il vient : $10x+11(2p+1)+12(5q+2-p)=95$ ce qui donne, $10x+22p+11+60q+24-12p=95$ soit, $10x+10p+60q=60$ en simplifiant par 10 on obtient enfin, $x+p+6q=6$.

☛ ***Déduisons que q prend les valeurs 0 ou 1.***

De la relation précédente $x+p+6q=6$ on tire alors, $x+p=6-6q$ soit, $x+p=6(1-q)$.

On sait que $x\in\mathbb{N}$ et $p\in\mathbb{N}$ donc, $x+p\in\mathbb{N}$ ce qui voudrait dire que $6(1-q)\in\mathbb{N}$ et qui n'est possible que pour $q=0$ ou $q=1$.

d) ***Déduisons les coordonnées de tous les points de $(\mathcal{P})$ dont les coordonnées sont des entiers naturels.*** ☛

* Pour $q=0$, les coordonnées $(x;y;z)$ d'un point $(\mathcal{P})$ du plan sont tels que :

$x=6-p\geq 0$, $y=2p+1$ et $z=2-p\geq 0$ ce qui permet à p de prendre les valeurs 0, 1 et 2.

- pour $p=0$, $x=6$; $y=1$ et $z=2$.
- pour $p=1$, $x=5$; $y=3$ et $z=1$.
- pour $p=2$, $x=4$; $y=5$ et $z=0$.

* Pour $q=1$, les coordonnées $(x;y;z)$ d'un point $(\mathcal{P})$ du plan sont tels que :

$x=-p$, $y=2p+1$ et $z=7-p$ comme x, y et z sont tous des entiers naturels, p ne pourra prendre que la valeur 0.

- pour $p=0$, $x=0$, $y=1$ et $z=7$.

PROBLÈME :

Partie A : Etude de la fonction f_n

1- Calculons $f_n'(x)$.

Pour tout $x\in]1;+\infty[$, $x-1>0$. Les fonctions $x\mapsto x-1$ et $x\mapsto(x-1)^2$ sont dérivables sur $]1;+\infty[$ et la fonction $x\mapsto 1+n\ln(x-1)$ est aussi dérivable sur $]1;+\infty[$ et par conséquent, f_n est dérivable sur $]1;+\infty[$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur $]1;+\infty[$.

Pour tout $x\in]1;+\infty[$, on a :

$$f_n'(x)=\frac{\frac{n}{x-1}(x-1)^2-2(x-1)\left(1+n\ln(x-1)\right)}{(x-1)^2}$$

$$f_n'(x)=\frac{n(x-1)-2(x-1)\left(1+n\ln(x-1)\right)}{(x-1)^4}$$

$$f_n'(x)=\frac{(x-1)\left[n-2-2n\ln(x-1)\right]}{(x-1)^4}$$

$$\boxed{f_n'(x)=\frac{n-2-2n\ln(x-1)}{(x-1)^3}.}$$

2- *Résolvons l'inéquation $f_n'(x)\geq 0$.*

$f_n'(x)=\frac{n-2-2n\ln(x-1)}{(x-1)^3}\geq 0$ ce qui équivaut à dire que : $\frac{n-2-2n\ln(x-1)}{(x-1)^3}\geq 0$ soit,

$n-2-2n\ln(x-1)\geq 0$

$n-2-2n\ln(x-1)\geq 0$

$-2n\ln(x-1)\geq -n+2$

$\ln(x-1)\leq\frac{n-2}{2n}$

$x-1\leq e^{\frac{n-2}{2n}}$ donc, $x\leq 1+e^{\frac{n-2}{2n}}$.

☛ ***Déduisons le signe de $f_n'(x)$.***

- $f_n'(x)>0$ si $x\in\left]1;1+e^{\frac{n-2}{2n}}\right[$;
- $f_n'(x)<0$ si $x\in\left]1+e^{\frac{n-2}{2n}};+\infty\right[$;
- $f_n'(x)=0$ si $x=1+e^{\frac{n-2}{2n}}$. ;

3- *Déterminons les limites de f_n en 1 et en $+\infty$.*

Scanné avec CamScanner

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f_n(x) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \left(\frac{1+n\ln h}{h^2}\right)$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f_n(x) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \left(1+n\ln h\times\frac{1}{h^2}\right)$$

Or,

$\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} (\ln h) = -\infty$ alors, $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} (1+n\ln h) = -\infty$ et

d'autre part, $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \left(\ln\frac{1}{h^2}\right) = +\infty$ par conséquent, on a :

- $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f_n(x) = -\infty$.

- ***Déterminons les limites de f_n en $+\infty$.***

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+n\ln(x-1)}{(x-1)^2}.$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1) = +\infty$; posons : $X = x-1$. Il vient,

$\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{1+n\ln X}{X^2} = 0$ et donc, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0.}$

4-a) *Démontrons :*

$$f_n\left(e^{\frac{n-2}{2n}}+1\right) = \frac{1+n\ln e^{\frac{n-2}{2n}}}{\left(e^{\frac{n-2}{2n}}\right)^2}$$

$$= \frac{1+n\times\frac{n-2}{2n}}{e^{\frac{n-2}{n}}}$$

$$= \frac{1+\frac{n-2}{2}}{e^{\frac{n-2}{n}}} = \frac{2+n-2}{2\times e^{\frac{n-2}{n}}}$$

$$= \frac{n}{2\times e^{\frac{n-2}{n}}}$$

$$f_n\left(e^{\frac{n-2}{2n}}+1\right) = \frac{n}{2}e^{\frac{2-n}{n}}.$$

b) *Etablissons le tableau de variation de f_n et calculons sa valeur maximale en fonction de n.*

D'après 2-), f_n est croissante sur $x\in\left]1;1+e^{\frac{n-2}{2n}}\right]$ et décroissante sur $\left[1+e^{\frac{n-2}{2n}};+\infty\right[$.

- **Tableau de variations**

x	1		$1+e^{\frac{n-2}{2n}}$		$+\infty$
$f_n'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	‖ $-\infty$	↗	$\frac{n}{2}e^{\frac{2-n}{2}}$	↘	0

$f_n\left(e^{\frac{n-2}{2n}}+1\right) = \frac{n}{2}e^{\frac{2-n}{2}}$ est la valeur maximale de la fonction f_n sur $]1;+\infty[$.

Partie B :

1- *Construction des courbes (C_2) et (C_3).*

N.B : La construction se trouve à la fin de la correction.

2-a) *Calculons $f_{n+1}(x)-f_n(x)$.*

$$f_{n+1}(x) = \frac{1+(n+1)\ln(x-1)}{(x-1)^2}.$$

Posons: $f_{n+1}(x)-f_n(x) = \Delta$

$$\Delta = \frac{1+(n+1)\ln(x-1)}{(x-1)^2} - \frac{1+n\ln(x-1)}{(x-1)^2}$$

$$\Delta = \frac{1+n\ln(x-1)+\ln(x-1)-1-n\ln(x-1)}{(x-1)^2}$$

$$\Delta = \frac{1+\cancel{n\ln(x-1)}+\ln(x-1)-1-\cancel{n\ln(x-1)}}{(x-1)^2}$$

Alors, $f_{n+1}(x)-f_n(x) = \frac{\ln(x-1)}{(x-1)^2}$.

- ***Déduisons :***

Pour tout n supérieur ou égal à 2, on a de ce qui précède : $f_3(x)-f_2(x) = \frac{\ln(x-1)}{(x-1)^2}$.

Or, $f_n(x) = \frac{1+n\ln(x-1)}{(x-1)^2}$. Alors, il vient :

$f_n(x) = \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{n\ln(x-1)}{(x-1)^2}$ on obtient finalement :

Scanné avec CamScanner

$$f_n(x)=n\left[f_3(x)-f_2(x)\right]+\frac{1}{(x-1)^2}.$$

b) Expliquons :

De ce qui précède, on remarque que :

$$f_4(x)=4\left[f_3(x)-f_2(x)\right]+\frac{1}{(x-1)^2}.$$

La suite est non-traitée.

Partie C : Calcul d'aires

1- *Calculons cette aire, en unités d'aire.*

$f_{n+1}(x)-f_n(x)=\dfrac{\ln(x-1)}{(x-1)^2}\geq 0$ pour tout $x\geq 2$.

L'aire du domaine du plan limité par les courbes (C_n) et (C_{n+1}) et les droites d'équations $x=2$ et $x=e+1$ est : $\mathscr{A}=\left[\int_2^{e+1}\left(f_{n+1}(x)-f_n(x)\right)dx\right]\times u.a$

$$\mathscr{A}=\left[\int_2^{e+1}\frac{\ln(x-1)}{(x-1)^2}dx\right]\times u.a$$

$$\mathscr{A}=\left[\int_2^{e+1}\left(\frac{1}{(x-1)^2}\times\ln(x-1)\right)dx\right]\times u.a$$

Procédons par une intégration par parties :

Posons à cet effet :

$u(x)=\ln(x-1)$ et $v'(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$

$u'(x)=\dfrac{1}{x-1}$ et $v(x)=-\dfrac{1}{x-1}$ Alors, on a :

$$\mathscr{A}=\left[\left[-\frac{\ln(x-1)}{x-1}\right]_2^{e+1}+\int_2^{e+1}\frac{1}{(x-1)^2}dx\right]\times u.a$$

Or, on a : $\displaystyle\int_2^{e+1}\frac{1}{(x-1)^2}dx=\left[-\frac{1}{x-1}\right]_2^{e+1}=\left(-\frac{1}{e}+1\right)$

$$\mathscr{A}=\left[-\frac{\ln(e+1-1)}{e+1-1}+\frac{\ln(2-1)}{2-1}-\frac{1}{e}+1\right]\times u.a$$

$$\mathscr{A}=\left[-\frac{\ln(e)}{e}+\frac{\ln(1)}{1}-\frac{1}{e}+1\right]\times u.a$$ ce qui conduit à :

$\mathscr{A}=\left[-\dfrac{1}{e}-\dfrac{1}{e}+1\right]\times u.a$ et finalement on obtient :

$\mathscr{A}=\left[-\dfrac{2}{e}+1\right]\times u.a$; $\mathscr{A}=\left[\dfrac{e-2}{e}\right]\times 25\,cm^2$

$$\boxed{\mathscr{A}=\left(\frac{25e-50}{e}\right)cm^2.}$$

2-a) *Calculons A_2.*

Pour tout n entier naturel supérieur ou égal à 2 et pour tout x réel supérieur ou égal à 2 on a $f_n(x)\geq 0$.

Alors, $A_n=\left(\int_2^{e+1}f_n(x)\,dx\right)\times u.a$ qui équivaut à :

$$A_n=\left(\int_2^{e+1}\left[\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{n\ln(x-1)}{(x-1)^2}\right]dx\right)\times u.a$$

$$A_n=\left(\int_2^{e+1}\frac{1}{(x-1)^2}dx+n\int_2^{e+1}\frac{\ln(x-1)}{(x-1)^2}dx\right)\times u.a$$

$$A_n=\left(\int_2^{e+1}\frac{1}{(x-1)^2}dx\right)\times u.a+n\times\mathscr{A}$$

$$A_n=\left[-\frac{1}{x-1}\right]_2^{e+1}\times u.a+n\times\mathscr{A}$$

$$A_n=\left[-\frac{1}{e+1-1}+\frac{1}{2-1}\right]\times u.a+n\times\mathscr{A}$$

$$A_n=\left[\frac{e-1}{e}\right]u.a+n\left(\frac{e-2}{e}\right)u.a$$

$$A_n=\left[\frac{e-1+ne-2n}{e}\right]u.a$$

$A_n=\dfrac{e-1+n(e-2)}{e}u.a$ et par conséquent, il vient :

$$\boxed{A_2=\frac{e-1+2(e-2)}{e}\times u.a=\frac{3e-5}{e}\times u.a}$$

b) *Déterminons la nature de la suite (A_n).*

Calculons : $A_{n+1}=\left[\dfrac{e-1+(n+1)(e-2)}{e}\right]u.a$

Posons, $A_{n+1}-A_n=K$.

Scanné avec CamScanner

$$K=\left[\frac{e-1+(n+1)(e-2)}{e}\right]u.a-\left[\frac{e-1+n(e-2)}{e}\right]u.a$$

$$K=\left[\frac{e-1+n(e-2)+(e-2)-e+1-n(e-2)}{e}\right]u.a$$

$$K=\left[\frac{e-1+\cancel{n(e-2)}+(e-2)-e+1-\cancel{n(e-2)}}{e}\right]u.a$$

$$K=\frac{(e-2)}{e}u.a$$

Alors, $A_{n+1}-A_n=\frac{(e-2)}{e}u.a$ Donc la suite (A_n) est une suite arithmétique de premier terme A_2, et de raison $r=\left(\frac{e-2}{e}\right)\times u.a.$

Construction des courbes (C_2) et (C_3).

- **Tableau de variations de** f_2.

x	1		2		$+\infty$
$f_2'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f_2(x)$	‖ $-\infty$	↗	1	↘	0

$f_2(2)=1$ est la valeur maximale de la fonction f_2 sur $]1;+\infty[$.

- **Tableau de variations de** f_3.

x	1		$1+e^{\frac{1}{6}}$		$+\infty$
$f_3'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f_3(x)$	‖ $-\infty$	↗	$\frac{3}{2}e^{-\frac{1}{3}}$	↘	0

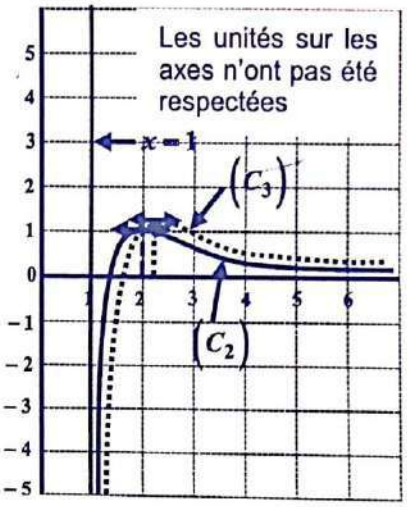
$f_3\left(1+\frac{e}{6}\right)=\frac{3}{2}e^{-\frac{1}{3}}$ est la valeur maximale de la fonction f_3 sur $]1;+\infty[$.

Les courbes (C_n) coupent l'axe des abscisses au point d'abscisse x_0 tel que $\forall x>1$, et pout tout $n\geq 2$, on a :

$$1+n\ln(x_0-1)=0$$

$\ln(x_0-1)=-\frac{1}{n} \Rightarrow x_0-1=e^{-\frac{1}{n}}$ et par suite, $x_0=1+e^{-\frac{1}{n}}$.

Tracé des courbes (C_2) et (C_3).



Scanné avec CamScanner

EXERCICE 1 :

Choisissons la bonne réponse.

1	2	3	4	5
D	B	C	A	D

EXERCICE 2 :

Arithmétique :

PGCD de deux entiers dépendant d'un entier naturel n.

1-

a) ***Définissons*** : $PGCD(a;b)$.

C'est le plus grand commun diviseur positif de a et b.

b) ***Définissons*** : $PPCM(a;b)$.

C'est le plus petit commun multiple positif de a et b.

c) ***Enonçons la propriété (ou le théorème) de Bézout.***

a et b sont premiers entre eux si et seulement si il existe deux entiers relatifs u et v tels que : $au+bv=1$.

d) ***Enonçons la propriété (ou le théorème) de Gauss.***

c étant aussi un entier relatif non nul, si a divise bc et que a est premier avec c alors a divise b.

e) ***Enonçons l'algorithme d'Euclide.***

r étant le reste de la division euclidienne de a par b :

- si $r=0$ alors $PGCD(a;b)=b$;
- si $r\neq 0$ alors $PGCD(a;b)=PGCD(b;r)$.

f) ***Utilisons l'algorithme d'Euclide pour déterminer le*** $PGCD(2;9)$.

$PGCD(2;9)=PGCD(9;2)$

Or, $9=2\times4+1$ alors, $PGCD(2;9)=PGCD(2;1)$ et $2=2\times1+0$ alors, $PGCD(2;1)=1$ en conclusion, on a : $PGCD(2;9)=PGCD(9;2)=PGCD(2;1)=1$.

2-

a) ***Justifions que a et b sont des nombres entiers naturels non nuls.***

• Justifions que $a\in\mathbb{N}$.

$a=2n-1$

$a=2(n-1)+3$ dans cette écriture on a : $2\in\mathbb{N}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $(n-1)\in\mathbb{N}$ et $3\in\mathbb{N}$ alors, $a\in\mathbb{N}$.

• Justifions ensuite que $b\in\mathbb{N}$.

$b=9n+4$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $9n\in\mathbb{N}$ et $4\in\mathbb{N}$ alors, $b\in\mathbb{N}$.

D'autre part, $n>0$ équivaut à dire que $n\geq1$ et $2n\geq2$ alors, $2n-1\geq2-1$ donc, $a=2n-1\geq1$ alors, $a>0$.

De façon analogue, comme $n>0$, c'est-à-dire $n\geq1$ alors, $9n\geq9$ et $9n+4\geq9+4$ alors, $b=9n+4\geq13$ alors, $b>0$.

En conclusion, les nombres entiers naturels a et b sont des entiers naturels non nuls.

b) ***Calculons $2b-9a$.***

$2b-9a=2(9n+4)-9(2n-1)$

$2b-9a=18n+8-18n+9$

$2b-9a=17$.

c) ***Justifions que k divise 17.***

Soit k un diviseur commun à a et b. Nous pouvons dire $a=ka'$ et $b=kb'$ avec a' et b' entiers naturels.

$2b-9a=2kb'-9ka'=k(2b'-9a')=17$ donc, k divise 17.

d) ***Déduisons ces valeurs.***

Le $PGCD(a;b)$ est un diviseur commun à a et b alors, le $PGCD(a;b)$ divise aussi 17. Or, les seuls diviseurs positifs de 17 sont 17 et 1 et par conséquent, $PGCD(a;b)=1$ ou $PGCD(a;b)=17$.

3-a) ***Trouvons les deux entiers naturels x_0 et y_0.***

On constate que : $-9(1)+2(5)=1$.

Alors, $x_0=1$ et $y_0=5$.

b) ***Résolvons dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, cette équation.***

$-9x+2y=0\Leftrightarrow 9x=2y$ et comme 9 et 2 sont premiers entre eux, $x=2k'$ et $y=9k'$ avec $k'\in\mathbb{N}$ en remplaçant dans l'expression de départ, il vient : $-9(2k')+2(9k')=0$. Par conséquent, les solutions générales de l'équation proposée sont des couples de la forme $(2k';\ 9k')$ où $k'\in\mathbb{N}$.

c) ***Déterminons ces nombres entiers naturels a et b.***

De ce qui précède, on sait désormais que :

$-9(1)+2(5)=1$ donc, $-9(17)+2(85)=17$ déterminons alors a et b tels que : $-9a+2b=17$.

$-9a+2b=-9(17)+2(85)=17$

Alors, $-9a+2b=-9(17)+2(85)$ soit,

$-9a+9(17)+2b-2(85)=0$

$-9(a-17)+2(b-85)=0$

De ce qui précède à la question 3-b, il vient :

$a-17=2k'$ et $b-85=9k'$ avec $k'\in\mathbb{N}$ d'où,

$a=17+2k'$ et $b=85+9k'$ avec $k'\in\mathbb{N}$.

En conclusion, les solutions générales de cette équation sont des couples de la forme : $(2k'+17\ ;\ 9k'+85)$ avec $k'\in\mathbb{N}$.

Scanné avec CamScanner

d) *Déduisons les valeurs de n pour lesquelles $PGCD(a;b)=17$.*

Le $PGCD(a;b)=17$ équivaut à dire que :

$a=2k'+17$ et $b=9k'+85$ avec $k'\in\mathbb{N}$ et d'autre part, $a=2n-1$ et $b=9n+4$ ce qui conduit au système d'équations suivant : $\begin{cases}2k'+17=2n-1\\9k'+85=9n+4\end{cases}$ avec $k'\in\mathbb{N}$.

En résolvant l'une des équations, il vient :
$2n-1=2k'+17$ soit, $2n=2k'+18$ d'où, $\boxed{n=k'+9}$ avec $k'\in\mathbb{N}$.

e) *Déterminons les valeurs de n pour lesquelles a et b sont premiers entre eux.*

Dans ce cas, le $PGCD(a;b)=1$ ce qui équivaut à dire d'après ce qui précède que : $a=2k'+1$ et $b=9k'+5$ avec $k'\in\mathbb{N}$ et d'autre part, $a=2n-1$ et $b=9n+4$ ce qui conduit au système d'équations suivant :

$\begin{cases}2k'+1=2n-1\\9k'+5=9n+4\end{cases}$ avec $k'\in\mathbb{N}$.

En résolvant l'une des équations, il vient :
$2n-1=2k'+1$ soit, $2n=2k'+2$ d'où, $\boxed{n=k'+1}$ avec $k'\in\mathbb{N}$.

EXERCICE 3 :

Dérivée d'une bijection réciproque.

1-a) *Calculons :*

- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\dfrac{1}{\sin x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\left(\dfrac{1}{x}\times\dfrac{x}{\sin x}\right)$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\left(\dfrac{1}{x}\right)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)=1\end{array}\right\}$ Par produit des limites, il vient :

$\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)=+\infty.}$

- $\lim\limits_{\substack{x\to \pi\\x<\pi}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to \pi\\x<\pi}}\dfrac{1}{\sin x}=\lim\limits_{\substack{h\to 0\\h<0}}\left(\dfrac{1}{\sin(h+\pi)}\right)$

$=\lim\limits_{\substack{h\to 0\\h<0}}\left(-\dfrac{1}{\sinh}\right)=\lim\limits_{\substack{h\to 0\\h<0}}\left(-\dfrac{1}{h}\times\dfrac{h}{\sinh}\right)$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{h\to 0\\h<0}}\left(-\dfrac{1}{h}\right)=+\infty\\ \lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{h}{\sinh}\right)=1\end{array}\right\}$ Par produit des limites, il vient :

$\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to \pi\\x<\pi}} f(x)=+\infty.}$

Interprétons éventuellement les résultats obtenus.

Les droites d'équations $x=0$ et $x=\pi$ sont des asymptotes verticales à la courbe (C).

b) *Justifions que f est dérivable sur $]0;\pi[$.*

La fonction $x\mapsto\sin x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc sur $]0;\pi[$ où elle ne s'annule pas et par conséquent $f(x)=\dfrac{1}{\sin x}$ est dérivable sur $]0;\pi[$. Sa dérivée est :

$\boxed{f'(x)=-\dfrac{\cos x}{(\sin x)^2}}$ pour tout $x\in]0;\pi[$.

c) *Etudions le sens de variation de f, puis dressons son tableau complet de variation sur $]0;\pi[$.*

Déterminons le signe de $f'(x)$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow\cos x=0\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{2}$.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos x$		$+$	0	$-$	
$(\sin x)^2$		$+$		$+$	
-1		$-$		$-$	
$f'(x)$		$-$		$+$	

- $f'(x)<0$ pour tout $x\in\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$;
- $f'(x)>0$ pour tout $x\in\left]\dfrac{\pi}{2};\pi\right[$.

Conclusion : f est strictement décroissante pour tout $x\in\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ et, f est strictement croissante pour tout $x\in\left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right[$.

Tableau de variations :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

2-a) *Démontrons que g est une bijection de $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ vers un intervalle que l'on précisera.*

f est dérivable sur $]0;\pi[$ et donc à $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right]\subset]0;\pi[$ où f est strictement décroissante.

De plus, $f\left(\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right]\right)=[1;+\infty[$ alors, g est une bijec-

Scanné avec CamScanner

tion de $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$ vers $[1;+\infty[$.

b) *Justifions que g^{-1} est dérivable sur $]1;+\infty[$.*

Comme f est dérivable sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$, alors g est dérivable sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$ et donc sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ où g' ne s'annule pas et en plus, $g\left(\left]0;\frac{\pi}{2}\right[\right)=]1;+\infty[$. Donc, g^{-1} est dérivable sur $]1;+\infty[$.

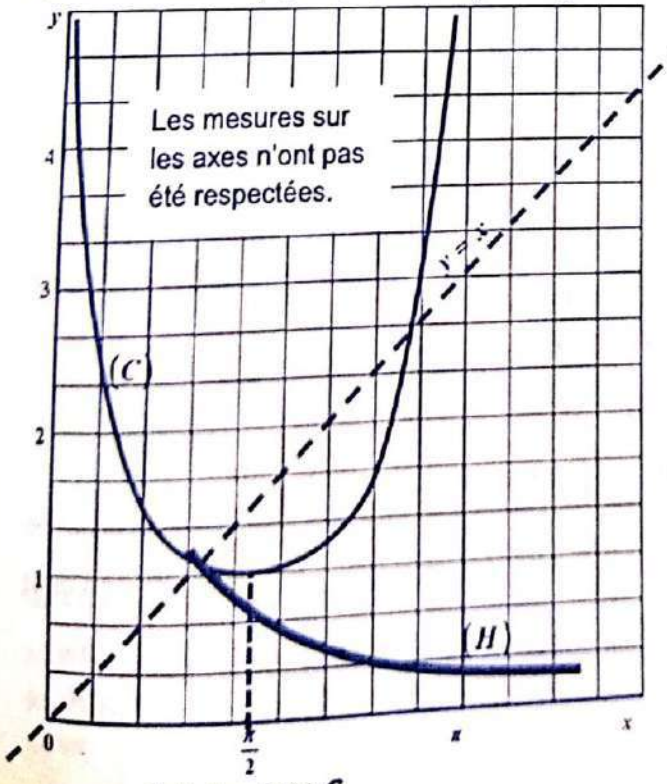
c) *Précisons le sens de variation de g^{-1}.*

g et g^{-1} ont le même sens de variation et comme g est strictement décroissante sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$ et que $g\left(\left]0;\frac{\pi}{2}\right]\right)=[1;+\infty[$ alors, g^{-1} est strictement décroissante sur $[1;+\infty[$.

Dressons son tableau complet de variation.

x	1	$+\infty$
$\left(g^{-1}\right)'(x)$	$-$	
$g^{-1}(x)$	$\frac{\pi}{2}$ ↘	0

d) *Construisons (C) et (H) dans $(O;\vec{i},\vec{j})$.*



3- *Résolvons dans $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$ l'équation $g(x)=2$.*

$g(x)=2\Leftrightarrow\frac{1}{\sin x}=2$ soit, $\sin x=\frac{1}{2}$; alors pour tout $x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$ on a $x=\frac{\pi}{6}$.

L'ensemble solution est : $S=\left\{\frac{\pi}{6}\right\}$.

Déterminons ensuite $\left(g^{-1}\right)'(2)$.

Comme $g\left(\frac{\pi}{6}\right)=2$, on a donc $g^{-1}(2)=\frac{\pi}{6}$ et partant, $\left(g^{-1}\right)'(2)=\frac{1}{g'\left[g^{-1}(2)\right]}$ d'où, $\left(g^{-1}\right)'(2)=\frac{1}{g'\left(\frac{\pi}{6}\right)}$ et enfin, $\boxed{\left(g^{-1}\right)'(2)=-\frac{\sqrt{3}}{6}.}$

4-a) *Montrons que pour tout x de $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$, $g(x)>0$ et que $g'(x)=-g(x)\sqrt{[g(x)]^2-1}$.*

Nous savons que g est strictement décroissante sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$; alors pour tout x de $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$, $x\leq\frac{\pi}{2}\Rightarrow g(x)\geq g\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$. En conclusion pour tout x de $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$ $g(x)>0$.

D'une part, $g(x)=\frac{1}{\sin x}$ soit, $\sin x=\frac{1}{g(x)}$.

D'autre part, comme $x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$ on a :

$(\cos x)^2+(\sin x)^2=1\Rightarrow\cos x=\sqrt{1-(\sin x)^2}$.

Or $g'(x)=-\frac{\cos x}{(\sin x)^2}$ alors, $g'(x)=-\frac{\sqrt{1-(\sin x)^2}}{(\sin x)^2}$

$$g'(x)=-\frac{\sqrt{1-\left(\frac{1}{g(x)}\right)^2}}{\left(\frac{1}{g(x)}\right)^2}=-\frac{\frac{1}{g(x)}\sqrt{(g(x))^2-1}}{\left(\frac{1}{g(x)}\right)^2}$$

$$g'(x)=-g(x)\sqrt{(g(x))^2-1}.$$

b) *Déduisons que, pour tout x de $]1;+\infty[$,*

$$\left(g^{-1}\right)'(x)=-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

Scanné avec CamScanner

Pour tout x de $]1;+\infty[$, $\left(g^{-1}\right)'(x)=\dfrac{1}{g'\left[g^{-1}(x)\right]}$

$$\left(g^{-1}\right)'(x)=-\frac{1}{g\left[g^{-1}(x)\right]\sqrt{\left[g\left[g^{-1}(x)\right]\right]^2-1}}$$

Or, $g\left[g^{-1}(x)\right]=x$ alors, $\left(g^{-1}\right)'(x)=-\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

5-a) *Trouvons les deux nombres réels a et b.*

Pour tout x de $]0;\pi[$;

$$f(x)=\frac{a\sin x}{1+\cos x}+\frac{b\sin x}{1-\cos x}=\frac{a\sin x(1-\cos x)+b\sin x(1+\cos x)}{1-(\cos x)^2}$$

$$\frac{a\sin x}{1+\cos x}+\frac{b\sin x}{1-\cos x}=\frac{a\sin x-a\sin x\cos x+b\sin x+b\sin x\cos x}{1-(\cos x)^2}$$

$$=\frac{a\sin x-a\sin x\cos x+b\sin x+b\sin x\cos x}{(\sin x)^2}$$

$$=\frac{a-a\cos x+b+b\cos x}{\sin x}$$

$$\frac{a\sin x}{1+\cos x}+\frac{b\sin x}{1-\cos x}=\frac{(a+b)-(a-b)\cos x}{\sin x}=\frac{1}{\sin x}$$

Par identification, il vient :

$\begin{cases}a+b=1\\ b-a=0\end{cases}$ soit, $\boxed{a=b=\dfrac{1}{2}}$.

b) *Déduisons l'aire $\mathcal{A}$, exprimée en unité d'aires.*

$$\mathcal{A}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} f(x)\,dx$$

$$\mathcal{A}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{1}{2}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}+\frac{\sin x}{1-\cos x}\right)dx$$

$$\mathcal{A}=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}+\frac{\sin x}{1-\cos x}\right)dx$$

$$\mathcal{A}=\frac{1}{2}\left[\ln(1-\cos x)-\ln(1+\cos x)\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}$$

$$\mathcal{A}=\frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}=\frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{1-\cos\frac{3\pi}{4}}{1+\cos\frac{3\pi}{4}}\right)-\ln\left(\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}}\right)\right]$$

$$\mathcal{A}=\frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{1+\cos\frac{3\pi}{4}}{1+\cos\frac{3\pi}{4}}\right)-\ln\left(\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}}\right)\right]$$

$$\mathcal{A}=\frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)-\ln\left(\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)\right]$$

$$\mathcal{A}=\frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right)-\ln\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right)\right]$$

$$\mathcal{A}=\frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}}{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right)\times\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right)\right]$$

$$\boxed{\mathcal{A}=\frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right)^2\right]=\ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right)\times u.a}$$

EXERCICE 4 :

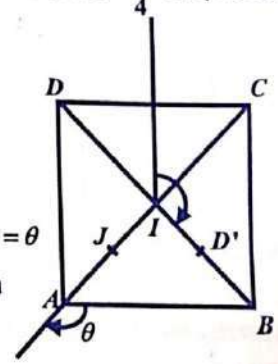
Similitude directe et problème de géométrie.

1-

a) *Justifions qu'il existe une unique similitude directe S telle que : $S(A)=I$ et $S(B)=J$.*

$ABCD$ est un carré donc $A\neq B$ et J est le milieu $[AI]$ alors $I\neq J$ et par conséquent, il existe une unique similitude directe S telle que $S(A)=I$ et $S(B)=J$.

b) *Montrons que le rapport de S est $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ et que son angle est $-\dfrac{3\pi}{4}$.*



$\begin{cases}S(A)=I\\ S(B)=J\end{cases}$

Ce qui signifie que :

$IJ=kAB$ et $mes\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{IJ}\right)=\theta$

où k désigne le rapport de la similitude et θ son angle.

Or, $IJ=\dfrac{1}{2}AI=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}AC$ avec $AC=\sqrt{2}AB$ alors,

$IJ=\dfrac{1}{2}AI=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}AB=\dfrac{\sqrt{2}}{4}AB$. Alors, $k=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

D'autre part, $mes\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{IJ}\right)=\theta=-\left(\pi-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{3\pi}{4}$.

c) *Démontrons :*

$\begin{cases}S(A)=I\\ S(D)=D'\end{cases}$ ce qui équivaut à dire que :

$ID'=\dfrac{\sqrt{2}}{4}AD$ et $mes\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{ID'}\right)=-\dfrac{3\pi}{4}$ soit,

$ID'=\dfrac{\sqrt{2}}{4}AD=\dfrac{\sqrt{2}}{4}AB=IJ=\dfrac{1}{2}IB$ ($AB=AD$; en effet il s'agit des côtés du carré et $mes\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{ID'}\right)=-\dfrac{3\pi}{4}$).

Scanné avec CamScanner

Donc, D' appartient à la demi-droite $[IB)$ tel que : $ID' = \frac{1}{2}IB$ et donc en conclusion, D' est le milieu de $[IB]$.

d) *Montrons que l'image C' du point C par S est le milieu de $[AB]$.*

Comme précédemment, $\begin{cases} S(A) = I \\ S(C) = C' \end{cases}$ ce qui équivaut à dire que : $IC' = \frac{\sqrt{2}}{4}AC$ et $mes\left(\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{IC'}}\right) = -\frac{3\pi}{4}$ soit, $IC' = \frac{\sqrt{2}}{4}AC = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{2}AB\right) = \frac{1}{2}AB$ (car, $AC = \sqrt{2}AB$) et $mes\left(\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{IC'}}\right) = -\frac{3\pi}{4}$.

Alors, C' appartient à la parallèle à (AD) passant par I telle que : $IC' = \frac{1}{2}AB$ et $mes\left(\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{IC'}}\right) = -\frac{3\pi}{4}$ et par conséquent, C' est le milieu de $[AB]$.

e) *Donnons la nature du quadrilatère $IJC'D'$ en justifiant la réponse.*

Comme J, C' et D' sont les milieux respectifs des segments $[IA]$, $[AB]$ et $[IB]$ alors les droites (IJ) et $(C'D')$ sont parallèles ainsi que les droites (ID') et (JC'). En plus, les droites (IJ) et (JC') sont orthogonales alors, le quadrilatère $IJC'D'$ est un carré direct.

2-

a) *Montrons que : $2\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega A};\overrightarrow{\Omega I}}\right) = 2\left(\widehat{\overrightarrow{DA};\overrightarrow{ID}}\right)$.*

$S(A) = I \Rightarrow mes\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega A};\overrightarrow{\Omega I}}\right) = -\frac{3\pi}{4}$ puis d'autre part, on a : $mes\left(\widehat{\overrightarrow{DA};\overrightarrow{ID}}\right) = -\frac{3\pi}{4}$ et par conséquent, on a alors : $2\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega A};\overrightarrow{\Omega I}}\right) = 2\left(\widehat{\overrightarrow{DA};\overrightarrow{ID}}\right)$.

Montrons ensuite que : $2\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega B};\overrightarrow{\Omega J}}\right) = 2\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AJ}}\right)$.

$S(B) = J \Rightarrow mes\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega B};\overrightarrow{\Omega J}}\right) = -\frac{3\pi}{4}$; alors on a : $2\,mes\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega B};\overrightarrow{\Omega J}}\right) = -\frac{3\pi}{4}\times 2 = -\frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$. D'autre part, on a : $mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AJ}}\right) = \frac{\pi}{4}$ et donc, $2mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AJ}}\right) = \frac{\pi}{2}$. En conclusion, on a bien $2\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega B};\overrightarrow{\Omega J}}\right) = 2\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AJ}}\right)$.

b) *Déduisons que les points Ω, A, I et D d'une part et les points Ω, A, B et J d'autre part sont cocycliques.*

Comme $2\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega A};\overrightarrow{\Omega I}}\right) = 2\left(\widehat{\overrightarrow{DA};\overrightarrow{ID}}\right)$, alors les points Ω, A, I et D sont cocycliques.

De façon analogue, $2\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega B};\overrightarrow{\Omega J}}\right) = 2\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AJ}}\right)$ alors, les points Ω, A, B et J sont cocycliques.

c) *Expliquons comment construire Ω.*

Ω est le point d'intersection du cercle circonscrit au triangle AID et du cercle circonscrit au triangle ABJ, distinct de A.

d) *Montrons que les droites (ΩA) et (ΩD) sont orthogonales.*

Ω appartient au cercle circonscrit au triangle AID qui est un triangle rectangle en I. Alors, Ω appartient au cercle de diamètre $[AD]$, ce qui signifie que le triangle $A\Omega D$ est rectangle en Ω et par conséquent, les droites (ΩA) et (ΩD) sont orthogonales.

Scanné avec CamScanner

Exercice 1 :

Choisissons la bonne réponse.

1	2	3	4	5
B	A	C	A	B

Exercice 2 :

A.1. *Montrons que n^2+4n+3 est divisible par $n+1$.*

On constate que : $n^2+4n+3=(n+2)^2-4+3$ soit, $n^2+4n+3=(n+2)^2-1^2=(n+2-1)(n+2+1)$ d'où $n^2+4n+3=(n+1)(n+3)$ et par conséquent, n^2+4n+3 est bien divisible par $n+1$.

2. *Vérifions que $2n^2+8n+9=2(n^2+4n+3)+3$*

$2(n^2+4n+3)+3=2n^2+8n+6+3=2n^2+8n+9$

Déterminons ensuite l'ensemble des entiers naturels n tels que $n+1$ divise $2n^2+8n+9$.

$(n+1)$ divise $2n^2+8n+9$ équivaut à dire que $(n+1)$ divise $2n^2+8n+9-2(n^2+4n+3)+3$ alors, $(n+1)$ divise 1 *et* 3 et par conséquent : $n+1=1$ ou $n+1=3$ soit, $n=0$ ou $n=2$.

$\boxed{S=\{1;2\}}$.

B. *Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $3^{n+3}-4^{4n+2}$ est divisible par 11.*

Pour $n=0$, on a :

$3^{0+3}-4^{4\times0+2}=3^3-4^2=27-16=11$; comme 11 divise 11, la propriété est vraie au rang 0.

Supposons que $3^{n+3}-4^{4n+2}$ est divisible par 11 au rang $n>0$ puis démontrons que $3^{n+4}-4^{4(n+1)+2}$ l'est aussi c'est-à-dire que la propriété est vraie au rang $n+1$.

$3^{n+4}-4^{4(n+1)+2}=3^{n+3}\times3-4^{4n+2}\times4^4$

$3^{n+4}-4^{4(n+1)+2}=3^{n+3}\times3-4^{4n+2}\times4^4$

$=3^{n+3}\times3-4^4(3^{n+3})+4^4(3^{n+3})-4^{4n+2}\times4^4$

$3^{n+4}-4^{4(n+1)+2}=4^4(3^{n+3}-4^{4n+2})+3^{n+3}(3-4^4)$

D'après l'hypothèse de récurrence, $3^{n+3}-4^{4n+2}$ est divisible par 11 donc, $3^{n+3}-4^{4n+2}=11k$, $k\in\mathbb{Z}$ et d'autre part, $3^{n+3}(3-4^4)=-253\times3^{n+3}$ or, $253=23\times11$ d'où, $3^{n+3}(3-4^4)=-253\times3^{n+3}=11k'$, $k'\in\mathbb{Z}$.

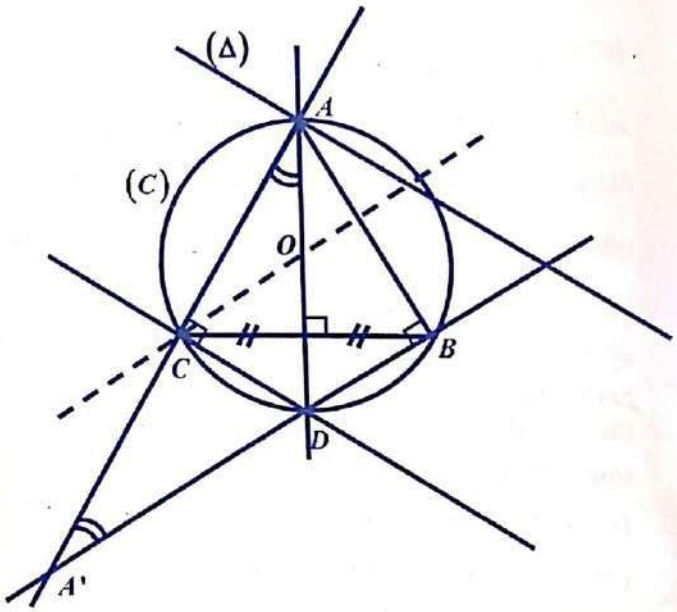
en définitive, on obtient :

$3^{n+4}-4^{4(n+1)+2}=4^4\times11k+11k'=11(4^4k+k')$

soit, $3^{n+4}-4^{4(n+1)+2}$ est divisible par 11 et la propriété est vraie au rang $n+1$. En conclusion, $3^{n+3}-4^{4n+2}$ est divisible par 11.

Exercice 3 :

1- *Faisons une figure.*



2.a. *Justifions que :* $mes(\widehat{\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AC}})=\frac{\pi}{6}$.

(AD) est la médiatrice de $[BC]$, est aussi la bissectrice de $\widehat{BAC}$ en effet le triangle ABC est équilatéral et par conséquent, $mes(\widehat{\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AC}})=\frac{\pi}{6}$.

Justifions aussi que : $mes(\widehat{\overrightarrow{A'A};\overrightarrow{A'B}})=\frac{\pi}{6}$.

Les angles $\widehat{ABD}$ et $\widehat{AOD}$ interceptent le même arc de cercle $\widehat{AD}$ alors, la mesure de l'angle inscrit est la moitié de l'angle au centre : $mes\widehat{ABD}=\frac{1}{2}mes\widehat{AOD}=\frac{\pi}{2}$

d'autre part, dans le triangle $A'AB$ on a :

$mes(\widehat{\overrightarrow{A'A};\overrightarrow{A'B}})=\pi-mes\widehat{BAC}-mes\widehat{ABD}$

$mes(\widehat{\overrightarrow{A'A};\overrightarrow{A'B}})=\pi-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{6}$.

Justifions enfin que : $(AC)\perp(DC)$.

Scanné avec CamScanner

De ce qui précède, on a : $mes\widehat{ABD}=\frac{1}{2}mes\widehat{AOD}=\frac{\pi}{2}$

de façon analogue, $mes\widehat{ACD}=\frac{1}{2}mes\widehat{AOD}=\frac{\pi}{2}$ et par conséquent, $(AC)\perp(DC)$.

b. ***Déduisons que C est le milieu de $[AA']$.***

$mes\left(\widehat{\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AC}}\right)=mes\left(\widehat{\overrightarrow{A'A};\overrightarrow{A'D}}\right)$, alors ADA' est triangle isocèle en D. D'autre part, $(AC)\perp(DC)$, alors (DC) est une hauteur et aussi une médiatrice du triangle ADA' et par conséquent C est le milieu de $[AA']$.

3-a- Donnons la nature et les éléments caractéristiques des transformations :

- $g=S_{(BD)}\circ S_{(DC)}$

g est la rotation de :

- centre D ;

- d'angle de mesure $2mes\left(\widehat{\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DB}}\right)=\frac{4\pi}{3}=-\frac{2\pi}{3}$.

- $h=S_{(CA)}\circ S_{(AB)}$

h est la rotation de :

- centre A ;

- d'angle de mesure $2mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)=\frac{2\pi}{3}$.

b- ***Montrons que :***

- $S_{(DC)}\circ S_{(DA)}=g$

$$S_{(DC)}\circ S_{(DA)}=r\left(D;\ 2mes\left(\widehat{\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC}}\right)\right)$$
$$=r\left(D;\frac{4\pi}{3}\right)=g.$$

- $S_{(DA)}\circ S_{(\Delta)}=h.$

$$S_{(DA)}\circ S_{(\Delta)}=r\left(A;\ 2mes\left(\widehat{\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DA}}\right)\right)$$
$$=r\left(A;\frac{2\pi}{3}\right)=h.$$

4-a) Déterminons $f(A)$ puis, précisons la nature et l'élément caractéristique de f.

$f(A)=(g\circ h)(A)=g\left[h(A)\right]=g(A).$

$f(A)=S_{(BD)}\circ S_{(DC)}(A)=S_{(BD)}(A')=A'$

$f(A)=A'.$

Comme d'autre part $-\frac{2\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}=0$, alors f est la translation du vecteur $\overrightarrow{AA'}$.

b- ***Précisons la nature et les éléments qui caractérisent $t_{\overrightarrow{AA'}}\circ S_{(AC)}$.***

$\overrightarrow{AA'}\neq\vec{0}$ est un vecteur directeur de la droite (AC) ; alors $t_{\overrightarrow{AA'}}\circ S_{(AC)}$ est la symétrie glissée d'axe (AC) et de vecteur directeur $\overrightarrow{AA'}$.

Exercice 4 :

A- Etude d'une famille de fonction

1- ***Montrons que toutes les courbes (C_n) passent par deux points A et B, A étant le point dont l'ordonnée est positive.***

Cela signifie que, $f_n(x)=f_{n+1}(x)$ soit alors,

$-x^ne^x+1=-x^{n+1}e^x+1$

$x^{n+1}e^x-x^ne^x=0$

$x^n(x-1)e^x=0$

Or comme $e^x>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ alors $x^n=0$ ou $x-1=0$

$x=0$ ou $x=1$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$

Alors, les courbes (C_n) passent par les points $A\begin{pmatrix}0\\f(0)\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}1\\f(1)\end{pmatrix}$; soit $\boxed{A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\text{ et }B\begin{pmatrix}1\\1-e\end{pmatrix}.}$

2- ***Calculons :***

- $\lim\limits_{x\to-\infty}f_n(x)$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^ne^x\right)=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(1)=1\end{array}\right\}$ par addition des limites, on a :

$\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}f_n(x)=1.}$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}f_n(x)$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^n\right)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x\right)=+\infty\end{array}\right\}$ par produit des limites, on a :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^ne^x\right)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^ne^x+1\right)=-\infty$

$\boxed{\bullet\ \lim\limits_{x\to+\infty}f_n(x)=-\infty.}$

Alors, la droite d'équation $y=1$ est une asymptote horizontale à (C_n) à $-\infty$.

Scanné avec CamScanner

3- *Etudions suivant la parité de n, les variations de f_n et dressons le tableau de variations.*

La fonction f_n est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f_n'(x) = -nx^{n-1}e^x - x^n e^x = x^{n-1}e^x(-n-x)$$

$$\boxed{f_n'(x) = x^{n-1}e^x(-n-x)}$$

- Si n est impair, alors $n-1$ est pair et par conséquent, $x^{n-1} \geq 0$ et comme $e^x > 0$ alors $f_n'(x)$ a le même signe que $-n-x$.

Or, $f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow -n-x = 0$ ou $x^{n-1} = 0$ donc $x = -n$ ou $x = 0$.

Tableau de signe

x	$-\infty$		$-n$		0		$+\infty$
$-x-n$		$+$	0	$-$	0	$-$	
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	

* Si $x \in]-\infty ; -n[$, $f_n'(x) > 0$ et f_n est croissante sur cet intervalle.

* Si $x \in [-n ; +\infty[$, $f_n'(x) \leq 0$ et f_n est décroissante sur cet intervalle.

Tableau de variations

x	$-\infty$		$-n$		0		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	
$f_n(x)$	1	↗	$n^n e^n + 1$	↘	1	↘	$-\infty$

- Si n est pair, alors $n-1$ est impair et comme $e^x > 0$ alors $f_n'(x)$ a le même signe que $x^{n-1}(-n-x)$.

Tableau de signe

x	$-\infty$		$-n$		0		$+\infty$
$-x-n$		$-$	0	$-$		$+$	
x^{n-1}		$+$		$-$	0	$-$	
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

* Si $x \in]-\infty ; -n] \cup [0 ; +\infty[$, $f_n'(x) \leq 0$ et f_n est décroissante sur chacun de ces intervalles.

* Si $x \in]-n ; -0[$, $f_n'(x) > 0$ et f_n est croissante sur cet intervalle.

Tableau de variations

x	$-\infty$		$-n$		0		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	1	↘	$-n^n e^{-n} + 1$	↗	1	↘	$-\infty$

B- Etude d'une suite de la fonction f.

1- *Justifions l'existence de la suite (U_n) et calculons U_1.*

La fonction f_n étant dérivable sur $\mathbb{R}$ est également continue sur $\mathbb{R}$ et par conséquent, la suite U_n existe.

- **Calcul de U_1.**

$$U_1 = \int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 (-te^t + 1)\,dt = \int_0^1 -te^t\,dt + \int_0^1 dt$$

Procédons par une intégration par parties pour calculer $\int_0^1 -te^t\,dt$; posons alors : $\begin{cases} u(t) = -t \ ; \ u'(t) = -1 \\ v'(t) = e^t \ ; \ v(t) = e^t. \end{cases}$

$$\int_0^1 -te^t\,dt = \left[-te^t\right]_0^1 + \int_0^1 e^t\,dt = (-e+0) + (e-1)$$

$\int_0^1 -te^t\,dt = -1$. D'autre part, $\int_0^1 dt = 1$.

Et finalement on obtient : $\boxed{U_1 = -1+1 = 0.}$

2- *Montrons que pour tout $x \in [0 ; 1]$:*

$f_{n+1}(x) - f_n(x) \geq 0$.

Montrons :

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = (-x^{n+1}e^x + 1) - (-x^n e^x + 1)$$

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = (-x^{n+1}e^x + 1 + x^n e^x - 1)$$

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = (-x^{n+1} + x^n)e^x = x^n e^x(-x+1)$$

Or, $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow x - 1 \leq 0$ et $-x+1 \geq 0$ alors, puisque $e^x > 0$ on a bien $f_{n+1}(x) - f_n(x) \geq 0$.

Déduisons que la suite (U_n) est croissante.

$$U_{n+1} - U_n = \int_0^1 f_{n+1}(t)\,dt - \int_0^1 f_n(t)\,dt$$

$$U_{n+1} - U_n = \int_0^1 (f_{n+1}(t) - f_n(t))\,dt \geq 0.$$

Alors, la suite (U_n) est croissante.

3-*Utilisons le résultat de A-3 pour montrer que pour*

Scanné avec CamScanner

Sujet voir p.28-29

$x \in [0;1]$, $f_n(x) \leq 1$.

D'après la question A-3 :

- Si n est pair, $f_n([0;+\infty[) =]-\infty;1]$, alors pout tout $x \in [0;1]$, $f_n(x) \leq 1$.
- Si n est impair, pout tout $x \in [0;1]$ d'après le tableau de variations plus haut, 1 est le maximum de f_n.

D'où, $f_n(x) \leq 1$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0;1]$, $f_n(x) \leq 1$.

Déduisons que la suite (U_n) est majorée.

De ce qui précède, il vient :

$$U_n = \int_0^1 f_n(t)\,dt \leq \int_0^1 1\,dt \Rightarrow U_n \leq 1.$$

4- Disons si la suite est convergente.

La suite (U_n) étant à la fois croissante et majorée, alors cette suite est convergente.

Scanné avec CamScanner

sujet voir p.30 - 31

EXERCICE 1 :

Partie A : *on suppose que f est affine.*

1- *Justifions que : si $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{QP}$ alors $\overrightarrow{M'N'}=\overrightarrow{Q'P'}$.*

f est une application affine alors elle conserve le coefficient de colinéarité.

Comme $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{QP}$ et que M', N', P' et Q' sont des images respectives des points M, N, P et Q par f alors, on a bien : $\overrightarrow{M'N'}=\overrightarrow{Q'P'}$.

2-a) *Démontrons que est φ linéaire.*

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan représentants respectifs des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{NP}$.

$$\varphi\left(\vec{u}+\vec{v}\right)=\varphi\left(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}\right)$$
$$=\varphi\left(\overrightarrow{MP}\right)$$
$$=\overrightarrow{f(M)f(P)}$$

$\varphi\left(\vec{u}+\vec{v}\right)=\overrightarrow{M'P'}$ en effet, $f(M)=M'$ et $f(P)=P'$.

$$=\overrightarrow{M'N'}+\overrightarrow{N'P'}$$ d'après la relation de Chasles
$$=\overrightarrow{f(M)f(N)}+\overrightarrow{f(N)f(P)}$$
$$=\varphi\left(\overrightarrow{MN}\right)+\varphi\left(\overrightarrow{NP}\right)$$

$$\varphi\left(\vec{u}+\vec{v}\right)=\varphi\left(\vec{u}\right)+\varphi\left(\vec{v}\right)\quad(1).$$

Soit $\lambda\in\mathbb{R}$, et soit $\vec{u}$ un vecteur représentant le vecteur $\overrightarrow{MN}$ tel que $\lambda\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MP}$.

$$\varphi\left(\lambda\vec{u}\right)=\varphi\left(\lambda\overrightarrow{MN}\right)$$
$$=\varphi\left(\overrightarrow{MP}\right)$$
$$=\overrightarrow{f(M)f(P)}$$

$\varphi\left(\lambda\vec{u}\right)=\overrightarrow{M'P'}$. Or, f est affine donc conserve le coefficient de colinéarité. Alors, $\overrightarrow{M'P'}=\lambda\overrightarrow{M'N'}$. Et donc,

$$\varphi\left(\lambda\vec{u}\right)=\lambda\overrightarrow{M'N'}$$
$$=\lambda\overrightarrow{f(M)f(N)}$$
$$=\lambda\varphi\left(\overrightarrow{MN}\right)$$

$$\varphi\left(\lambda\vec{u}\right)=\lambda\varphi\left(\vec{u}\right)\quad(2).$$

Des relations (1) et (2), nous pouvons conclure que φ **est une application linéaire** (ou endomorphisme) associée à l'application affine f.

b) *Déduisons que : $\varphi\left(\vec{0}\right)=\vec{0}$.*

$$\varphi\left(\vec{0}\right)=\varphi\left(\overrightarrow{MM}\right)$$
$$\varphi\left(\vec{0}\right)=\overrightarrow{f(M)f(M)}$$
$$\varphi\left(\vec{0}\right)=\overrightarrow{M'M'}$$
$$\varphi\left(\vec{0}\right)=\vec{0}.$$

c) *Démontrons :*

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan : $\varphi\left(\vec{u}\right)=\varphi'\left(\vec{u}\right)$ équivaut à dire que $(\varphi-\varphi')\left(\vec{u}\right)=\vec{0}$. Or, l'application qui à tout vecteur $\vec{u}$ du plan associe le vecteur nul est **l'application nulle**. Et par conséquent, $(\varphi-\varphi')=0$ soit finalement, $\varphi=\varphi'$.

d) *Enoncé du résultat établi dans cette partie.*

Pour toute application affine ponctuelle f du plan, il existe une unique application vectorielle linéaire φ associée à f telle que pour tout vecteur $\vec{u}$ de représentant $\overrightarrow{MN}$, on a : $\varphi\left(\vec{u}\right)=\overrightarrow{f(M)f(N)}$.

Partie B :

1-*Démontrons que $f(G)$ est le barycentre des points pondérés $(f(A);a)$ et $(f(B);a)$.*

Comme G est le barycentre des deux points pondérés $(A;a)$ et $(B;a)$, on a : $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ et donc, il vient :

$\varphi\left(a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}\right)=\varphi\left(\vec{0}\right)$ soit, $a\,\varphi\left(\overrightarrow{GA}\right)+b\,\varphi\left(\overrightarrow{GB}\right)=\vec{0}$.

En effet, $\varphi\left(\vec{0}\right)=\vec{0}$ d'après ce qui précède. D'où,

$a\overrightarrow{f(G)f(A)}+b\overrightarrow{f(G)f(B)}=\vec{0}$.

Ce qui signifie que $f(G)$ ***est le barycentre*** des points pondérés $(f(A);a)$ et $(f(B);a)$.

2- *Déduisons que f est une application affine.*

De ce qui précède, on remarque que f « conserve » le barycentre de deux points pondérés. Alors, f est une application affine.

3-

Pour montrer qu'une application ponctuelle du plan dans lui-même est affine, il suffit de montrer que l'application vectorielle qui lui est associée est linéaire.

Partie C :

1- *Démontrons que, pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan, on a : $\varphi\left(\vec{u}\right)=\vec{u}+\left(\vec{u}\cdot\vec{j}\right)\vec{i}$.*

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan représentant le vecteur $\overrightarrow{MN}$, et soit M' et N' les images respectives des points M

Scanné avec CamScanner

et N.

On a : $\varphi(\vec{u}) = \varphi(\overrightarrow{MN})$

$= \overrightarrow{M'N'}$

$= \overrightarrow{M'O} + \overrightarrow{ON'}$ d'après la relation de Chasles.

$= \overrightarrow{ON'} - \overrightarrow{OM'}$

$= \overrightarrow{ON} + (\overrightarrow{ON} \cdot \vec{j}) \cdot \vec{i} - \overrightarrow{OM} - (\overrightarrow{OM} \cdot \vec{j}) \cdot \vec{i}$

$= \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} + (\overrightarrow{ON} \cdot \vec{j} - \overrightarrow{OM} \cdot \vec{j}) \cdot \vec{i}$

$= \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON} + ((\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}) \cdot \vec{j}) \cdot \vec{i}$

$= \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON} + ((\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON}) \cdot \vec{j}) \cdot \vec{i}$

$= \overrightarrow{MN} + (\overrightarrow{MN} \cdot \vec{j}) \cdot \vec{i}$

$\varphi(\vec{u}) = \vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{j}) \cdot \vec{i}$.

2- *Démontrons alors que f est une application affine.*

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan, et $\beta \in \mathbb{R}$.

$\varphi(\vec{u} + \beta\vec{v}) = \vec{u} + \beta\vec{v} + ((\vec{u} + \beta\vec{v}) \cdot \vec{j}) \cdot \vec{i}$

$= \vec{u} + \beta\vec{v} + (\vec{u} \cdot \vec{j} + \beta\vec{v} \cdot \vec{j}) \cdot \vec{i}$

$= \vec{u} + \beta\vec{v} + (\vec{u} \cdot \vec{j}) \cdot \vec{i} + (\beta\vec{v} \cdot \vec{j}) \cdot \vec{i}$

$= \vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{j}) \cdot \vec{i} + \beta(\vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{j}) \cdot \vec{i})$

$\varphi(\vec{u} + \beta\vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \beta\varphi(\vec{v})$ alors, d'après les **propriétés**, la fonction φ est **linéaire** et par conséquent la fonction f est affine.

3-a) *Déterminons l'image par φ du vecteur $\vec{u} - y\vec{i}$.*

$\varphi(\vec{u} - y\vec{i}) = \varphi(\vec{u}) - y\varphi(\vec{i})$

$= \vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{j}) \cdot \vec{i} - y[\vec{i} + (\vec{i} \cdot \vec{j}) \cdot \vec{i}]$ comme $y = \vec{u} \cdot \vec{j}$,

$= \vec{u} + (y) \cdot \vec{i} - y \cdot \vec{i}$

$= \vec{u} + y \cdot \vec{i} - y \cdot \vec{i}$

$\varphi(\vec{u} - y\vec{i}) = \vec{u}$.

b) *Déduisons que f est une transformation affine.*

$\vec{u}$ étant un vecteur du plan, y un nombre réel et $\vec{u} - y\vec{i}$ un autre vecteur du plan. Dire que $\varphi(\vec{u} - y\vec{i}) = \vec{u}$ signifie que pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan, il existe un **unique** vecteur $\vec{u} - y\vec{i}$ tel que $\varphi(\vec{u} - y\vec{i}) = \vec{u}$. Donc, φ est **bijective** et par conséquent f est une application affine bijective c'est-à-dire **une transformation affine.**

c) *Déterminons l'image du plan f.*

f étant une bijection, l'image du plan par f est le plan lui-même.

EXERCICE 2 :

1-a) *Montrons :*

On a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$;

$(1-x)(1+x+x^2+...+x^{k-1}) = 1+x+...+x^{k-1} - x - x^2 - ... - x^k$.

Et donc, $(1-x)(1+x+x^2+...+x^{k-1}) = 1-x^k$.

b) *Montrons que : $a^d - 1$ est un diviseur de $a^n - 1$.*

$1-a^n = 1-a^{dk}$; en effet $n = dk$, $(k \in \mathbb{N})$.

$1-a^n = 1-(a^d)^k$

$1-a^n = (1-a^d)[1+a^d+(a^d)^2+...+(a^d)^{k-1}]$

$(1-a^n) = (1-a^d)[1+a^d+a^{2d}+...+a^{kd-d}]$

Donc $1-a^d$ est un diviseur de $1-a^n$ et par conséquent, $a^d - 1$ est un diviseur de $a^n - 1$.

c) *Déduisons que : $2^{2004} - 1$ est divisible par 7 et par 63.*

$2004 = 3 \times 668$. De ce qui précède, il vient :

$1-2^{2004} = 1-(2^3)^{668} = (1-2^3)(1+2^3+...+(2^3)^{667})$

donc, $2^{2004} - 1 = (2^3-1)(1+2^3+...+2^{2001})$ et par la suite ; $2^{2004} - 1 = 7 \times (1+2^3+...+2^{2001})$ et par conséquent, **7 divise $2^{2004} - 1$.**

De façon analogue, $2004 = 6 \times 334$. On obtient alors,

$1-2^{2004} = 1-(2^6)^{334} = (1-2^6)(1+2^6+...+(2^6)^{333})$

soit, $2^{2004} - 1 = (2^6-1)(1+2^6+...+2^{1998})$ d'où,

$2^{2004} - 1 = 63 \times (1+2^6+...+2^{1998})$ et par conséquent,

63 divise $2^{2004} - 1$.

2-a) *Montrons :*

- $7^0 = 1$ donc, $7^0 \equiv 1[9]$
- $7^1 = 7$ avec, $7 = 9 \times 0 + 7$ alors, $7^1 \equiv 7[9]$
- $7^2 = 49$ avec, $49 = 9 \times 5 + 4$ alors, $7^2 \equiv 4[9]$
- $7^3 = 343$ avec, $343 = 9 \times 38 + 1$ alors, $7^3 \equiv 1[9]$.

b) *Que peut-on conjecturer ?*

On peut donc conjecturer que :

- $7^{3n} \equiv 1[9]$ • $7^{3n+1} \equiv 7[9]$ • $7^{3n+2} \equiv 4[9]$.

c) *Démontrons :*

D'après ce qui précède, on sait que : $7^3 \equiv 1[9]$.

Alors, pour tout entier naturel k, $(7^3)^k \equiv (1)^k [9]$ soit, $7^{3k} \equiv 1[9]$. Comme d'autre part $7^1 \equiv 7[9]$, à partir du

Scanné avec CamScanner

résultat précédent, il vient : $7^{3k}\times 7^1 \equiv 1\times 7\,[9]$ soit finalement, $7^{3k+1} \equiv 7\,[9]$.

Toujours en adoptant le même raisonnement, on sait de ce qui précède que $7^2 \equiv 4[9]$ et $7^{3k} \equiv 1[9]$. On peut alors dire que $7^{3k}\times 7^2 \equiv 1\times 4\,[9]$ soit, $7^{3k+2} \equiv 4\,[9]$.

d) *Effectuons la division euclidienne de 1988 par 3.*

Il vient : $1988 = 3\times 662 + 2$.

e) *Déduisons le reste de cette division euclidienne.*

De ce qui précède, $7^{1988} = 7^{3\times 662+2}$; alors comme $7^{3k+2} \equiv 4\,[9]$ on a, $7^{1988} = 7^{3\times 662+2} \equiv 4[9]$.

Alors, ce **reste** est égal à **4**.

3-a) *Ecrivons l'algorithme d'Euclide.*

$24 = 17\times 1 + 7$

$17 = 2\times 7 + 3$

$7 = 2\times 3 + 1$.

Donc, le $PGCD(17;24) = 1$.

b) *Déduisons une solution particulière de (E).*

$1 = 7 - 2\times 3$

$= 7 - 2\times(17 - 2\times 7)$

$= 7 + 4\times 7 - 2\times 17$

$= 5\times 7 - 2\times 17$

$= 5(24 - 1\times 17) - 2\times 17$

$= 5\times 24 - 5\times 17 - 2\times 17$

$1 = (-7)\times 17 - (-5)\times 24$.

D'après le corollaire de Bézout, comme le $PGCD(17;24) = 1$ et que 9 est un **multiple** de 1 l'équation (E) admet des solutions entières.

Alors, $(-63\,;-45)$ est une solution particulière de (E).

c) *Résolution de (E).*

On a : $\begin{cases} 17x - 24y = 9 \\ 17(-63) - 24(-45) = 9 \end{cases}$ Par soustraction termes à termes des deux égalités, on obtient :

$17(x+63) = 24(y+45)$ (E'). Ce qui signifie que : 24 divise $17(x+63)$. Or, $PGCD(17;24) = 1$ donc, d'après le **théorème** de **Gauss**, 24 divise $(x+63)$.

On a donc : $x + 63 = 24k$, $k \in \mathbb{Z}$. En remplaçant dans (E') il vient : $y + 45 = 17k$ soit, $y = 17k - 45$.

* Les solutions de l'équation (E) sont de la forme :

$\begin{cases} x = 24k - 63 \\ y = 17k - 45 \end{cases}$ avec, $k \in \mathbb{Z}$.

EXERCICE 3 :

Partie A :

1- *Etudions la continuité et la dérivabilité de f en 0.*

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x\ln x}{x+1}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(\frac{1}{x+1}\times x\ln x\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (x\ln x) = 0 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(\frac{1}{x+1}\right) = 1 \end{array}\right\}$$ par **produit** des limites, il vient :

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = 0$ et comme $f(0) = 0$ donc, f est continue en 0.

D'autre part, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\frac{x\ln x}{x+1} - 0}{x-0}$ soit,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(\ln x \times \frac{1}{x+1}\right)$$

Donc, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\infty$.

Donc, f n'est pas dérivable en 0.

2-a) *Etudions le sens de variation de h.*

La fonction $x \mapsto \ln x$ est dérivable sur $]0;+\infty[$; la fonction $x \mapsto x+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $]0;+\infty[$ et par conséquent, la fonction $h : x \mapsto \ln x + x + 1$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et sa dérivée est telle que :

• $h'(x) = \frac{1}{x} + 1$.

Comme $x \in]0;+\infty[$, $\frac{1}{x} + 1 > 0$ donc h est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

b) *Etablissons que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique β telle que $0,27 \le \beta \le 0,28$.*

Comme h est dérivable et strictement croissante sur $]0;+\infty[$, h l'est aussi sur $[0,27;0,28]$ et réalise ainsi une bijection. D'autre part, $h(0,27) < 0$ et $h(0,28) > 0$ alors, l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique β sur l'intervalle $[0,27;0,28]$.

c) *Déduisons le signe de h sur $]0;+\infty[$.*

* $\forall x \in]0;\beta[$ on a $h(x) < 0$;

* Pour $x = \beta$ on a $h(x) = 0$;

Scanné avec CamScanner

* $\forall x \in]\beta;+\infty[$ on a $h(x)>0$.

3-a) Justifions que f est dérivable sur $]0;+\infty[$.

$$f(x)=\frac{x\ln x}{x+1}=\frac{x}{x+1}\times\ln x.$$

La fonction $x\mapsto\frac{x}{x+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ et donc sur $]0;+\infty[$ et la fonction $x\mapsto\ln x$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et par conséquent, la fonction f **est dérivable sur** $]0;+\infty[$.

• ***Calculons*** $f'(x)$ ***pour tout*** x ***de*** $]0;+\infty[$.

$$f'(x)=\frac{(x+1)(\ln x+1)-1\times x\ln x}{(x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{x\ln x+\ln x+x+1-x\ln x}{(x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{\ln x+x+1}{(x+1)^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{h(x)}{(x+1)^2}}$$ pour tout $x\in]0;+\infty[$.

b) *Etudions le sens de variations de* f ***sur*** $]0;+\infty[$.

D'après ce qui précède, $f'(x)$ a le même signe que $h(x)$ sur $]0;+\infty[$.

* $\forall x\in]0;\beta[$ on a $f'(x)<0$; donc f est strictement décroissante sur $]0;\beta[$;

* $\forall x\in]\beta;+\infty[$ on a $f'(x)>0$; donc f est strictement croissante sur $]\beta;+\infty[$.

c) *Déterminons la limite de* f ***en*** $+\infty$, ***puis la limite en*** $+\infty$ ***de*** $f(x)-\ln x$.

* ***Déterminons la limite de*** f ***en*** $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x\ln x}{x+1}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x+1}\times\ln x\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)=1\end{array}\right\}$$ Par produit des limites, on a :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty.}$$

* ***Déterminons la limite de*** $f(x)-\ln x$ ***en*** $+\infty$

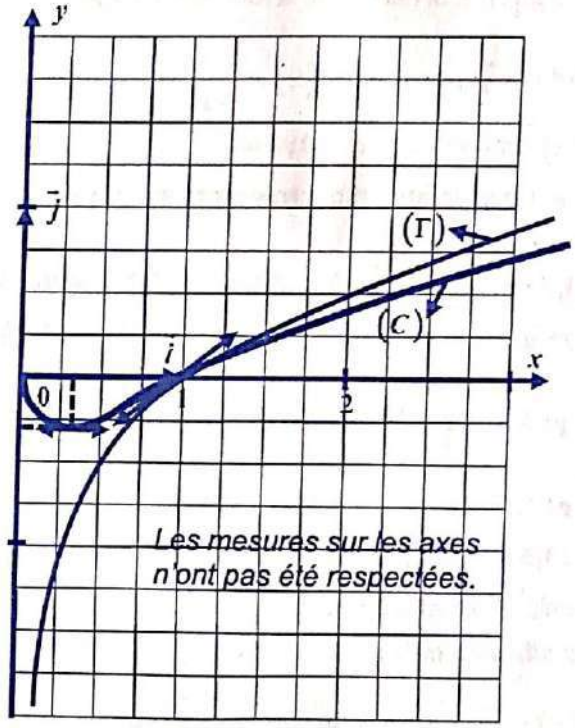
$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\ln x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-\ln x}{x+1}\right]$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\ln x\right]=0.}$$

* ***Interprétons graphiquement ce résultat.***

Donc la courbe représentative de la fonction $x\mapsto\ln x$ est asymptote à la courbe représentative de f.

d) *Construisons les courbes représentatives* (C) ***de*** f ***et*** (Γ) ***de*** $x\mapsto\ln x$ ***dans le repère*** $(O;\vec{i},\vec{j})$.



Partie B :

1-*Démontrons que l'équation* $f(x)=1$ ***admet une solution unique*** α ***et que*** $\alpha\in[3,5;3,7]$.

La fonction f est dérivable et strictement croissante sur $]\beta;+\infty[$ et en particulier sur $[3,5;3,7]$. De plus $1\in[f(3,5);f(3,7)]$. Donc, il existe un unique antécédent α de 1 dans $[3,5;3,7]$ et par conséquent, l'équation $f(x)=1$ admet une solution unique α dans $[3,5;3,7]$.

2- *Justifions :*

$$f(x)=1\Leftrightarrow\frac{x\ln x}{x+1}=1$$

$f(x)=1\Leftrightarrow x\ln x=x+1$; en effet, $x\in]0;+\infty[$

$$f(x)=1\Leftrightarrow\ln x=1+\frac{1}{x}$$

Scanné avec CamScanner

$f(x)=1 \Leftrightarrow x=e^{1+\frac{1}{x}}=e\times e^{\frac{1}{x}}$

$f(x)=1 \Leftrightarrow x=g(x)$.

3-a) *Etudions le sens de la variation de g.*

La fonction $x\mapsto\frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $]0;+\infty[$. Alors, la fonction $x\mapsto e^{\frac{1}{x}}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme composée de deux fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$. Par conséquent, la fonction $x\mapsto e\cdot e^{\frac{1}{x}}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $g'(x)=-\frac{e}{x^2}\cdot e^{\frac{1}{x}}$.

- $g'(x)<0$ pour tout $x\in]0;+\infty[$.

Alors, g est **strictement décroissante** sur $]0;+\infty[$.

b) *Prouvons :*

$x\in[3,5;3,7]$ équivaut à : $3,5\le x\le 3,7$. Comme la fonction g est décroissante : $g(3,7)\le g(x)\le g(3,5)$.

Or, • $g(3,5)=e\cdot e^{\frac{1}{3,5}}\approx 3,62$;

• $g(3,7)=e\cdot e^{\frac{1}{3,7}}\approx 3,562$.

Donc, $3,5<g(3,7)\le g(x)\le g(3,5)<3,7$ et par conséquent, $g(x)\in[3,5;3,7]$.

c) *Etablissons cela :*

$g(x)=e^{1+\frac{1}{x}}$ pour tout $x\in]0;+\infty[$. Or, la fonction $x\mapsto 1+\frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $]0;+\infty[$ alors la fonction $g: x\mapsto e^{1+\frac{1}{x}}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et d'après ce qui précède, $g'(x)=-\frac{e}{x^2}\cdot e^{\frac{1}{x}}$. En plus la fonction g' est dérivable $\forall x\in]0;+\infty[$ et sa dérivée g'' est telle que :

$$g''(x)=-e\left[-\frac{2}{x^3}\times e^{\frac{1}{x}}-\frac{1}{x^2}\times e^{\frac{1}{x}}\times\frac{e}{x^2}\right]$$

$$g''(x)=\frac{2e}{x^3}\times e^{\frac{1}{x}}+\frac{e}{x^4}\times e^{\frac{1}{x}}$$

$$g''(x)=\frac{2}{x^3}\times e^{1+\frac{1}{x}}+\frac{1}{x^4}\times e^{1+\frac{1}{x}}.$$

On constate que $\forall x\in]0;+\infty[$, $g''(x)>0$. Alors la fonction g' est donc croissante strictement sur $]0;+\infty[$. Pour tout $x\in[3,5;3,7]$ soit, $3,5\le x\le 3,7$ comme la fonction g' est croissante on a : $g'(3,5)\le g'(x)\le g'(3,7)$. Mais, notons aussi que $g'(x)<0$ il vient : $|g'(3,7)|\le|g'(x)|\le|g'(3,5)|$.

D'autre part, $|g'(3,5)|\approx 0,30$ et $0,30\le\frac{1}{3}$.

Par conséquent, pour tout $x\in[3,5;3,7]$ on a :

$|g'(x)|\le|g'(3,5)|\le\frac{1}{3}$.

d) *Déduisons :*

Pour tout $x\in[3,5;3,7]$, comme $\alpha\in[3,5;3,7]$ et que $|g'(x)|\le\frac{1}{3}$, d'après l'inégalité des accroissements finis : $|g(x)-g(\alpha)|\le\frac{1}{3}|x-\alpha|$.

4-a) *Montrons :*

Démontrons par récurrence.

• Pour $k=0$; $u_0=3,5$ et on a, $u_0\in[3,5;3,7]$.

Soit k un entier naturel supérieur à 0. Supposons que $u_k\in[3,5;3,7]$ et montrons que $u_{k+1}\in[3,5;3,7]$.

D'après précédemment, **question 3-b)** pour tout $x\in[3,5;3,7]$, on a : $g(x)\in[3,5;3,7]$. Or, d'après l'hypothèse de récurrence, $u_k\in[3,5;3,7]$ donc, $g(u_k)\in[3,5;3,7]$ et comme $g(u_k)=u_{k+1}$ alors, $u_{k+1}\in[3,5;3,7]$.

Conclusion : pour tout entier naturel $k\ge 0$, tel que $u_k\in[3,5;3,7]$, on a $u_{k+1}\in[3,5;3,7]$.

b) *Justifions :*

D'après la **question 3-d)**, étant donné que $u_n\in[3,5;3,7]$, et que $\alpha\in[3,5;3,7]$ on a :

$|g(u_n)-g(\alpha)|\le\frac{1}{3}|u_n-\alpha|$.

Or, $g(u_n)=u_{n+1}$ et $g(\alpha)=\alpha$ il vient :

$|u_{n+1}-\alpha|\le\frac{1}{3}|u_n-\alpha|$.

c) *Démontrons :*

$u_0=3,5$ et $\alpha\in[3,5;3,7]$ soit : $3,5\le\alpha\le 3,7$

$-3,7\le-\alpha\le-3,5$

$3,5-3,7\le 3,5-\alpha\le 3,5-3,5$ ce qui conduit à :

$-0,2\le u_0-\alpha\le 0$ et finalement à $|u_0-\alpha|\le 0,2$.

Scanné avec CamScanner

$|u_0-\alpha|\leq\frac{1}{5}\times\frac{1}{3^0}$. Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 0. Supposons que $|u_k-\alpha|\leq\frac{1}{5}\times\frac{1}{3^k}$. D'après ce qui précède, $|g(u_k)-g(\alpha)|\leq\frac{1}{3}|u_k-\alpha|$ ce qui signifie que $|u_{k+1}-\alpha|\leq\frac{1}{3}|u_k-\alpha|$

$|u_{k+1}-\alpha|\leq\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{3^k}$.

$|u_{k+1}-\alpha|\leq\frac{1}{5}\times\frac{1}{3^{k+1}}$.

Donc, $|u_n-\alpha|\leq\frac{1}{5}\times\frac{1}{3^n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

d) *Déterminons la limite de la suite (u_n).*

De ce qui précède, $|u_n-\alpha|\leq\frac{1}{5}\times\frac{1}{3^n}$.

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{5}\times\frac{1}{3^n}\right)=0$ alors, $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n-\alpha|=0$ et par conséquent, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=\alpha.}$

e) *Trouvons le plus petit entier naturel p.*

Pour que $|u_p-\alpha|\leq10^{-3}$, il suffit que $\frac{1}{5}\times\frac{1}{3^p}\leq10^{-3}$.

Or, $\frac{1}{5}\times\frac{1}{3^p}\leq10^{-3}\Leftrightarrow\frac{1}{3^p}\leq5\times10^{-3}$

$\frac{1}{5}\times\frac{1}{3^p}\leq10^{-3}\Leftrightarrow\left(\frac{1}{3}\right)^p\leq5\times10^{-3}$

$\frac{1}{5}\times\frac{1}{3^p}\leq10^{-3}\Leftrightarrow p\ln\left(\frac{1}{3}\right)\leq\ln\left(5\times10^{-3}\right)$

$\frac{1}{5}\times\frac{1}{3^p}\leq10^{-3}\Leftrightarrow p\geq\frac{\ln\left(5\times10^{-3}\right)}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}$

$\frac{1}{5}\times\frac{1}{3^p}\leq10^{-3}\Leftrightarrow p\geq5$. On prendra $\boxed{p=5.}$

Scanné avec CamScanner

BACCALAURÉAT
SESSION 2020

Coefficient : 5
Durée : 4 h

MATHÉMATIQUES

SÉRIE C

Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.
Chaque candidat recevra deux (02) feuilles de papier millimétré.
Tout modèle de calculatrice scientifique est autorisé.
Les tables trigonométriques, logarithmiques et les règles à calculs sont également autorisées.

EXERCICE 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. L'unité graphique est 2 cm.
On donne les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c telles que :
$a = 2 - 2i$, $b = 2 + 2i$ et $c = -2 + 2i$.

1. *a*) Place les points A, B et C dans le plan muni du repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.
   b) Démontre que le triangle ABC est rectangle et isocèle.
   c) Écris sous forme exponentielle, chacun des nombres complexes a, b et c.

2. Soit r la rotation de centre O telle que $r(A) = B$ et (Γ) le cercle de centre Ω d'affixe 2 et de rayon 2.
   a) Détermine l'application complexe associée à la rotation r.
   b) Déduis de ce qui précède $r(B)$.
   c) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de l'image (Γ') de (Γ) par r.
   d) Construis (Γ) et (Γ') sur la même figure.

3. Soit α un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0 ; 2\pi[$, tel que : $\alpha \neq \pi$. On note M le point d'affixe z telle que $z = 2 + 2ie^{i\alpha}$ et M' l'image de M par r. On note z' l'affixe de M'.
   a) Démontre que M est un point de (Γ).
   b) Démontre que : $z' = 2i - 2e^{i\alpha}$.
   c) On note u et v les affixes respectives des vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BM'}$.
   Exprime u et v en fonction de α.

4. *a*) Démontre que :
   $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{2ix} + 1 = 2e^{ix}\cos x$ et $e^{2ix} - 1 = 2ie^{ix}\sin x$.
   b) Démontre que : $\dfrac{u}{v} = \tan\dfrac{\alpha}{2}$.
   c) Déduis de ce qui précède que les points M, M' et B sont alignés.

5. On donne : $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$.
   a) Détermine sous forme algébrique l'affixe du point M.
   b) Construis les points M et $r(M)$.

Tournez la page S.V.P.

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 2

Le sujet du concours d'entrée dans une grande école est noté sur 20 points. Il comporte 5 questions à choix multiples. Pour un candidat donné, on attribue quatre (4) points à chaque réponse juste et zéro (0) point à chaque question non traitée ou à réponse fausse.
On admet que lorsqu'un candidat répond au hasard à une question, la probabilité de donner une réponse juste est $\frac{1}{4}$.

1. Soit k le nombre exact de réponses justes données par un candidat à ce concours.
   Exprime en fonction de k la note globale N de ce candidat.

2. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de réponses justes obtenues par un candidat qui a répondu au hasard à chacune des cinq questions.
   a) Détermine les valeurs prises par X.
   b) Démontre que : $P(X = 3) = \frac{45}{512}$.
   c) Justifie que la probabilité pour que le candidat ait une note globale supérieure à 10 est : $\frac{53}{512}$.

3. On suppose qu'à ce concours, n candidats ont répondu au hasard aux cinq questions.
   On admet que lorsqu'un des n candidats répond au hasard à une question, la probabilité de donner une réponse juste est $\frac{1}{4}$.
   a) Justifie que la probabilité P_n qu'au moins un des n candidats ait une note globale supérieure à 10 est : $1 - (\frac{459}{512})^n$.
   b) Détermine la valeur minimale de n pour que : $P_n \geq 0{,}99$.

PROBLÈME

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est 2 cm.
Soient n un entier naturel non nul et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = (1-x)^n e^{\frac{x}{2}}$.
On désigne par (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J).

Le but de ce problème est de calculer la limite de la suite (S_n) définie par :

$$S_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 f_n(x)\,dx.$$

<u>Partie A</u> : Étude de la fonction f_1 et d'une fonction associée.

1. *a*) Calcule : $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f_1(x)}{x}$.
   b) Interprète graphiquement les résultats précédents.

2. *a*) Calcule la limite de f_1 en $-\infty$.
   b) Interprète graphiquement le résultat précédent.

Scanné avec CamScanner

3. On suppose que f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   a) Démontre que f_1 est strictement croissante sur $]-\infty ; -1[$ et strictement décroissante sur $]-1 ; +\infty[$.
   b) Dresse le tableau de variations de f_1.
   c) Trace dans le repère (O, I, J), la courbe (C_1) et sa tangente à l'origine.

Partie B : Etude de la fonction f_n.

1. *a*) Détermine, suivant la parité de n, la limite de f_n en $+\infty$.
   b) Détermine, suivant la parité de n, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_n(x)}{x}$.
   c) Interprète graphiquement les résultats précédents.

2. *a*) Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)$ *(On pourra poser : $X = 1-x$).*
   b) Interprète graphiquement le résultat précédent.

3. On suppose que pour tout entier naturel n non nul, f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   a) Démontre que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n'(x) = \dfrac{1}{2}(-x-2n+1)(1-x)^{n-1} e^{\frac{x}{2}}$.
   b) Étudie, suivant la parité de n, le signe de $f_n'(x)$.
   c) Dresse, suivant la parité de n, le tableau de variation de f_n.

4. *a*) Résous dans $\mathbb{R}$, l'équation : $f_n(x) = f_{n+1}(x)$.
   b) Déduis de ce qui précède que toutes les courbes (C_n) passent par deux points fixes que l'on précisera.
   c) Étudie, suivant la parité de n, les positions relatives des courbes (C_n) et (C_{n+1}).
   d) Trace la courbe (C_2) dans le repère (O, I, J).

Partie C : Calcul de la limite de la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $S_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$.

1. Justifie que la fonction f_n est décroissante sur $[0 ; 1]$.
2. Démontre que : $\forall x \in [0 ; 1]$, $f_n(x) \in [0 ; 1]$.
3. Déduis de ce qui précède que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \le S_n \le \dfrac{1}{n}$.
4. Détermine $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Scanné avec CamScanner

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE
DE L'ENSEIGNEMENT TECHNIQUE
ET DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE

DIRECTION DES EXAMENS ET CONCOURS

SOUS-DIRECTION DES EXAMENS
ET CONCOURS SCOLAIRES

SERVICE BACCALAUREAT

BACCALAUREAT – SESSION 2020

EPREUVE : MATHEMATIQUES DATE : 28/07/2020 HEURE :.....

SERIE(S) : C

CORRIGE ET BAREME

CORRIGE	BAREME
Ce barème est national. Il ne peut être modifié. Certaines réponses ont été rédigées à titre indicatif. Toute autre démarche correcte sera acceptée. Le correcteur devra tenir compte de la démarche qui conduit au résultat. A un résultat correct non justifié, on accordera la moitié des points sauf pour une question notée sur 0,25 qui vaudra zéro. Toute faute ne sera sanctionnée qu'une seule fois. En conséquence, on appréciera les réponses en fonction des résultats obtenus précédemment, par le candidat même si ces résultats intermédiaires sont faux.	

Scanné avec CamScanner

CORRIGE

BAREME

EXERCICE 1 6 points

1. a) Placé des points A, B et C → 0,5

b) Démonstration correcte → 0,25 × 2

c) $a = 2\sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$ $b = 2\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$ $c = 2\sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$ → 0,25 × 3

2.

a) $r : z' = iz$ → 0,25

b) $r(B) = C$ → 0,25

c) (Γ') cercle de centre $\Omega'(2i)$ et de rayon 2 } 0,25 × 2

d) Construction de (Γ) et (Γ') 0,25 × 2

voir annexe

3. a) Démonstration correcte → 0,25

b) Démonstration correcte → 0,25

c) $u = -2i + 2ie^{i\alpha}$; $v = -2 - 2e^{i\alpha}$ 0,25 × 2

4. a) Démonstration correcte → 0,25 × 2

b) Démonstration correcte

$$\frac{u}{v} = \frac{-i\left(2ie^{i\frac{\alpha}{2}}\cdot\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)}{2e^{i\frac{\alpha}{2}}\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$ 0,25

c) $\frac{u}{v} \in \mathbb{R}^*$ → 0,25

5. a) $z_M = 2 - \sqrt{3} + i$ → 0,25

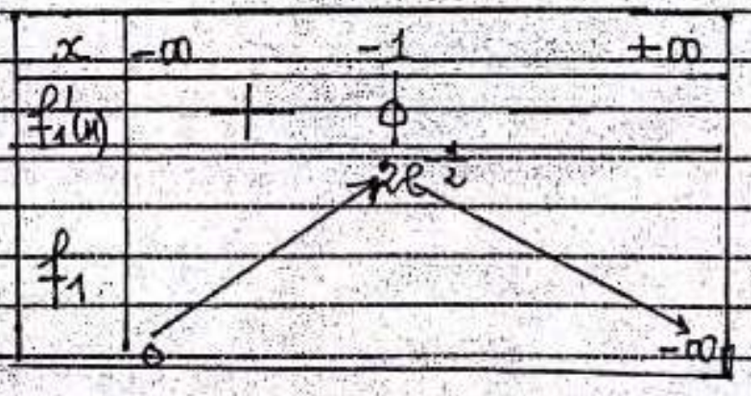
b) Construction de M et $r(M)$ voir annexe 0,25 × 2

Scanné avec CamScanner

CORRIGE	BAREME
EXERCICE 2 4 points	
1. $N = 4k$ — — — — →	0,5
2. a) Valeurs de X	
X prend les valeurs : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5. →	0,75
(0,25 pour deux bonnes réponses)	
b) $p(X=3) = C_5^3 \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{45}{512}$ →	1
c) Justification correcte — — — →	0,5
3. a) Justification correcte — — — →	0,75
b) $P_n \geq 0,99$; $\underline{n = 43}$ — — →	0,5

Scanné avec CamScanner

CORRIGE	BAREME
PROBLEME 10 Points	
Partie A : Etude de la fonction f_1	
1°) a) • $\lim_{x \to +\infty} f_1(x) = -\infty$ ——→	0,25
• $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ ——→	0,25
b) (C_1) admet une branche parabolique de direction (OI).	0,25
2. a) $\lim_{x \to -\infty} f_1(x) = 0$ ——→	0,25
b) l'axe (OI) $(y = 0)$ est asymptote à (C_1)	0,25
3) a) • $x \in \mathbb{R}$, $f_1'(x) = -\frac{1}{2}(x+1)e^{\frac{x}{2}}$	0,25
• Signe et variations	0,25 x 2
b)	

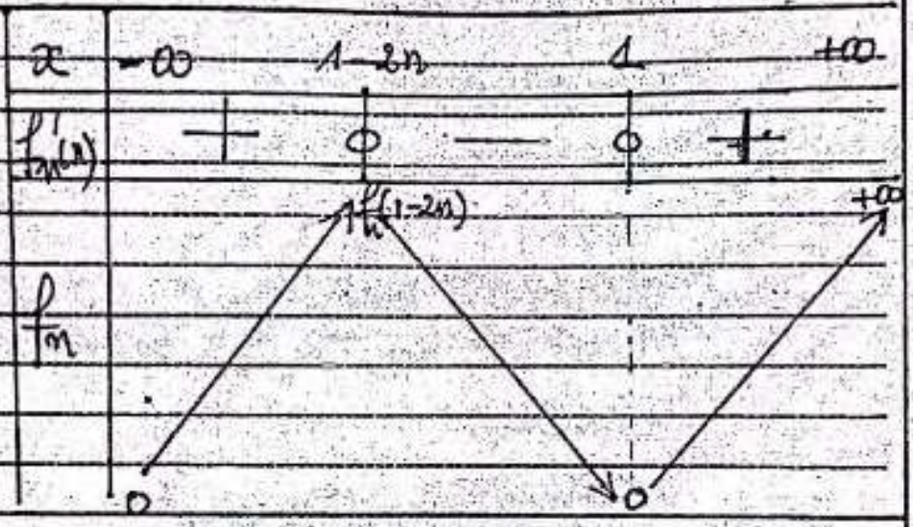
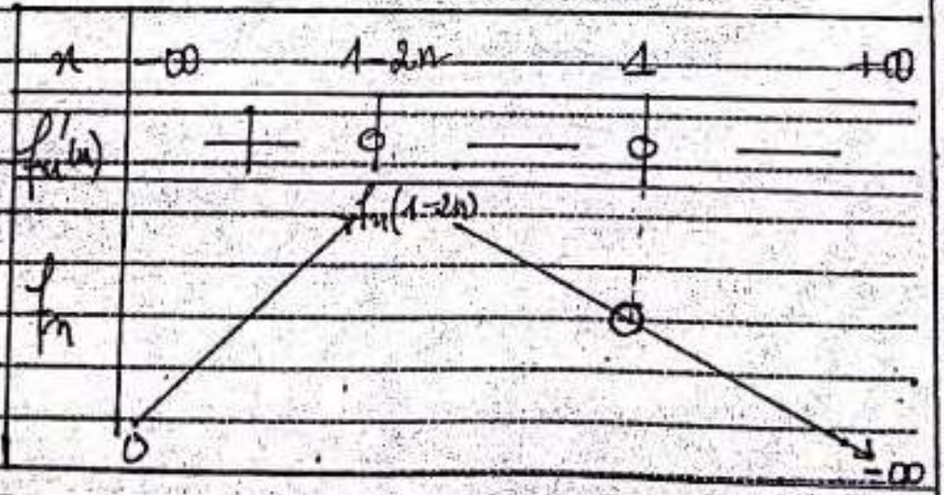


	0,25

Scanné avec CamScanner

CORRIGE	BAREME
c) Tracé de (C_1) — — — —	025
Tracé de la Tangente à l'origine → voir annexe	0,25
Partie B	
1. a) • n pair, $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$ —	0,25
• n impair, $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = -\infty$ —	0,25
b) • n pair, $\lim_{x\to+\infty} \frac{f_n(x)}{x} = +\infty$	0,25
• n impair, $\lim_{x\to+\infty} \frac{f_n(x)}{x} = -\infty$	0,25
c) (C_n) : branche parabolique de direction celle de (OJ)	0,25
2. a) $\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = 0$ — — →	0,5
b) la droite d'equation $y = 0$ est une asymptote à (C_n)	0,25
3 a. Démonstration correcte — — →	0,5
b)	
cas : n pair	
$\forall x \in]-\infty ; -2n+1[\cup]1 ; +\infty[$ $f_n'(x) > 0$	0,25
$\forall x \in]-2n+1 ; 1[$, $f_n'(x) < 0$	0,25

Scanné avec CamScanner

CORRIGE	BAREME
Cas : n impair	
$\forall x \in]-\infty ; -2n+1[$, $f'_n(x) \geq 0$	0,25
. $\forall x \in [-2n+1 ; +\infty[$, $f'_n(x) \leq 0$	0,25
c)	
Cas : n pair	
	0,25
Cas : n impair	
	0,25

Scanné avec CamScanner

DATE : DÉCORE : SESSION :

CORRIGÉ

BARÈME

4. a) $S_{\mathbb{R}} = \{0; 1\}$. 0,25 x 2

b) Les courbes (C_n) passent par les points fixes $I(1;0)$ et $J(0;1)$ 0,25 x 2

c) • Pour $x \in \mathbb{R}$, $f_{n+1}(x) - f_n(x) = -x(1-x)e^{\frac{n}{2}}$ 0,25

• Cas n pair

(C_{n+1}) au-dessus de (C_n) sur $]-\infty; 0[$

(C_{n+1}) au-dessous de (C_n) sur $]0; 1[$ et sur $]1; +\infty[$ } 0,25

• Cas n impair

(C_{n+1}) au-dessus de (C_n) sur $]0; 0[$ et sur $]1; +\infty[$

(C_{n+1}) au-dessous de (C_n) sur $]0; 1[$ } 0,25

d) Tracé de (C_2) - - - — — — 0,25

Voir annexe

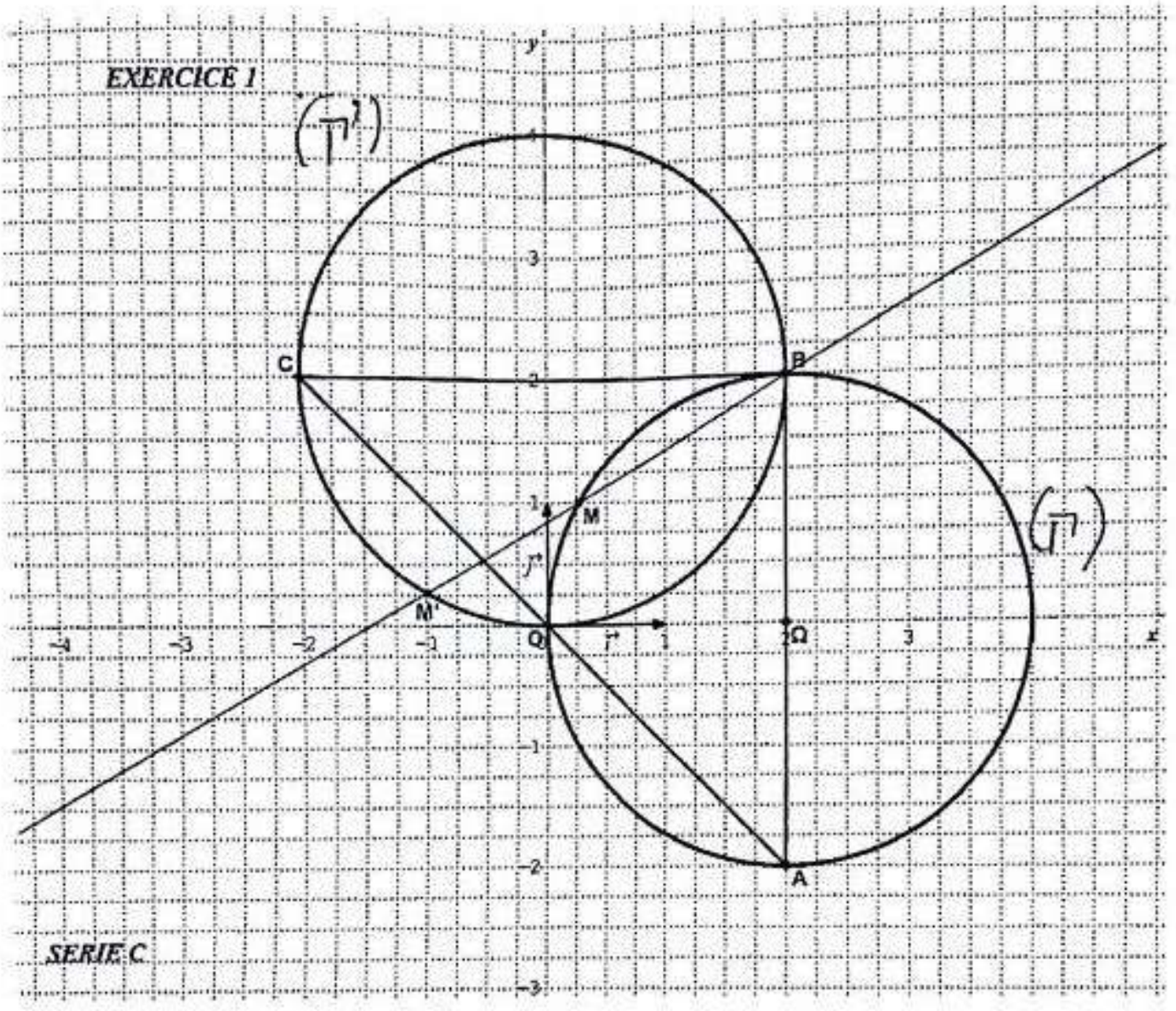
Note : 3/4,0

Scanné avec CamScanner

CORRIGE	BAREME
Partie C	
1 - Justification correcte (on pourra étudier le signe de $f_n'(x)$ sur $[0;1]$)	0,25
2 - Démonstration correcte	0,25
3 - $\forall x \in [0;1]$ $\quad 0 \leq f_n(x) \leq 1$ $0 \leq \frac{1}{n!} \int_0^1 f_n(x)\,dx \leq \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n}$ $0 \leq S_n \leq \frac{1}{n}$	0,5
4 - Théorème des gendarmes $\lim_{n \to +\infty} S_n = 0$	0,25

Scanné avec CamScanner

BACCALAUREAT 2020 – SERIE C

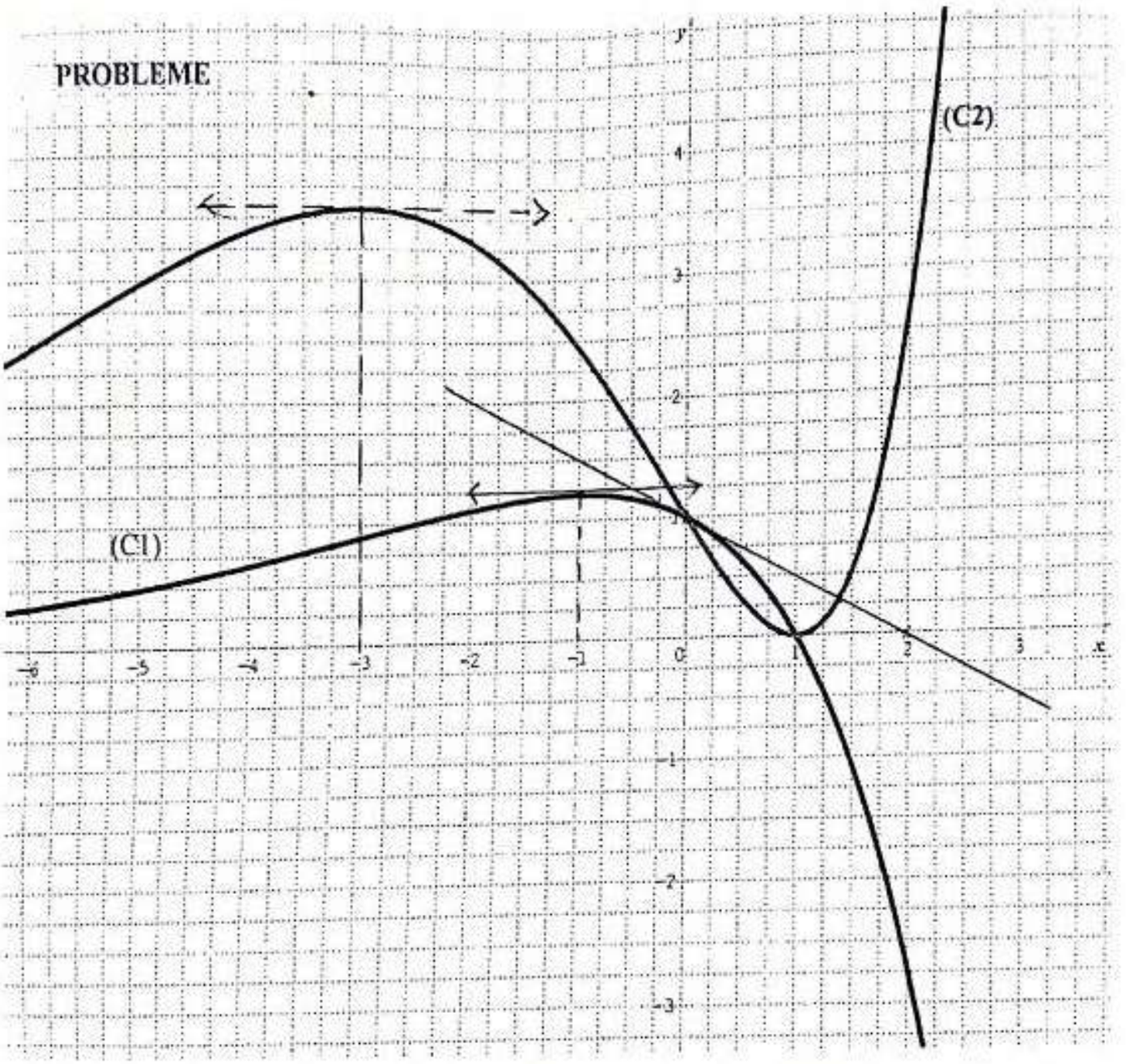


9/10

Scanné avec CamScanner

BACCALAUREAT 2020 – SERIE C

PROBLEME



Le Président de la Commission

MENET-FP
Inspection Générale
Youssouphou KEITA
Inspecteur de l'Enseignement Secondaire

10/10

Scanné avec CamScanner

Pays : Côte d'Ivoire	**Année :** 2016	**Session :** Mathématiques
Série : C	**Durée :** 4 h	**Coefficient :** 5

EXERCICE 1

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{\ln(n+1)+\ln(n+2)+\cdots+\ln(n+n)-n\ln(n)}{n}$$

1- Démontrer que pour tout entier naturel n non nul,
$u_n = \frac{1}{n}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]$.

2- a) Démontrer que pour tout entier naturel k tel que $0 \leq k \leq n-1$,

$$\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) \leq \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \ln(x)\,dx \leq \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{k+1}{n}\right).$$

(On pourra utiliser un encadrement de ln(x) sur l'intervalle $\left[1+\frac{k}{n}, 1+\frac{k+1}{n}\right]$.)

b) En déduire que pour tout entier naturel n non nul : $u_n - \frac{1}{n}\ln 2 \leq \int_1^2 \ln x\,dx \leq u_n$.

3- Sachant que $\int_1^2 \ln x\,dx = 2\ln(2)-1$, déduire de ce qui précède la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. L'unité graphique est 2 cm.

1- On note ($\mathscr{E}$) l'ensemble des points M du plan d'affixe z ($z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$) tels que : $14z\overline{z} + 16i(z-\overline{z}) = z^2 + \overline{z}^2$.
Démontrer que M appartient à ($\mathscr{E}$) si et seulement si : $3x^2 + 4y^2 - 8y = 0$.

2- a) Justifier que ($\mathscr{E}$) est une ellipse. On note Ω son centre.
b) Préciser les coordonnées de Ω.
c) Déterminer une équation de l'axe focal de ($\mathscr{E}$).
d) On note A, A', F et F' les points d'affixes respectives
$\frac{-2\sqrt{3}}{3}+i$, $\frac{2\sqrt{3}}{3}+i$, $-\frac{\sqrt{3}}{3}+i$ et $\frac{\sqrt{3}}{3}+i$.
Justifier que A et A' sont les sommets de ($\mathscr{E}$) situés sur son axe focal.
Justifier que F et F' sont les foyers de ($\mathscr{E}$).

3- Construire l'ellipse ($\mathscr{E}$).

4- On considère l'hyperbole (H) de foyers A et A' et de sommets F et F'.
a) Démontrer qu'une équation cartésienne de (H) dans le repère $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est :
$3x^2 - y^2 = 1$.
b) Tracer les asymptotes de (H).
c) Construire (H).

PROBLÈME

Partie A

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ tel que : $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 2$ cm.
On considère la fonction dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et définie par :

$$f(x) = x - 4 + \frac{1}{4}\ln|x|.$$

1- a) Calculer la limite de f en 0.

b) Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

c) Démontrer que f est strictement croissante sur chacun des intervalles $\left]-\infty ; -\frac{1}{4}\right[$ et $]0 ; +\infty[$, et strictement décroissante sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{4} ; 0\right[$.

d) Dresser le tableau de variations de f.

2- Démontrer que l'équation $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ admet une unique solution α telle que : $3 < \alpha < 4$.

3- Démontrer que :
$\forall x \in]-\infty ; 0[\cup]0 ; \alpha[$, $f(x) < 0$;
$\forall x \in]\alpha ; +\infty[$, $f(x) > 0$.

Partie B

On considère la fonction h dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^*, h(x) = x + 1 - \frac{31}{16}x^2 - \frac{1}{8}x^2 \ln|x| \\ h(0) = 1 \end{cases}$$

1- a) Démontrer que h est dérivable en 0.

b) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $h'(x) = xf(\frac{1}{x})$.

c) Démontrer en utilisant A-3) que :
$\forall x \in]-\infty ; 0[\cup \left]0 ; \frac{1}{\alpha}\right[$, $h'(x) > 0$;
$\forall x \in \left]\frac{1}{\alpha} ; +\infty\right[$, $h'(x) < 0$.

2- On note (Γ) la courbe représentative de la restriction de h à l'intervalle $[-1 ; \frac{3}{2}]$ dans le plan muni du repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

a) Tracer la tangente à (Γ) en son point d'abscisse 0.

b) Construire la courbe (Γ). (On prendra : $\alpha = 3{,}6$).

3- λ est un nombre réel appartenant à l'intervalle]0 ; 1[.

a) En utilisant une intégration par parties, démontrer que :

$\int_{\lambda}^{1} x^2 \ln(x)\, dx = -\frac{1}{9} + \frac{1}{9}\lambda^3 - \frac{1}{3}\lambda^3 \ln \lambda$.

b) On note $\mathscr{A}(\lambda)$ l'aire en centimètre carré de la partie du plan limitée par la courbe (Γ), la droite de repère (O, $\vec{\imath}$) et les droites d'équations x = λ et x = 1.

Déduire de la question précédente que :

$\mathscr{A}(\lambda) = \left(\frac{125}{36} - 4\lambda - 2\lambda^2 + \frac{91}{36}\lambda^3 + \frac{1}{6}\lambda^3 \ln(\lambda)\right)$ cm^2.

c) Calculer la limite de $\mathscr{A}(\lambda)$ quand λ tend vers 0 par valeurs supérieures.

Partie C

On se propose de calculer une valeur approchée de α à 0,01 près.

1- Soit g la fonction dérivable sur l'intervalle]0 ; +∞[et définie par : $g(x) = 4 - \frac{1}{4}\ln(x)$.

a) Étudier les variations de g.

b) Démontrer que l'image de l'intervalle [3 ; 4] par g est contenue dans l'intervalle [3 ; 4].

c) Démontrer que α est l'unique solution de l'équation : x ∈]0 ; +∞[, g(x) = x.

2- On considère la suite (u_n) définie par :

$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$

a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $3 \leq u_n \leq 4$.

b) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $(u_n - \alpha)$ et $(u_{n+1} - \alpha)$ sont de signes contraires.

c) Démontrer que, pour tout x élément de [3 ; 4], on a : $|g'(x)| \leq \frac{1}{12}$.

En déduire que, pour tout entier naturel n,

$|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq \frac{1}{12}|u_{n+1} - u_n|$, puis que $|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{12^n}$.

d) Démontrer que pour tout entier naturel n, $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{12^n}$.

En déduire une valeur approchée de α à 0,01 près.

S: aire de la partie du plan, en u.a, délimitée par $(\mathcal{C})$, l'axe (OI) et les droites d'équation : $x=0$ et $x=1$.

b- On admet que : $\lim\limits_{t\to 0}\int_t^1 f(x)dx = S$.

Déterminons un encadrement de S.

on trouve : $\frac{41}{450} \le S \le \frac{1}{9}$ ou $0{,}09 \le S \le 0{,}11$.

Corrigé type du sujet n° 2 : BAC C 2016

Exercice 1 :

On considère la suite (u_n) définie par :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{\ln(n+1)+\ln(n+2)+\cdots+\ln(n+n)-n\ln(n)}{n}$$

1°) Démontrons que pour tout entier naturel n non nul,

$$u_n = \frac{1}{n}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]$$

$$u_n = \frac{1}{n}\left[\ln n\left(1+\frac{1}{n}\right)+\cdots+\ln n\left(1+\frac{n}{n}\right)-n\ln(n)\right]$$

$$= \frac{1}{n}\left[n\ln n+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)-n\ln(n)\right]$$

Donc pout tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{1}{n}\left[\ln n\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]$$

2°) a- Démontrons que pour tout entier naturel k tel que : $0 \le k \le n-1$,

$$\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) \le \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \ln(x)dx \le \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{k+1}{n}\right).$$

On a : $0 \le k \le n-1$

On a : $\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) \le \ln(x) \le \ln\left(1+\frac{k+1}{n}\right)$ d'où :

$$\int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)dx \le \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \ln(x)dx \le \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \ln\left(1+\frac{k+1}{n}\right)dx$$

On a :

$$\left[x\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right]_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \le \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \ln(x)dx \le \left[x\ln\left(1+\frac{k+1}{n}\right)\right]_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}}$$

donc :

$$\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) \le \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \ln(x)dx \le \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{k+1}{n}\right).$$

b- Déduisons-en que pour tout entier naturel n non nul :

$$u_n - \frac{1}{n}\ln(2) \le \int_1^2 \ln(x)dx \le u_n.$$

on a :

$$\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) \le \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \ln(x)dx \le \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{k+1}{n}\right)$$

en faisant varier k de 0 à $(n-1)$ et à l'aide de la relation de Chasles on obtient en additionnant membre à membre, $\forall x \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{n}\ln(1)+\cdots+\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{n-1}{n}\right) \le \int_{1+\frac{k-1}{n}}^{1+\frac{k}{n}} \ln(x)dx \le \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)$$

et donc $u_n - \frac{1}{n}\ln(2) \le \int_1^2 \ln(x)dx \le u_n$,

$n \in \mathbb{N}^*$.

3°) Sachant que $\int_1^2 \ln(x) - 2\ln(2) - 1$,

Déduisons de ce qui précède la limite de la suite (u_n).

On a :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $2\ln(2)-1 \le u_n \le 2\ln(2)-1+\frac{1}{n}\ln(2)$ de plus $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln(2)=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2\ln(2)-1$.

Exercice 2 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$. L'unité graphique est 2 cm.

1°) Démontrons que M appartient à $(\mathcal{C})$ si et seulement si : $3x^2+4y^2-8y=0$.

$14z\bar{z}+16i(z-\bar{z}) = z^2+\bar{z}^2$

Scanné avec CamScanner

$\Leftrightarrow 1(x^2+y^2)+16i(2iy)=2(x^2-y^2)$

$\Leftrightarrow 3x^2+4y^2-8y=0$

2°) a- Justifions que $(\mathcal{T})$ est une ellipse.

On a : $3x^2+4y^2-8y=0\Leftrightarrow$

$\frac{x^2}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2}+\frac{(y-1)^2}{(1)^2}=1$ ou bien par

changement de variables , $\begin{cases}X=x\\Y=y-1\end{cases}$ on a :

$\frac{X^2}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2}+\frac{Y^2}{(1)^2}=1.$

$\begin{cases}a=\frac{2}{\sqrt{3}}\\b=1\end{cases}$ dans le repère $\left(O;\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$.

b- Précisons les coordonnées de Ω.

On a : $\Omega(0;1)$ dans $\left(O;\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$

c- Déterminons une équation de l'axe focal de $(\mathcal{T})$.

on a : $a>b$ donc l'axe focal de $(\mathcal{T})$ est la droite d'équation $y=1$ dans $\left(O;\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$.

d- On note A, A', F et F' les points d'affixes respectives $\frac{-2\sqrt{3}}{3}+i$, $\frac{2\sqrt{3}}{3}+i$, $-\frac{\sqrt{3}}{3}+i$ et $\frac{\sqrt{3}}{3}+i$.

Justifions que A et A' sont les sommets de $(\mathcal{T})$ situés sur axe focal et justifions que F et F' sont les foyers de $(\mathcal{T})$.

On a : $a=\frac{2}{\sqrt{3}}$, $b=1$ donc $c=\frac{\sqrt{3}}{3}$; la droite $y=1$ étant axe focal de $(\mathcal{T})$, on a :

- les points d'affixes $-\frac{2\sqrt{3}}{3}+i$ et $\frac{2\sqrt{3}}{3}+i$ sont les sommets situés sur l'axe focal.
- les foyers de $(\mathcal{T})$ sont les points d'affixes $-\frac{\sqrt{3}}{3}+i$ et $\frac{\sqrt{3}}{3}+i$

3°) Construisons l'ellipse $(\mathcal{T})$.

(voir question 4°) c- de l'exercice)

4°) a-Démontrons qu'une équation cartésienne de $(\mathcal{H})$ dans le repère $\left(\Omega;\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$ est : $3x^2-y^2=1$.

$(\mathcal{H})$ est de la forme : $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ avec

$a=\frac{1}{2}FF'=\frac{\sqrt{3}}{3}$; $c=\frac{1}{2}AA'=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ et

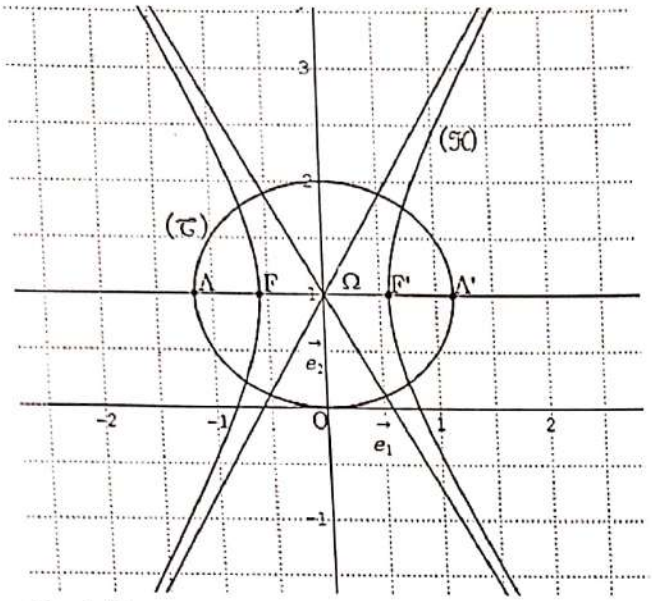
$b=\sqrt{c^2-a^2}=1$ donc $(\mathcal{H}):3x^2-y^2=1$.

b- Traçons les asymptotes de $(\mathcal{H})$.

Dans le repère $\left(O;\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$, les asymptotes sont : $y=\sqrt{3}x+1$ et $y=-\sqrt{3}x+1$.

c- Construis $(\mathcal{H})$.

Scanné avec CamScanner



Problème :

Partie A :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$; $\left\|\vec{i}\right\|=\left\|\vec{j}\right\|=2cm$.

On considère la fonction dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et définie par : $f(x)=x-4+\frac{1}{4}\ln|x|$.

1°) a- Calculons la limite de f en 0.

On trouve : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$

b- Calculons les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

On trouve : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$.

Pour $x<0$, $f(x)=x\left[1-\frac{1}{4}\frac{\ln(-x)}{(-x)}\right]-4$ et on trouve : $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=-\infty$

c- Démontrons que f est strictement croissante sur chacun des intervalles $\left]-\infty;-\frac{1}{4}\right[$ et $]0;+\infty[$ et strictement décroissante sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{4};0\right[$.

f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$ et $\forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=\frac{4x+1}{4x}$.

On trouve que :

$$\begin{cases}\forall x\in\left]-\infty;-\frac{1}{4}\right[\cup\,]0;+\infty[\,,\ f'(x)>0\\ \forall x\in\,]0;+\infty[\,,\ f'(x)<0\\ f'\left(-\frac{1}{4}\right)=0\end{cases}$$

D'où f est strictement croissante sur chacun des intervalles $\left]-\infty;-\frac{1}{4}\right[$ et $]0;+\infty[$; et strictement décroissante sur $\left]-\frac{1}{4};0\right[$.

d- Dressons le tableau de variation de f

x	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	− ‖	+
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$f\left(-\frac{1}{4}\right)$	↘ $-\infty$ ‖ $-\infty$ ↗	$+\infty$

$$f\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{-17-\ln(4)}{4}\simeq -5{,}63$$

2°) Démontrons que l'équation $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=0$ admet une unique solution α telle que : $3<\alpha<4$.

- sur $]-\infty;0[$, l'équation $f(x)=0$ n'admet pas de solution.
- sur $]0;+\infty[$, f est continue et strictement croissante ; de plus

Scanné avec CamScanner

$\begin{cases} f(3) \approx -0{,}72 \\ f(4) \approx 0{,}35 \end{cases}$ donc l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α et $3<\alpha<4$.

3°) Démontrons que :

$\forall x \in]-\infty ; 0[\cup]0 ; \alpha[,\ f(x)<0$,

$\forall x \in]\alpha ; +\infty[,\ f(x)>0$.

D'après le tableau de variations f et de la question 2°) on conclure que :

$\forall x \in]-\infty ; 0[\cup]0 ; \alpha[,\ f(x)<0$;

$\forall x \in]\alpha ; +\infty[$, $f(x)>0$ et $f(\alpha)=0$.

Partie B :

On considère la fonction h dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^*,\ h(x) = x+1-\dfrac{31}{16}x^2-\dfrac{1}{8}x^2\ln|x| \\ h(0)=1 \end{cases}$$

1°) a- Démontrons que h est dérivable en 0.

$h(0)=1$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{h(x)-h(x)}{x-0}=1$ donc h est dérivable en 1 et $h'(0)=1$

b- Démontrons que : $\forall x \in \mathbb{R}^*$,

$h'(x)=xf\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

h est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$, et $\forall x \in \mathbb{R}^*$,

$$h'(x)=1-\frac{31}{8}x-\frac{1}{8}\left(2x\ln|x|+\frac{1}{x}\times x^2\right)$$

$$h'(x)=1-\frac{31}{8}x-\frac{1}{8}x-\frac{1}{4}x\ln|x|$$

$$h'(x)=1-4x-\frac{1}{4}x\ln|x|$$

$$h'(x)=x\left(\frac{1}{x}-4+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1}{x}\right|\right) \text{ d'où}$$

$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ h'(x)=xf\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

c- Démontrons en utilisant la partie A-3°) que : $\forall x \in]-\infty ; 0[\cup \left]0 ; \dfrac{1}{\alpha}\right[$, $h'(x)>0$

$$\forall x \in \left]\frac{1}{\alpha} ; +\infty\right[,\ h'(x)<0.$$

- Soit $x \in]-\infty ; 0[$

$x \in]-\infty ; 0[$, $x<0$ donc $\forall x \in]-\infty ; 0[$, $\dfrac{1}{x}<0$. Ainsi d'après A/ 3°) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)<0$ or $x<0$ donc $\forall x \in]-\infty ; 0[$, $xf\left(\dfrac{1}{x}\right)>0$ c'est-à-dire $\forall x \in]-\infty ; 0[$, $h'(x)>0$.

- Soit $x \in \left]0 ; \dfrac{1}{\alpha}\right[$

$x \in \left]0 ; \dfrac{1}{\alpha}\right[\Leftrightarrow 0<x<\dfrac{1}{\alpha}$

Donc $\forall x \in \left]0 ; \dfrac{1}{\alpha}\right[$, $\dfrac{1}{x}>\alpha$

$\Leftrightarrow \forall x \in \left]0 ; \dfrac{1}{\alpha}\right[$, $\dfrac{1}{x} \in]\alpha ; +\infty[$ alors d'après A/ 3°), $f\left(\dfrac{1}{x}\right)>0$ or $x>0$ donc $\forall x \in \left]0 ; \dfrac{1}{\alpha}\right[$, $xf\left(\dfrac{1}{x}\right)>0$ c'est-à-dire $\forall x \in \left]0 ; \dfrac{1}{\alpha}\right[$, $h'(x)>0$.

Conclusion partielle :

$\forall x \in]-\infty ; 0[\cup \left]0 ; \dfrac{1}{\alpha}\right[$, $h'(x)>0$

- Soit $x \in \left]\dfrac{1}{\alpha} ; +\infty\right[$

$x \in \left]\dfrac{1}{\alpha} ; +\infty\right[\Leftrightarrow x>\dfrac{1}{\alpha}$

$\Leftrightarrow x<\alpha$

De plus $x>0$ donc $\dfrac{1}{x}>0$.

Scanné avec CamScanner

Ainsi on a :

$\forall x \in \left]\frac{1}{\alpha}; +\infty\right[, \ 0 < \frac{1}{x} < \alpha$

$\Leftrightarrow \ \forall x \in \left]\frac{1}{\alpha}; +\infty\right[, \ \frac{1}{x} \in]0; \alpha[$ donc d'après A/3°), $f\left(\frac{1}{x}\right) < 0$ or $x > 0$ donc $\forall x \in \left]\frac{1}{\alpha}; +\infty\right[, \ xf\left(\frac{1}{x}\right) < 0$ c'est-à-dire $\forall x \in \left]\frac{1}{\alpha}; +\infty\right[, \ h'(x) < 0$

Conclusion :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; 0[\cup \left]0; \frac{1}{\alpha}\right[, \ h'(x) > 0 \\ \forall x \in \left]\frac{1}{\alpha}; +\infty\right[, \ h'(x) < 0 \end{cases}$$

2°) On note (Γ) la courbe représentative de la restriction de h à l'intervalle $\left[-1; \frac{3}{2}\right]$ dans le plan muni du repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

a- Traçons la tangente à (Γ) en son point d'abscisse 0.

Soit (T) cette tangente.

$(T): y = h'(0)(x-0) + h(0)$

$h'(0) = 1$ et $h(0) = 1$ d'où $(T): y = x + 1$

Construction : voir figure.

b- Construisons la courbe (Γ).

Achevons l'étude des variations de h.

Limites aux bornes :

$\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x + 1 - \frac{31}{16}x^2 - \frac{1}{8}x^2\ln|x|\right)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \ln|x| = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} -\frac{1}{8}x^2 = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} -\frac{1}{8}x^2\ln|x| = -\infty$.

De plus $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x + 1 - \frac{31}{16}x^2\right) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x + 1 - \frac{31}{16}x^2 - \frac{1}{8}x^2\ln|x|\right)$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x + 1 - \frac{31}{16}x^2 - \frac{1}{8}x^2\ln x\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x + 1 - \frac{31}{16}x^2\right) = -\infty$ et

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{8}x^2\ln x\right) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$

Tableau de variation :

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{\alpha}$		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$h(x)$	$-\infty$	↗		↗	$h\left(\frac{1}{\alpha}\right)$	↘	$-\infty$

Étude des branches infinies :

› $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$ donc il y a possibilité de branche parabolique.

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x + 1 - \frac{31}{16}x^2 - \frac{1}{8}x^2\ln|x|}{x}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty}\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{31}{16}x - \frac{1}{8}x\ln|x|\right)$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1 - \frac{31}{16}x\right) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$;

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{8}x\ln|x|\right) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{h(x)}{x} = +\infty$

donc (Γ) admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$.

› $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$ donc il y a possibilité de branche parabolique.

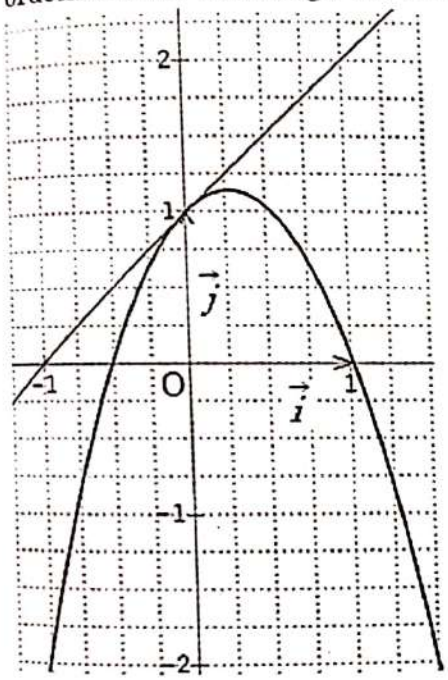
Scanné avec CamScanner

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}-\frac{31}{16}x-\frac{1}{8}x\ln x\right)$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{31}{16}\right)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{8}x\ln x\right)=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x}=-\infty$

par suite la courbe (Γ) admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.



3°) $\lambda\in]0;1[$.

a- <u>En utilisant une intégration par parties, démontrons que</u> :

$$\int_\lambda^1 x^2\ln(x)dx=-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\lambda^3-\frac{1}{3}\lambda^3\ln\lambda\,.$$

Posons :

$u'(x)=x^2$, on prend $u(x)=\frac{1}{3}x^3$

$v(x)=\ln x$, on a : $v'(x)=\frac{1}{x}$

$$\int_\lambda^1 x^2\ln x\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3\ln x\right]_\lambda^1-\int_\lambda^1\frac{1}{3}x^2\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3\right]_\lambda^1$$

$$\int_\lambda^1 x^2\ln x\,dx=-\frac{1}{9}-\left(\frac{1}{3}\lambda^3\ln\lambda-\frac{1}{9}\lambda^3\right)$$

Donc $\int_\lambda^1 x^2\ln x\,dx=-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\lambda^3-\frac{1}{3}\lambda^3\ln\lambda$

b- <u>Déduisons-en de la question précédente que</u> :

$$\mathcal{A}(\lambda)=\left(\frac{125}{36}-4\lambda-2\lambda^2+\frac{91}{36}\lambda^3+\frac{1}{6}\lambda^3\ln(\lambda)\right)\text{cm}^2.$$

On a : $\mathcal{A}(\lambda)=\left(\int_\lambda^1 h(x)dx\right)$ u.a

u.a = 2 cm × 2 cm = 4 cm².

$$\int_\lambda^1 h(x)dx=\int_\lambda^1\left(x+1-\frac{31}{16}x^2-\frac{1}{8}x^2\ln|x|\right)dx$$

$$=\int_\lambda^1\left(x+1-\frac{31}{16}x^2-\frac{1}{8}x^2\ln x\right)dx$$

$$=\int_\lambda^1\left(x+1-\frac{31}{16}x^2\right)dx-\frac{1}{8}\int_\lambda^1(x^2\ln x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^2+x-\frac{31}{16}x^3\right]_\lambda^1-\frac{1}{8}\left(-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\lambda^3-\frac{1}{3}\lambda^3\ln\lambda\right)$$

$$=\frac{1}{2}+1-\frac{31}{48}-\left(\frac{1}{2}\lambda^2+\lambda-\frac{31}{16}\lambda^3\right)+\frac{1}{72}-\frac{1}{72}\lambda^3+\frac{1}{24}\lambda^3\ln\lambda$$

$$\int_\lambda^1 h(x)dx=\frac{125}{144}-\lambda-\frac{1}{2}\lambda^2+\frac{91}{144}\lambda^3+\frac{1}{24}\lambda^3\ln\lambda$$

D'où :

$$\mathcal{A}(\lambda)=\left(\frac{125}{36}-4\lambda-2\lambda^2+\frac{91}{36}\lambda^3+\frac{1}{6}\lambda^3\ln\lambda\right)cm^2$$

c- Calculons la limite de $\mathcal{A}(\lambda)$ quand λ tend vers 0 par valeurs supérieurs.

$$\lim_{\substack{\lambda\to0\\ \lambda>0}}\mathcal{A}(\lambda)=\lim_{\substack{\lambda\to0\\ \lambda>0}}\left(\frac{125}{36}-4\lambda-2\lambda^2+\frac{91}{36}\lambda^3+\frac{1}{6}\lambda^3\ln\lambda\right)$$

$\lim\limits_{\substack{\lambda\to0\\ \lambda>0}}\lambda^3\ln\lambda=0$ et $\lim\limits_{\substack{\lambda\to0\\ \lambda>0}}\left(-4\lambda-2\lambda^2+\frac{91}{36}\lambda^3\right)=0$

d'où $\boxed{\lim\limits_{\substack{\lambda\to0\\ \lambda>0}}\mathcal{A}(\lambda)=\frac{125}{36}}$

<u>Partie C</u> :

On se propose de calculer une valeur approchée de α à 0,01 près.

Scanné avec CamScanner

1°) Soit g la fonction dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et définie par :

$g(x)=4-\frac{1}{4}\ln(x)$.

a- Étudions les variations de g.

Ensemble de définition

$D_g=]0;+\infty[$

Continuité et dérivabilité

La fonction $x\mapsto \ln x$ est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$ donc g est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$.

Dérivée et sens de variation

$\forall x\in]0;+\infty[\ ,\ g'(x)=-\frac{1}{4x}$

$\forall x\in]0;+\infty[\ ,\ 4x>0$. De plus $-1<0$ donc $\forall x\in]0;+\infty[\ ,\ g'(x)<0$. On en déduit que la fonction g est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

Limites aux bornes de D_g.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(4-\frac{1}{4}\ln x\right)$$

$$=+\infty \text{ car } \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\ln x=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(4-\frac{1}{4}\ln x\right)$$

$$=-\infty \text{ car } \lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty.$$

Tableau de variation :

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	
$g(x)$	‖	$+\infty$ ↘	$-\infty$

b- Démontrons que l'image de l'intervalle $[3;4]$ par g est contenue dans l'intervalle $[3;4]$.

$x\in[3;4]\Leftrightarrow 3\le x\le 4$

$\Leftrightarrow g(4)\le g(x)\le g(3)$ car g est strictement décroissante $]0;+\infty[$.

$g(4)=4-\frac{1}{4}\ln 4\ ;\ g(4)\simeq 3{,}64$

$g(3)=4-\frac{1}{4}\ln 3\ ;\ g(3)\simeq 3{,}72$

Donc $\forall x\in[3;4]\ ,\ g(x)\in[3;4]$

c- Démontrons que α est l'unique solution de l'équation : $x\in]0;+\infty[$, $g(x)=x$.

$$\begin{cases}x\in]0;+\infty[\\ g(x)=x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in]0;+\infty[\\ 4-\frac{1}{4}\ln x=x\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\in]0;+\infty[\\ x-4+\frac{1}{4}\ln x=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\in]0;+\infty[\\ f(x)=0\end{cases}$$

α étant l'unique solution de l'équation $f(x)=0$ alors α est l'unique solution de l'équation de l'équation $g(x)=x$, $x\in]0;+\infty[$.

2°) On considère la suite la suite (U_n) définie par : $\begin{cases}U_0=3\\ \forall n\in\mathbb{N}\ ,U_{n+1}=g(U_n)\end{cases}$

a- Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $3\le U_n\le 4$.

Pour $n=0$, $U_0=3$

Scanné avec CamScanner

$U_1 = g(U_0) = g(3) = 4 - \frac{1}{4}\ln 3$

On a : $3 \le U_0 \le 4 - \frac{1}{4}\ln 3 < 4$ donc $3 \le U_0 \le 4$

ainsi la proposition est vraie à l'ordre 0.

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \ge 0$.

Supposons que la proposition est vraie à l'ordre k et prouvons qu'elle vraie à l'ordre $k+1$.

On a : $3 \le U_k \le 4$ par hypothèse de récurrence donc $g(4) \le g(U_k) \le g(3)$ car g strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$

$\Leftrightarrow g(U_k) \in [g(4) ; g(3)]$

$\Leftrightarrow g(U_k) \in g([3 ; 4])$ car

$g([3 ; 4]) = [g(4) ; g(3)]$ or d'après la question C/1°)b· $g([3 ; 4]) \in [3 ; 4]$ donc $g(U_k) \in [3 ; 4]$

$\Leftrightarrow 3 \le g(U_k) \le 4$

$\Leftrightarrow 3 \le U_{k+1} \le 4$ car $g(U_k) = U_{k+1}$ donc la proposition est vraie à l'ordre $k+1$; par conséquent $\forall n \in \mathbb{N},\ 3 \le U_n \le 4$.

b· Démontrons que, pour tout entier naturel n, $(U_n - \alpha)$ et $(U_{n+1} - \alpha)$ sont de signes contraires.

$U_{n+1} - \alpha = g(U_n) - \alpha$

$= g(U_n) - g(\alpha)$

La fonction g étant strictement décroissante alors $\frac{g(U_n) - g(\alpha)}{U_n - \alpha} < 0$ donc $\frac{U_{n+1} - \alpha}{U_n - \alpha} < 0$ d'où $(U_n - \alpha)$ et $(U_{n+1} - \alpha)$ sont de signes contraires.

c· Démontrons que , pour tout x élément de $[3 ; 4]$, on a : $|g'(x)| \le \frac{1}{12}$.

$\forall x \in]0 ; +\infty[$, $g'(x) = -\frac{1}{4x}$

$\forall x \in [3 ; 4]$, $3 \le x \le 4$

$\Leftrightarrow \forall x \in [3 ; 4]$, $12 \le 4x \le 16$

$\Leftrightarrow \forall x \in [3 ; 4]$, $\frac{1}{16} \le \frac{1}{4x} \le \frac{1}{12}$

$\Leftrightarrow \forall x \in [3 ; 4]$, $-\frac{1}{12} \le -\frac{1}{4x} \le -\frac{1}{16}$

$\Leftrightarrow \forall x \in [3 ; 4]$, $-\frac{1}{12} \le g'(x) \le -\frac{1}{16}$

D'où $\forall x \in [3 ; 4]$, $|g'(x)| \le \frac{1}{12}$.

Déduisons-en que, pour tout entier naturel n :

• $|U_{n+2} - U_{n+1}| \le \frac{1}{12}|U_{n+1} - U_n|$

On a : $\forall x \in [3 ; 4]$, $|g'(x)| \le \frac{1}{12}$ or U_{n+1} et U_n sont éléments de $[3 ; 4]$ donc d'après le théorème des inégalités des accroissements finis $|g(U_{n+1}) - g(U_n)| \le \frac{1}{12}|U_{n+1} - U_n|$ d'où

$\forall n \in \mathbb{N},\ |U_{n+2} - U_{n+1}| \le \frac{1}{12}|U_{n+1} - U_n|$.

• $|U_{n+1} - U_n| \le \frac{1}{12^n}$ pour tout entier naturel n.

On a : $\forall x \in [3 ; 4]$, $|g'(x)| \le \frac{1}{12}$ donc en appliquant le théorème des accroissements finis, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$|g(U_n) - g(U_{n-1})| \le \frac{1}{12}|U_n - U_{n-1}|$ donc

$\forall n \in \mathbb{N},\ |U_{n+1} - U_n| \le \frac{1}{12}|U_n - U_{n-1}|$ ainsi donc pour tout entier naturel n, on a successivement :

$|U_{n+1} - U_n| \le \frac{1}{12}|U_n - U_{n-1}|$

$|U_n - U_{n-1}| \le \frac{1}{12}|U_{n-1} - U_{n-2}|$

⋮

Scanné avec CamScanner

$|U_2 - U_1| \leq \frac{1}{12}|U_1 - U_0|$

En faisant le produit membre à membre on a : $\forall n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - U_n| \leq \left(\frac{1}{12}\right)^n |U_1 - U_0|$

On a : $3 \leq U_1 \leq 4$

$\Leftrightarrow 3+(-3) \leq U_1 + (-3) \leq 4+(-3)$

$\Leftrightarrow 0 \leq U_1 - U_0 \leq 1$ car $U_0 = 3$ donc

$|U_1 - U_0| \leq 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{12}\right)^n |U_1 - U_0| \leq \left(\frac{1}{12}\right)^n$ donc

$\forall n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - U_n| \leq \frac{1}{12^n}$.

d- Démontrons que pour tout entier naturel n, $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{12^n}$.

D'après la question C/ 2°) c- on a : $\forall x \in [3;4]$, $|g'(x)| \leq \frac{1}{12}$.

De plus $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \in [3;4]$ donc appliquant le théorème des accroissements finis pour $a = U_n$ et $b = \alpha$.

On a : $\forall n \in \mathbb{N}, |g(U_n) - g(\alpha)| \leq \frac{1}{12}|U_n - \alpha|$

$\Leftrightarrow |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{12}|U_n - \alpha|$ car $g(U_n) = U_{n+1}$ et $g(\alpha) = \alpha$ on a donc successivement :

$|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{12}|U_{n-1} - \alpha|$

$|U_{n-1} - \alpha| \leq \frac{1}{12}|U_{n-2} - \alpha|$

$\vdots$

$|U_1 - \alpha| \leq \frac{1}{12}|U_0 - \alpha|$

En faisant le produit membre à membre.

$\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{12}\right)^n |U_0 - \alpha|$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \frac{1}{12^n}|U_0 - \alpha|$

On a : $3 < \alpha < 4 \Leftrightarrow -4 < -\alpha < -3$

$\Leftrightarrow 3-4 < 3-\alpha < 3-3$

$\Leftrightarrow -1 < U_0 - \alpha < 0$

$\Leftrightarrow -1 < U_0 - \alpha < 1$ car $0 < 1$

$3 < \alpha < 4 \Leftrightarrow |U_0 - \alpha| < 1$ donc :

$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{12^n}|U_0 - \alpha| \leq \frac{1}{12^n}$

or $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \frac{1}{12^n}|U_0 - \alpha|$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \frac{1}{12^n}$

Déduisons-en une valeur approchée de α à 0,01 près.

On veut $|U_n - \alpha| \leq 10^{-2}$; il suffit que $\frac{1}{12^n} \leq 10^{-2}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, -\ln(12^n) \leq -2\ln 10$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, n\ln 12 \geq 2\ln 10$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, n \geq \frac{2\ln 10}{\ln 12}$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1{,}85$ donc $n = 2$.

Ainsi une valeur approchée de α à 0,01 près est U_2.

$U_2 = g(U_1)$ et $U_1 = g(U_0)$

$U_1 \simeq 3{,}73$ et $U_2 \simeq 3{,}67$.

D'où une valeur approchée de α est 3,67

Scanné avec CamScanner

BACCALAURÉAT **Coefficient : 5**
SESSION 2015 **Durée : 4 h**

MATHÉMATIQUES

SÉRIE C

Cette épreuve comporte quatre (04) pages numérotées 1/4, 2/4, 3/4 et 4/4.
Chaque candidat recevra deux (02) feuilles de papier millimétré.
Tout modèle de calculatrice scientifique est autorisé.
Les tables trigonométriques et logarithmiques et les règles à calculs sont aussi autorisées.

EXERCICE 1

Dans un quartier d'affaires d'une ville, la Mairie a créé des parkings payants pour les véhicules. Le prix du stationnement dans ces parkings est de 2 000 F par jour. Par ailleurs le stationnement en tout autre endroit est interdit et l'amende à payer liée à cette infraction est égale à 5 000 F.
On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

Partie I

Pour encourager les automobilistes à utiliser ses parkings, la Mairie organise, dans le cadre d'une promotion, une loterie. Cette loterie est constituée de dix tickets identiques disposés dans une urne dont deux sont gagnants.
Chaque automobiliste qui désire se garer dans un des parkings, effectue le tirage d'un ticket, note le résultat, le remet dans l'urne puis effectue le deuxième tirage.

- Si les deux tickets tirés sont gagnants alors le client stationne gratuitement.
- Si un seul des deux tickets tirés est gagnant alors le client stationne à 1 000 F.
- Si aucun des deux tickets tirés n'est gagnant alors le client stationne à 2 000 F.

Un automobiliste se présente et effectue les deux tirages.

1. Calculer la probabilité de stationner gratuitement.

2. Justifier que la probabilité de payer la moitié du prix du stationnement est égale à $\frac{8}{25}$.

3. Calculer la probabilité de payer au moins 1 000 F pour le stationnement.

Partie II

La probabilité pour un automobiliste d'être interpellé par la Police Municipale pour stationnement interdit et d'avoir alors à payer l'amende est égale à $\frac{4}{5}$.

Un automobiliste se gare n fois en stationnement interdit. Les risques d'amende sont indépendants d'un stationnement interdit à l'autre.

1. *a*) Calculer la probabilité q_n de payer l'amende au plus une fois.

   b) Démontrer que la probabilité P_n qu'il paye au moins une fois l'amende est $P_n = 1 - \frac{1}{5^n}$.

   c) Déterminer le plus petit entier naturel n pour que $P_n \geq 0{,}99$.

2. Monsieur Riko, exerçant dans ce quartier, paye en moyenne 4800 F pour trois jours de stationnement par semaine dans les parkings payants. Il estime que les stationnements payants lui reviennent trop chers et prend le risque de se garer en stationnement interdit trois fois dans la semaine. Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur le montant total des amendes qu'il peut payer dans la semaine.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Monsieur Riko a-t-il intérêt à se garer en stationnement interdit ?
Justifier la réponse.

EXERCICE 2

Partie I

Le plan est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$. L'unité graphique est 2 cm.
On note A, B et C les points d'affixes respectives $2i$; $\sqrt{3}+i$ et $\sqrt{3}+2i$.

1. *a*) Calculer le module et l'argument principal de $\frac{z_A}{z_B}$ où z_A et z_B sont les affixes respectives des points A et B.

b) En déduire que le triangle OAB est équilatéral.

2. On note P et Q les milieux respectifs des segments [OB] et [AB].
r est la rotation de centre J d'affixe i et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et t la translation de vecteur $\overrightarrow{PQ}$.
On pose : $f = t \circ r$.

a) Déterminer l'image par f du point O.

b) Démontrer que f est une rotation dont on donnera l'angle.

c) Construire le centre K de f.

Partie II

1. Soit M un point du plan d'affixe z. On pose : $z = x + iy$, où x et y des nombres réels.
On note H le point d'affixe $x + 3i$.
Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan tels que : $2|z| = |y - 3|$.

a) Démontrer que : $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow \frac{MO}{MH} = \frac{1}{2}$.

b) Justifier que (Γ) est une ellipse dont on précisera l'excentricité, un foyer et la directrice (D) associée.

c) Démontrer que : $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow \frac{x^2}{3} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$.

d) Préciser les coordonnées du centre Ω de (Γ) et les coordonnées des sommets de (Γ) dans le repère $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

e) Tracer (Γ).

2. Soit (Γ') est l'image de (Γ) par f.

a) Démontrer que (Γ') est une ellipse d'excentricité $\frac{1}{2}$.

b) Préciser un foyer et la directrice associée.

PROBLÈME

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est 10 cm.
On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par :
$\begin{cases} f(x) = (e^{-x^2} - 1)\ln x \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$
On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni du repère (O, I, J).

On se propose dans ce problème de trouver un encadrement de $\int_0^1 f(x)dx$.

Partie A

On considère les fonctions h et g dérivables et définies sur $]0 ; +\infty[$ par :
$h(x) = \ln x + e^x + 1$ et $g(x) = x\ln x + e^x - 1$.
On admet qu'il existe un nombre réel $\alpha \in]0 ; 1[$ tel que :
$\begin{cases} \forall x \in]0, \alpha[, h(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha, +\infty[, h(x) > 0 \\ h(\alpha) = 0 \end{cases}$

1. Calculer les limites de g en 0 et en $+\infty$.

2. Justifier que : $\forall x \in]0 ; +\infty[$, $g'(x) = h(x)$.

3. *a*) Etudier les variations de g sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
   b) Dresser le tableau de variation de g.
4. *a*) Démontrer que l'équation : $x \in]0 ; +\infty[$, $g(x) = 0$ admet une solution unique β.
   b) Justifier que : $\beta \in]0{,}3 ; 0{,}4[$.
   c) Démontrer que :
   $\forall x \in]0 ; \beta[, g(x) < 0$; $\forall x \in]\beta ; +\infty[, g(x) > 0$.

Partie B

1. Démontrer que f est continue en 0.

2. Justifier que f est dérivable en 0.
3. *a*) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
   b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$
   c) Donner une interprétation graphique des résultats des limites des questions *a*) et *b*).

4. On admet que f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$.
   a) Démontrer que : $\forall x \in]0 ; +\infty[, f'(x) = -\dfrac{e^{-x^2}}{x} g(x^2)$.
   b) Déterminer les variations de f sur $[0 ; +\infty[$.
   c) Dresser le tableau de variation de f.

5. *a*) Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 1.
   b) Tracer $(\mathscr{C})$ et (T) dans le plan muni du repère (O, I, J).
   On prendra $\beta = 0{,}31$.

sigmaths.tk

Partie C

1. Sachant que : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$.

a) Démontrer que : $\forall x \in]0 ; +\infty[, -1 \leq -e^{-x} \leq -1 + x$.

b) Démontrer que : $\forall x \in]0 ; +\infty[, \ 1 - x \leq e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2}$.

2. Soit t un nombre réel appartenant à l'intervalle]0 ;1].
On pose :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ I_n(t) = \int_t^1 x^n \ln x dx$.

a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $I_n(t)$.

b) Démontrer que :

$$\forall t \in]0 ; 1], \ -I_2(t) + \frac{1}{2} I_4(t) \leq \int_t^1 f(x)dx \leq -I_2(t).$$

3. On pose : $S = \int_0^1 f(x)dx$.

a) Donner une interprétation géométrique de S.

b) On admet que : $\lim_{t \to 0} \int_t^1 f(x)dx = S$.

Déterminer un encadrement de S.

sigmaths.tk

CORRIGE DES SUJETS DU BAC SERIE C DE LA COTE D'IVOIR

Corrigé type du sujet n° 1 : BAC C 2015

Exercice 1 :

Partie I :

1°) Calculons la probabilité de stationner gratuitement.

On a : $p = \left(\frac{2}{10}\right)^2$ donc $p = \frac{1}{25}$

2°) Justifions que la probabilité de payer la moitié du prix du stationnement est égale à $\frac{8}{25}$.

Procédé par arbre pondéré, p-liste ...

3°) Calculons la probabilité de payer au moins 1 000 F pour le stationnement.

on a : $p' = \frac{24}{25}$.

Partie II :

1°) a- Calculons la probabilité q_n, de payer l'amende au plus une fois.

Application correcte de la loi binomiale

$$q_n = C_n^0\left(\frac{4}{5}\right)^0\left(\frac{1}{5}\right)^n + C_n^1\left(\frac{4}{5}\right)^1\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

On obtient : $q_n = \frac{1+4n}{5^n}$.

b- Démontrons que la probabilité p_n qu'il paye au moins une fois l'amende est $p_n = 1 - \frac{1}{5^n}$.

(Utilisation de l'évènement contraire $p_n = 1 - \frac{1}{5^n}$).

c- Déterminons le plus petit entier naturel n pour que : $p_n \geq 0{,}99$.

$p_n \geq 0{,}99$ pour $n \geq 3$

La plus petite valeur de n est 3.

2°) a-Déterminons la loi de probabilité de X.

- $\{0; 5000; 10\,000; 15\,000\}$.
-

x_i	0	5000	10 000	15 000
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{125}$	$\frac{12}{125}$	$\frac{48}{125}$	$\frac{64}{125}$

b- Voyons si monsieur Riko a-t-il intérêt à se garer en stationnement interdit et justifions ta réponse.

$E(X) = 12\,000$

$E(X) > 4\,800$: Il n'a pas intérêt à se garer en stationnement interdit.

Exercice 2:

Partie I :

Le plan est muni du repère orthonormé direct $\left(O; \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$. L'unité graphique est 2 cm. On note A, B et C les points d'affixes respectives $2i$; $\sqrt{3}+i$ et $\sqrt{3}+2i$.

1°) a- Calculons le module et l'argument principal de $\frac{z_A}{z_B}$.

On a : $\left|\frac{z_A}{z_B}\right| = 1$ et $Arg\left(\frac{z_A}{z_B}\right) = \frac{\pi}{3}$

b- Déduisons-en que le triangle OAB est équilatéral.

Scanné avec CamScanner

On a :

$$\begin{cases} OA = OB \\ mes\left(\overrightarrow{OB}\,;\,\overrightarrow{OA}\right) = \dfrac{\pi}{3} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \frac{z_A}{z_B} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

Donc le triangle OAB est équilatéral.

2°) a- Déterminons l'image par f du point O.

On a : $\begin{cases} r(O) = P \\ t(P) = Q \end{cases}$ donc $f(O) = Q$

b- Démontrons que f est une rotation dont nous donnerons l'angle.

• f est la composée d'une rotation d'angle non nul et d'une translation donc f est une rotation.

• l'angle de r est $\frac{\pi}{3}$ donc l'angle de f est $\frac{\pi}{3}$

c- Construisons le centre K de f.

(Voir figure à la fin de l'exercice)

Partie II :

1°) a-Démontrons que : $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow \frac{MO}{MH} = \frac{1}{2}$.

On a : $|z| = OM$ et $|y-3| = MH$.

$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow 2MO = MH$

$\Leftrightarrow \frac{MO}{MH} = \frac{1}{2}$

b- Justifions que (Γ) est une ellipse dont nous préciserons l'excentricité, un foyer et la directrice $(\mathcal{D})$ associée.

Dans le repère $\left(O\,;\vec{e_1}\,,\vec{e_2}\right)$, on a : $\begin{cases} H(x\,;3) \\ M(x\,;y) \end{cases}$

, H est le projeté orthogonal de M sur $(\mathcal{D})$: $y = 3$ et $\frac{MO}{MH} = \frac{1}{2}$ et $0 < \frac{1}{2} < 1$ donc (Γ) est une ellipse d'excentricité $\frac{1}{2}$.

• $O \notin (\mathcal{D})$ donc O est un foyer

• $(\mathcal{D})$: $y = 3$ est la directrice associe

c- Démontrons que :

$$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow \frac{x^2}{3} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1.$$

$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow 2|z| = |y-3|$

$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow 2|z| = |y-3|$

$\Leftrightarrow 4\left(x^2+y^2\right) = (y-3)^2$

$\Leftrightarrow 4x^2 + 3y^2 + 6y = 9$

$\Leftrightarrow \frac{x^2}{3} + \frac{(y+1)^2 - 1}{4} = \frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow \frac{x^2}{3} + \frac{(y+1)^2}{4} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}$

D'où $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow \frac{x^2}{3} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1.$

d- Précisons les coordonnées du centre Ω de (Γ) et les coordonnées des sommets de (Γ) dans le repère $\left(O\,;\vec{e_1}\,,\vec{e_2}\right)$.

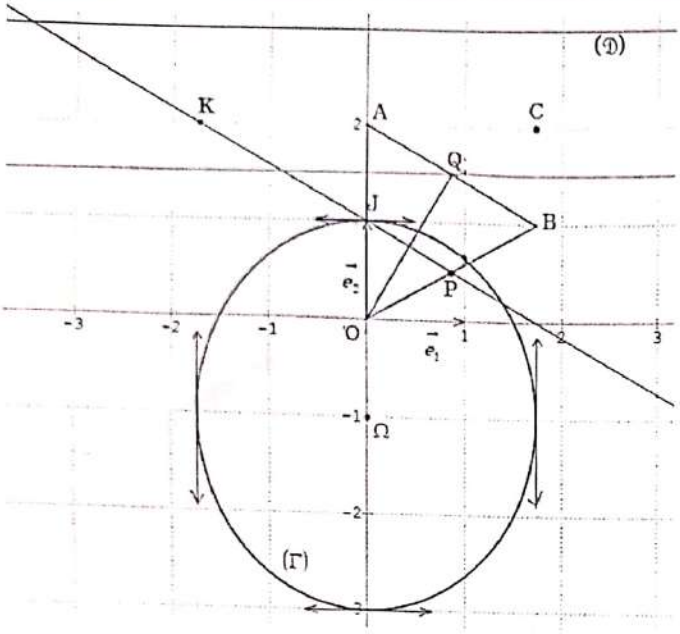
• $\Omega(0\,;-1)$

• Coordonnées des sommets

$(0\,;1)$; $(0\,;-3)$; $\left(\sqrt{3}\,;-1\right)$ et $\left(-\sqrt{3}\,;-1\right)$ dans le repère $\left(O\,;\vec{e_1}\,,\vec{e_2}\right)$.

d-Traçons (Γ).

Scanné avec CamScanner



2°)a- Démontrons que (Γ') est une ellipse d'excentricité $\frac{1}{2}$.

$(\Gamma') = f(\Gamma)$

f	
M	M'
O	Q
H	H'

$$\frac{M'Q}{M'H'} = \frac{MO}{MH} = \frac{1}{2}$$

Donc (Γ') est une ellipse d'excentricité $\frac{1}{2}$

b- Précisons un foyer et la directrice associée.

- un foyer : $f(O) = Q$
- la directrice associée $(\mathcal{D}') = f((\mathcal{D}))$.

Problème :

Partie A :

On considère les fonctions h et g dérivables et définies sur $]0;+\infty[$ par :

$h(x) = \ln x + e^x + 1$ et $g(x) = x\ln x + e^x - 1$.

On admet qu'il existe un nombre réel $\alpha \in]0;1[$ tel que : $\begin{cases} \forall x \in]0;\alpha[; h(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha;+\infty[; h(x) > 0 \\ h(\alpha) = 0 \end{cases}$.

1°) Calculons les limites de g en 0 et en $+\infty$.

- $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

2°) Justifie que : $\forall x \in]0;+\infty[$, $g'(x) = h(x)$

g est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme somme de fonctions dérivable et $\forall x \in]0;+\infty[$,

$g'(x) = \ln x + \frac{1}{x}(x) + e^x$

$= \ln x + e^x + 1$ donc $\forall x \in]0;+\infty[$, $g'(x) = h(x)$.

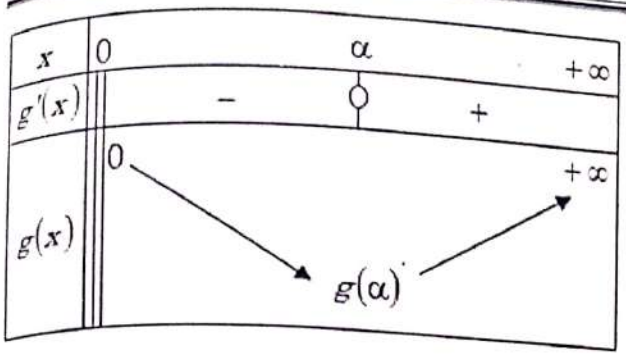
3°) a- Étudions le sens variations de g sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Le signe de g' est celui de h.

Donc g est strictement décroissante sur $]0;\alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha;+\infty[$.

b- Dressons le tableau de variation de g .

Scanné avec CamScanner



4°) a- Démontrons que $\forall x \in]0;+\infty[$ l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique β.

•sur $]0;\alpha]$, g est continue et strictement décroissante et $g(]0;\alpha])=[g(\alpha);0[$. $g(\alpha)<0$ d'où l'équation $g(x)=0$ n'admet pas de solution sur $]0;\alpha]$.

•sur $[\alpha;+\infty[$, g est continue et strictement croissante et $g([\alpha;+\infty[)=[g(\alpha);+\infty[$; $0\in[g(\alpha);+\infty[$ donc l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution β dans $[\alpha;+\infty[$

d'où $\forall x\in]0;+\infty[$, l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique β.

b- Justifions que : $\beta\in]0,3;0,4[$.

On a : $\begin{cases} g(0,3)=-0,01 \\ g(0,4)=0,13 \end{cases}$ donc $0,3<\beta<0,4$

c- Démontrons que :

$$\begin{cases} \forall x\in]0;\beta[\,,\ g(x)<0 \\ \forall x\in]\beta;+\infty[\,,\ g(x)>0 \end{cases}.$$

D'après les questions 3°) b- et 4°) a- on déduit donc : $\begin{cases} \forall x\in]0;\beta[,\ g(x)<0 \\ \forall x\in]\beta;+\infty[,\ g(x)<0 \end{cases}$.

$$\begin{cases} \forall x\in]0;\beta[\,,\ g(x)<0 \\ \forall x\in]\beta;+\infty[\,,\ g(x)>0 \end{cases}.$$

Partie B :

1°) Démontrons que f est continue en 0.

On a : $\left.\begin{array}{l} f(x)=-\left(\dfrac{e^{-x^2}-1}{-x^2}\right)x^2\ln x \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0=f(0) \end{array}\right\}$ donc f est continue en 0.

2°) Justifions que f est dérivable en 0.

On a : $\left.\begin{array}{l} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=-\left(\dfrac{e^{-x^2}-1}{-x^2}\right)x\ln(x) \\ \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=0 \end{array}\right\}$;

comme $0\in\mathbb{R}$ donc f est dérivable en 0.

3°) a- Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

On obtient : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

b- Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

On trouve : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$

c- Donne une interprétation graphique des résultats des limites des questions a- et b-.

on a : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0 \end{cases}$ donc $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique de direction (OI).

Scanné avec CamScanner

4°) On admet que f est dérivable sur $]0;+\infty[$.

a- Démontre que : $\forall x \in]0;+\infty[$,

$$f'(x) = -\frac{e^{-x^2}}{x} g(x^2).$$

$\forall x \in]0;+\infty[$, on a :

$$f'(x) = -2xe^{-x^2} \ln x + \frac{1}{x}\left(e^{-x^2} - 1\right)$$

$$f'(x) = \frac{-x^2 e^{-x^2} \ln x^2 + e^{-x^2} - 1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{e^{-x^2}}{x}\left(x^2 \ln x^2 + e^{x^2} - 1\right) \quad \text{d'où}$$

$$\forall x \in]0;+\infty[,\ f'(x) = -\frac{e^{-x^2}}{x} g(x^2)$$

b- Déterminons le sens de variation de f sur $]0;+\infty[$.

$\forall x \in]0;+\infty[$,

$$\begin{cases} \bullet\ \textit{le signe de } f'(x) \textit{ est celui de } -g(x^2) \\ \bullet\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{\beta} \end{cases}$$

• $\forall x \in]0;\sqrt{\beta}[$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $[0;\sqrt{\beta}]$.

• $\forall x \in]\sqrt{\beta};+\infty[$, $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $[\sqrt{\beta};+\infty[$.

c- Dressons le tableau de variation de f

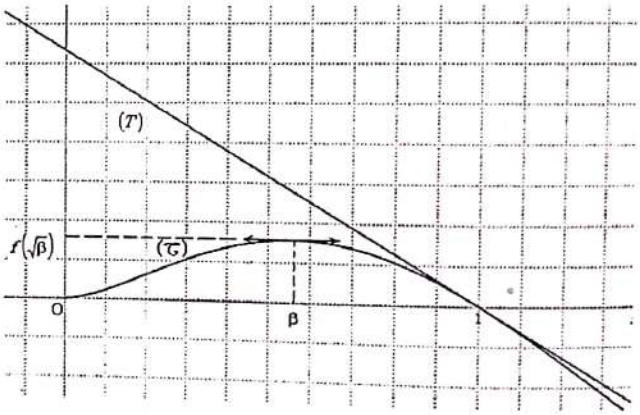
x	0		$\sqrt{\beta}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$f(\sqrt{\beta})$	↘	$-\infty$

5°) a- Déterminons une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 1.

$$\begin{cases} f(1) = 0 \\ f'(1) = \frac{1}{e} - 1 \end{cases} \text{ donc } (T) : y = \left(\frac{1}{e} - 1\right)(x-1) \text{ ou}$$

$$(T) : y = \left(\frac{1}{e} - 1\right)x + 1 - \frac{1}{e}.$$

b- Traçons $(\mathcal{C})$ et (T) dans le plan muni du repère (O ; I ; J).



Partie C :

1°) Sachant que : $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geq 1 + x$.

a- Démontrons que : $\forall x \in]0;+\infty[$,

$$-1 \leq -e^{-x} \leq -1 + x .$$

$\forall x \in]0;+\infty[$, $x > 0$ donc $\forall x \in]0;+\infty[$,

$-x < 0 \Leftrightarrow \forall x \in]0;+\infty[$, $e^{-x} < 1$ (1)

Par hypothèse $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geq 1 + x$

or $\forall x \in \mathbb{R},\ (-x) \in \mathbb{R}$

Scanné avec CamScanner

donc $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x} \geq 1 - x$ (2)

De (1) et (2) on a :

$\forall x \in]0;+\infty[\ ,\ 1 - x \leq e^{x} \leq 1$ donc

$\forall x \in]0;+\infty[\ ,\ -1 < -e^{-x} \leq -1 + x$ d'où

$\forall x \in]0;+\infty[\ ,\ -1 \leq -e^{-x} \leq -1 + x$

b- Démontrons que : $\forall x \in]0;+\infty[$,

$$1-x \leq e^{-x} \leq 1-x+\frac{x^2}{2}.$$

De la démonstration précédente, on a :

$\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x} \geq 1 - x$ $\oplus$.

Soit $u(x) = e^{-x} - 1 + x - \frac{x^2}{2}$

u est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = -e^{-x} + 1 - x$; $u'(x) = -(e^{-x} - 1 + x)$ or $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x} \geq 1 - x$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} - 1 + x \geq 0$ par suite, $\forall x \in \mathbb{R},\ u'(x) \leq 0$; il en résulte que u est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ donc sur $]0;+\infty[$.

On a : $u(]0;+\infty[) =]\lim\limits_{x\to+\infty} u(x);\ \lim\limits_{x\to 0^+} u(x)[$

$$\lim_{x\to+\infty} u(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(e^{-x} - 1 + x - \frac{x^2}{2}\right)$$

pour $X = -x$, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} u(x) = \lim_{X\to-\infty}\left(e^{X} - 1 - X - \frac{X^2}{2}\right) = -\infty.$$

$\lim\limits_{x\to 0^+} u(x) = 0$; alors on a : $u(]0;+\infty[) =]-\infty;0[$

donc $\forall x \in]0;+\infty[\ ,\ u(x) < 0$ soit

$\forall x \in]0;+\infty[\ ,\ e^{-x} < 1 - x + \frac{x^2}{2}$ $\otimes$

De $\oplus$ et $\otimes$ on conclut que :

$$\forall x \in]0;+\infty[\ ,\ 1-x \leq e^{-x} \leq 1-x+\frac{x^2}{2}.$$

2°) a- A l'aide d'une intégration par parties, calculons $I_n(t)$.

On trouve :

$$I_n(t) = \frac{t^{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{t^{n+1}}{n+1}\ln t - \frac{1}{(n+1)^2}$$

b- Démontrons que : $\forall t \in]0;1]$,

$$-I_2(t) + \frac{1}{2}I_4 \leq \int_t^1 f(x)dx \leq -I_2(t).$$

on a : $\forall x \in]0;+\infty[\ ,\ 1-x \leq e^{-x} \leq 1-x+\frac{x^2}{2}$

donc $-x^2 \leq e^{-x^2} - 1 \leq -x^2 + \frac{x^2}{2}$.

$\forall x \in]0;1[\ ,\ \ln(x) < 0$ donc :

$$\left(-x^2 + \frac{x^2}{2}\right)\ln x \leq f(x) \leq -x^2 \ln x \oplus$$

En intégrant membre à membre $\oplus$ sur $]t;1]$,on a :

$$-I_2(t) + \frac{1}{2}I_4(t) \leq \int_t^1 f(x)dx \leq -I_2(t).$$

3°) On pose : $S = \int_0^1 f(x)dx$.

a- Donnons une interprétation géométrique de S.

Scanné avec CamScanner

S : aire de la partie du plan, en u.a, délimitée par $(\mathcal{C})$, l'axe (OI) et les droites d'équation : $x=0$ et $x=1$.

b- On admet que : $\lim\limits_{t\to 0}\int_t^1 f(x)dx = S$.

<u>Déterminons un encadrement de S.</u>

on trouve : $\frac{41}{450} \le S \le \frac{1}{9}$ ou $0{,}09 \le S \le 0{,}11$.

Scanné avec CamScanner

Pays : Togo	**Année** : 2017	**Épreuve** : Mathématiques
Examen : BAC, Séries C-E	**Durée** : 4 h	**Coefficient** : 5

EXERCICE 1 (4 *points*)

Le plan P est muni du repère orthonormé (O, I, J), α étant un nombre réel. Soit f_α l'application de P dans P transformant I en $A\begin{pmatrix}\alpha+1\\ \alpha+2\end{pmatrix}$, J en $B\begin{pmatrix}-1\\ -2\end{pmatrix}$ et laissant invariant O.

1. *a)* Montrer que f_α est une application affine.

b) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles f_α est bijective.

On note ℓ_α son application linéaire associée et on pose : $\vec{\imath} = \overrightarrow{OI}$, $\vec{\jmath} = \overrightarrow{OJ}$.

c) Déterminer $\ell_\alpha(\vec{\imath})$ et $\ell_\alpha(\vec{\jmath})$. En déduire l'expression analytique de f_α dans le repère (O, I, J).

2. Déterminer α pour que l'on ait $f_\alpha \circ f_\alpha = Id_P$ où Id_P est l'application identique du plan.

3. Déterminer l'ensemble des points invariants par f_α. (*On discutera suivant les valeurs de* α).

4. Quelle est la nature géométrique de f_1 ? (α =1). Quels sont ses éléments caractéristiques ?

5. Étude de f_0 (α = 0)

a) Déterminer l'ensemble (Δ) des points M' qui sont images par f_0 d'au moins un point M de P.

b) Soit s la symétrie de centre O. Montrer que f_0 = p o s où p est une projection dont on précisera les éléments caractéristiques.

EXERCICE 2 (4 *points*)

Un sac contient 30 boules indiscernables au toucher dont α noires, β blanches et γ rouges. On suppose qu'il y a au moins deux boules de chaque couleur. On tire au hasard et simultanément deux boules du sac. Soit l'événement E « Obtenir deux boules de même couleur ».

1. Calculer en fonction de α, β et γ la probabilité $P(\alpha,\beta,\gamma)$ de l'événement E.

2. On se propose de déterminer α, β et γ afin que $P(\alpha, \beta, \gamma)$ soit minimale. Pour cela on munit l'espace affine $\mathcal{E}$ d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ et on considère les points A(30 ; 0 ; 0) ; B(0 ; 30 ; 0) et C(0 ; 0 ; 30). Soit le point $M(\alpha, \beta, \gamma)$ de $\mathcal{E}$.

a) Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $x + y + z - 30 = 0$.

b) En déduire que M appartient au plan (ABC).

c) Démontrer que $870\ P(\alpha, \beta, \gamma) + 30 = OM^2$.

d) Soit H le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC).

Déterminer les coordonnées du point H.

e) En déduire les valeurs de α, β et γ qui rendent minimale $P(\alpha, \beta, \gamma)$, puis calculer la probabilité $P(\alpha, \beta, \gamma)$ correspondante.

3. Le sac contient désormais 10 boules noires, 10 boules blanches et 10 boules rouges. Soit *n* et *k* deux entiers naturels supérieur ou égal à 2.

Un joueur mise *n* francs et tire simultanément deux boules du sac.

- S'il obtient deux boules de même couleur, il reçoit k fois sa mise et le jeu est terminé.
- S'il obtient deux boules de couleurs différentes, il remet les deux boules tirées dans le sac et tire à nouveau simultanément deux boules.
- S'il obtient deux boules de même couleur, il reçoit (*k*–1) fois sa mise, sinon il perd sa mise et le jeu est terminé.

Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

a) Montrer que la probabilité pour que le joueur ait un gain algébrique égal à $kn - n$ est $\frac{9}{29}$.

b) Déterminer la loi de probabilité de X.

c) Calculer l'espérance mathématique E(X) en fonction de *k* et *n*.

PROBLÈME (12 *points*)

Partie A

Soit f la fonction numérique d'une variable réelle définie par : $f(x) = ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$.

1. Préciser l'ensemble de définition de f.
2. Étudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.
3. Construire la courbe $(\mathcal{C})$ de f dans un repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$).

Partie B

On considère l'application T_k du plan dans lui-même d'expression analytique :

$$\begin{cases} x' = kx - y + 1 \\ y' = -x - ky + 1 \end{cases}$$ où *k* est un réel.

1. T_k est-elle une transformation du plan ?
2. En discutant suivant les valeurs de *k*, déterminer l'ensemble des points invariants par T_k.
3. Déterminer l'écriture complexe associée à T_k.
4. Caractériser $T_k \circ T_k$ suivant les valeurs de *k*.
5. *a)* Caractériser T_0 puis déterminer l'équation de la courbe (Γ) image de $(\mathcal{C})$ par T_0.
b) Tracer (Γ) dans le même repère que $(\mathcal{C})$.

Partie C

Pour tout réel $x \in \left[-\frac{\pi}{2}\ ; 0\right[$ on pose : $g(x) = f(cosx)$.

1. Montrer que g est une primitive sur $\left[-\frac{\pi}{2}\ ; 0\right[$ de $x \longmapsto \frac{C}{sinx}$ où *C* est un réel à déterminer.

2. $\forall\ a \in \left[-\frac{\pi}{2}\ ; 0\right[$, $\forall\ n \in$ IN* , on pose : $I_n(a) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{a} \frac{-cos^{2n}t}{sint}\ dt$.

Montrer que : $0 \leq I_n(a) \leq \frac{cos^{2n}a}{-sina}\left(a + \frac{\pi}{2}\right)$.

En déduire que : $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n(a) = 0$.

3. Pour tout entier naturel non nul *n*, on définit la fonction F_n sur $\left[-\frac{\pi}{2}\ , a\right]$ par :

$F_n(t) = cost + \frac{cos^3 t}{3} + \frac{cos^5 t}{5} + \ldots\ldots\ldots + \frac{cos^{2n-1}t}{2n-1}$.

a) Montrer que F_n est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2}\ , a\right]$ et que $\forall\ t \in \left[-\frac{\pi}{2}\ , a\right]$, $F'_n(t) = \frac{-1+cos^{2n}t}{sint}$.

Calculer $F_n\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

b) En intégrant la relation précédente entre $-\frac{\pi}{2}$ et *a*, montrer que $F_n(a) = \frac{-g(a)}{C} - I_n(a)$, où *c* est le réel déterminé dans la question **C. 1**. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(a)$.

Partie D

Dans cette partie $x \in]0;1[$; $t \in]0,x[$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Vérifier que : $\sum_{k=0}^{2n-1} x^k = \frac{1-x^{2n}}{1-x}$ (1)

et que $\sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k x^k = \frac{1+(-1)^{2n-1}x^{2n}}{1+x}$. (2)

2. *a)* Démontrer que : $1 < \frac{1}{1-t^2} < \frac{1}{1-x^2}$.

En déduire que : $0 < \frac{x^{2n+1}}{2n+1} < \int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t^2}\,dt < \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1-x^2)}$.

b) Utiliser les relations (1) et (2) pour montrer que : $-\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^{2n}}{2n} + \int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t}\,dt$

et $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{2n-1}\frac{x^{2n}}{2n} + (-1)^{2n}\int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t}\,dt$.

c) En déduire que $\frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x}) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t^2}\,dt$.

3. Des questions **D.1** et **2**, trouver deux fonctions U et V sans intégrale telles que :
$U(x) < f(x) < V(x)$.

Corrigé du sujet n° 9 : BAC C 2017

Exercice 1 :

Le plan $\mathcal{P}$ est muni du repère orthonormé (O, I, J), α étant un nombre réel. Soit f_α l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ telle que $f_\alpha(I) = A$, $f_\alpha(J) = B$ et $f_\alpha(O) = O$.

1°) a- Prouvons que f_α est une application affine.

Étant donné que (O, I, J) est un repère (points non alignés) et on connait l'image des points O, I et J par f_α qui sont respectivement O, A et B (qui aussi non alignés), alors f_α est une application affine.

b- Déterminons les valeurs de α pour lesquelles f_α est bijective.

f_α est bijective si et seulement si le repère (O, I, J) est transformé en un repère.
Autrement dit :

Initiateur : M. Sylvain AHOUANGBO (+229) 97 47 15 27/ 94 26 28 54

Scanné avec CamScanner

$\det\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) \neq 0$. Or $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}\alpha+1\\ \alpha+2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}-1\\ -2\end{pmatrix}$

Ainsi $\det\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \begin{vmatrix}\alpha+1 & -1\\ \alpha+2 & -2\end{vmatrix}$

$$\det\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = -\alpha .$$

Par conséquent, f_α est bijective si et seulement si $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

c- On note l_α son application linéaire associée et on pose : $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$, $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$.

- Déterminons $l_\alpha\left(\vec{i}\right)$ et $l_\alpha\left(\vec{j}\right)$.

$$l_\alpha\left(\vec{i}\right) = l_\alpha\left(\overrightarrow{OI}\right) = \overrightarrow{f_\alpha(O)f_\alpha(I)} - \overrightarrow{OA}$$

$$l_\alpha\left(\vec{j}\right) = l_\alpha\left(\overrightarrow{OJ}\right) = \overrightarrow{f_\alpha(O)f_\alpha(J)} = \overrightarrow{OB}$$

D'où, $l_\alpha\left(\vec{i}\right) = (\alpha+1)\vec{i} + (\alpha+2)\vec{j}$,

$$l_\alpha\left(\vec{j}\right) = -\vec{i} + -2\vec{j}$$

- Déduisons-en l'expression analytique de f_α dans le repère (O, I, J).

Soit $M(x\ ;\ y)$ un point du plan dans le repère (O , I, J).

Soit $M'(x'\ ;\ y') = f_\alpha(M)$. On a :

$$\overrightarrow{OM'} = l_\alpha\left(\overrightarrow{OM}\right).$$

Ainsi posons (*) : $\overrightarrow{OM'} = l_\alpha\left(x\vec{i} + y\vec{j}\right)$.

$(*) \Leftrightarrow x'\vec{i} + y'\vec{j} = xl_\alpha\left(\vec{i}\right) + yl_\alpha\left(\vec{j}\right)$ car l_α est linéaire.

Scanné avec CamScanner

Soit $N\begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix}$ un point de $\mathcal{P}$ et démontrons qu'il existe un $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tel que $f_0(M) = N$.

$$f_0(M) = N \Rightarrow \begin{cases} x' = x - y \\ y' = 2(x - y) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = t \\ y' \quad = 2(x - y) = 2t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x - y = t .$$

En posant $M\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$, on a bien $f_0(M) = N$.

D'où tout point de $(\Delta): y = 2x$ est l'image d'au moins un point de $\mathcal{P}$.

L'ensemble image de f_0 est donc $(\Delta): y = 2x$

b- Soit $\mathcal{S}$ la symétrie de centre O.

Démontrons que $f_0 = p \circ \mathcal{S}$ où p est une projection dont nous préciserons les éléments caractéristiques.

$f_0 = p \circ \mathcal{S} \Leftrightarrow p = f_0 \circ \mathcal{S}$ après composition par s par la droite.

Déterminons $f_0 \circ \mathcal{S}$.

On a : $\mathcal{S}: \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$ et $f_0: \begin{cases} x' = x - y \\ y' = 2x - 2y \end{cases}$

$$\mathcal{S}: \begin{cases} x' = -x + y \\ y' = -2x + 2y \end{cases}.$$

$f_0 \circ$

$x' = -x + y$

$= -2x + 2y$

$p:$

$) - 2x + 2y$

$+ 2(-2x + 2y)$

$\begin{cases} x' = -(-x + y) \\ y' = -2(- \end{cases}$

$$: \begin{cases} x' = -x + y \\ y' = -2x + 2y \end{cases}$$

On obtient alors $p \circ p = p$, donc p est une projection caractérisée par :

- *Direction* : Soit M un point de $\mathcal{P}$ et M' son image par p.

On a : $\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix} -2x + y \\ -2x + y \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire à $\vec{i} + \vec{j}$.

Exercice 2 :

$\Omega = \{$*Tirage simultané de deux boules dans un sac qui en contient* 30 *dont* α *noirs,* β *blanches et* γ *rouges*$\}$

E = « Obtenir deux boules de même couleur »

1°) Calculons en fonction de α, β et γ la probabilité $P(\alpha, \beta, \gamma)$ de l'événement E.

On a : C_α^2 possibilité d'avoir deux boules noires, C_β^2 possibilité d'avoir deux boules blanches et C_γ^2 possibilité d'avoir deux boules rouges.

$$P(E) = \frac{\text{card}(E)}{\text{card}(\Omega)}$$

$$P(E) = \frac{C_\alpha^2 + C_\beta^2 + C_\gamma^2}{C_{30}^2}$$

$$= \frac{[\alpha(\alpha - 1) + \beta(\beta - 1) + \gamma(\gamma - 1)]}{870}$$

$$= \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 30}{870}$$

D'où $P(E) = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 30}{870}$.

Scanné avec CamScanner

2°) On se propose de déterminer α, β et γ afin que $P(\alpha, \beta, \gamma)$ soit minimale. Pour cela on munit l'espace affine $\mathcal{E}$ d'un repère orthonormé $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ et on considère les points $A(30 ; 0 ; 0)$, $B(0 ; 30 ; 0)$ et $C(0 ; 0 ; 30)$. Soit le point $M(\alpha, \beta ; \gamma)$ de $\mathcal{E}$.

a- Vérifions qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $x + y + z - 30 = 0$.

1ère méthode :

Soit (ABC) : $ax + by + cz + d = 0$.

En remplaçant les coordonnées des points A, B et C, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} 30a + d = 0 \\ 30b + d = 0 \\ 30c + d = 0 \end{cases} \Rightarrow 30a = 30b = 30c = -d,$$

Ainsi, (ABC) : $-\frac{d}{30}x - \frac{d}{30}y - \frac{d}{30}z + d = 0$

En prenant $d = 30$, on a :

(ABC) : $ax + by + cz + d = 0$.

2e méthode :

Elle consiste à vérifier que les coordonnées des points A, B et C vérifient l'équation proposée.

b- Déduisons-en que M appartient au plan (ABC).

On sait que :

$\alpha + \beta + \gamma = 30 \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma - 30 = 0$.

Par conséquent, M appartient au plan (ABC).

c- Démontrons que $870P(\alpha ; \beta, \gamma) + 30 = OM^2$.

On a :

$$870P(\alpha ; \beta ; \gamma) = \alpha(\alpha - 1) + \beta(\beta - 1) + \gamma(\gamma - 1)$$
$$= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - (\alpha + \beta + \gamma).$$

Or $OM^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$

Donc $870P(\alpha ; \beta ; \gamma) = OM^2 - 30$.

d'où $870P(\alpha ; \beta ; \gamma) + 30 = OM^2$.

d- Soit H le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC).

Déterminons les coordonnées du point H.

$\overrightarrow{OH}$ est colinéaire à $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, donc $H\begin{pmatrix}\mu\\\mu\\\mu\end{pmatrix}$ avec $\mu \in \mathbb{R}$.

Par conséquent, $H\begin{pmatrix}10\\10\\10\end{pmatrix}$.

e- Déduisons-en les valeurs de α, β et γ qui rendent minimale $P(\alpha ; \beta, \gamma)$.

Comme $870P(\alpha ; \beta ; \gamma) + 30 = OM^2$, alors $P(\alpha ; \beta ; \gamma)$ est minimale si et seulement si OM est minimale.

Ce qui est réalisé pour M = H.

D'où, $\alpha = \beta = \gamma = 10$

Calculons la probabilité $P(\alpha ; \beta, \gamma)$ correspondante.

$$P(10 ; 10 ; 10) = \frac{1}{870}(300 - 30)$$

D'où $P(10 ; 10 ; 10) = \frac{9}{29}$

3°) Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

Scanné avec CamScanner

a- Prouvons que la probabilité pour que le joueur ait un gain algébrique égal à $kn-n$ est $\frac{9}{29}$.

Le gain algébrique du joueur est $kn-n$ c'est-à-dire il mise n franc et reçoit kn francs. Soit avec un tirage où il a obtenu deux boules de même couleur. On a :

$P(X=kn-n)=\frac{3C_{10}^2}{C_{30}^2}=\frac{9}{29}$ d'où

$P(X=kn-n)=\frac{9}{29}$

b- Déterminons la loi de probabilité de X.

$X(\Omega)=\{-n\ ;\ kn-2n\ ;\ kn-n\}$.

- La probabilité d'obtenir deux boules de couleurs différentes est : $1-\frac{9}{29}=\frac{20}{29}$.
- La probabilité d'obtenir deux boules de couleurs différentes au cours des deux tirages est : $\frac{20}{29}\times\frac{20}{29}=\frac{400}{841}$.
- La probabilité d'obtenir deux boules de couleurs différentes au cours du 1er tirage et deux boules de même couleur au cours du second tirage est : $\frac{20}{29}\times\frac{9}{29}=\frac{180}{841}$.

Ainsi on a le tableau suivant :

x_i	$-n$	$kn-2n$	$kn-n$
$P(X=x_i)$	$\frac{400}{841}$	$\frac{180}{841}$	$\frac{9}{29}$

c- Calculons l'espérance mathématique $E(X)$ en fonction de k et n.

$E(X)=\sum_{i=1}^{3}x_iP_i$.

$E(X)=x_1P_1+x_2P_2+x_3P_3$

$=n\times\frac{400}{841}+(kn-2n)\times\frac{180}{841}+(kn-n)\frac{9}{29}$

$=\frac{-400n+180(kn-2n)+261(kn-n)}{841}$

D'où, $E(X)=\frac{n(441k-1021)}{841}$.

Problème :

A/ soit f la fonction numérique d'une variable réelle définie par :

$f(x)=\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$.

1°) Précisons l'ensemble de définition de f.

$D=\left\{x/x\in\mathbb{R}.\ 1+x\neq0\ et\ \frac{1-x}{1+x}>0\right\}$

- $1+x=0\Rightarrow x=-1$
- $\frac{1-x}{1+x}>0\Rightarrow x\in\ ]-1\ ;1[$; d'où $D=]-1\ ;1[$

2°) Étudions le sens de variation de f puis dresse son tableau de variation.

- *Limites :*

$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}}f(x)=+\infty$ car $\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}}\frac{1-x}{1+x}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty\end{cases}$

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}f(x)=-\infty$ car $\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{1-x}{1+x}=0^+\\ \lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty\end{cases}$

- *Dérivée-signe et sens de variation :*

Scanné avec CamScanner

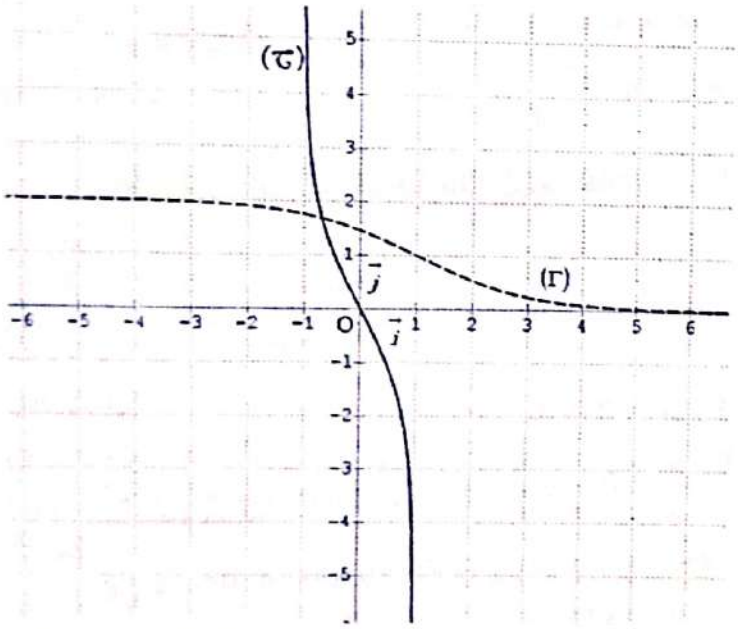
f est dérivable sur D et pour tout x de D, on a : $f'(x) = \dfrac{-2}{1-x^2}$.

$\forall x \in D$, $f'(x) < 0$. Donc f est strictement décroissante sur D.

♠ *Tableau de variation* :

x	-1		1
$f'(x)$	‖		‖
f	‖ $+\infty$	↘	‖ $-\infty$

3°) Construisons la courbe $(\mathcal{C})$ de f dans un repère orthonormé $\left(O ; \vec{i} , \vec{j}\right)$.



B/ On considère l'application T_k du plan dans lui-même d'expression analytique :

$\begin{cases} x' = kx - y + 1 \\ y' = -x - ky + 1 \end{cases}$ où k est un réel.

1°) Vérifions que T_k une transformation du plan.

T_k est une transformation si et seulement si $\begin{vmatrix} k & -1 \\ -1 & -k \end{vmatrix} \neq 0$.

On a : $\begin{vmatrix} k & -1 \\ -1 & -k \end{vmatrix} = -\left(k^2 + 1\right)$. Comme $\forall k \in \mathbb{R}$, $-\left(k^2 + 1\right) \neq 0$, alors T_k est bijective. Par conséquent, T_k est une transformation du plan.

2°) En discutant suivant les valeurs de k, déterminons l'ensemble des points invariants par T_k.

$$T_k(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x = kx - y + 1 \\ y = -x - ky + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (S) : \begin{cases} (k-1)x - y = -1 \\ x + (k+1)y = 1 \end{cases}$$

$\det(S) = \begin{vmatrix} k-1 & -1 \\ 1 & k+1 \end{vmatrix}$; $\det(S) = k^2$. Ainsi :

♣ Pour $k \neq 0$, T_k admet un unique point invariant $I_k\left(-\dfrac{1}{k} ; \dfrac{1}{k}\right)$.

♣ Pour $k = 0$, (S) devient :

$\begin{cases} -x - y = -1 \\ x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow y + x = 1$.

L'ensemble des points invariants est la droite d'équation : $y = 1 - x$.

3°) Déterminons l'écriture complexe associée à T_k.

$$\begin{aligned} x' + iy' &= kx - y + 1 + i(-x - ky + 1) \\ &= (k - i)x - i(k - i)y + 1 + i \\ &= (k - i)(x - iy) + 1 + i \end{aligned}$$

d'où, $z' = (k - i)\bar{z} + 1 + i$.

4°) Caractérisons $T_k \circ T_k$ suivant les valeurs de k.

Scanné avec CamScanner

$T_k \circ T_k$: $z'' = (k-i)\overline{(k-i)\bar{z}+1+i}+1+i$

$= (k-i)[(k+i)z+1-i]+1+i$

$= (k^2+1)z + k(1-i)$

- Si $k=0$, alors $z''=z$, donc : $T_k \circ T_k = \mathrm{Id}_P$.
- Si $k \neq 0$ alors $T_k \circ T_k$ est l'homothétie de rapport k^2+1 et de centre Ω d'affixe $z_\Omega = -\frac{1}{2}(1-i)$.

5°) a- Caractérisons T_0 puis déterminons l'équation de la courbe (Γ) image de $(\mathcal{C})$ par T_0.

$T_0 : z' = -i\bar{z} + 1 + i$.

L'écriture complexe de T_0 étant sous la forme $z' = a\bar{z} + b$ avec $|a| = |-i|$ et $T_k \circ T_k = \mathrm{Id}_P$. Donc T est une symétrie orthogonale. D'après la question B/ 2°), son axe est $(D) : y = 1 - x$.

Équation de (Γ).

$$T_0 : \begin{cases} x' = -y+1 \\ y' = -x+1 \end{cases} \Leftrightarrow T_0 : \begin{cases} x = -y'+1 \\ y = -x'+1 \end{cases}.$$

Dans $y = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$, on a :

$-x'+1 = \ln\left(\frac{1+y'-1}{1-y'+1}\right)$

$-x'+1 = \ln\left(\frac{y'}{2-y'}\right)$.

Pour $x \in]-1;1[$, on a : $y' \in]0;2[$ et on a bien $\frac{y'}{2-y'} > 0$. Donc :

$e^{-x'+1} = \left(\frac{y'}{2-y'}\right)$;

$y'\left(1+e^{-x'+1}\right) = 2e^{-x'+1}$;

$y' = \frac{2e^{-x'+1}}{1+e^{-x'+1}}$. Par conséquent,

$y = \frac{2e^{-x+1}}{1+e^{-x+1}}$ est l'équation de la courbe (Γ)

b- Traçons (Γ) dans le même repère que $(\mathcal{C})$.

(Voir figure)

C/ Pour tout réel $x \in \left[-\frac{\pi}{2};0\right[$, on pose $g(x) = f(\cos x)$.

1°) Démontrons que g est une primitive sur $\left[-\frac{\pi}{2};0\right[$ de $x \mapsto \frac{C}{\sin x}$ où C est un réel à déterminer.

La fonction $x \mapsto \cos(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $\left[-\frac{\pi}{2};0\right[$.

De plus $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2};0\right[$, $\cos(x) \in]0;1[\subset D$ et f est dérivable ; donc g est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2};0\right[$ comme composé de deux fonctions dérivables.

$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2};0\right[$, $g'(x) = -\sin(x)f'[\cos(x)]$

$= -\sin(x) \times \frac{-2}{1-\cos^2(x)}$

$= \frac{2\sin(x)}{\sin^2(x)}$

Donc g est une primitive de $x \mapsto \frac{2}{\sin(x)}$ sur $\left[-\frac{\pi}{2};0\right[$ et par identification $C = 2$.

Scanné avec CamScanner

2°) $\forall a \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right[$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$I_n(a) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{a} \frac{-\cos^{2n} t}{\sin t} dt$.

Démontrons que $0 \leq I_n(a) \leq \frac{\cos^{2n} a}{-\sin a}\left(a + \frac{\pi}{2}\right)$.

Soit $a \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right[$, $\forall t \in \left[-\frac{\pi}{2}; a\right[$.

- La fonction $t \mapsto \cos(t)$ est croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}; a\right[\Rightarrow 0 \leq \cos(t) \leq \cos(a)$.

  Ainsi $0 \leq \cos^{2n}(t) \leq \cos^{2n}(a)$ ①
- La fonction $t \mapsto -\sin(t)$ est décroissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}; a\right[\Rightarrow$ $-\sin(a) \leq -\sin(a) \leq -\sin(t)$. Ainsi $1 \leq \frac{1}{-\sin(t)} \leq \frac{1}{-\sin(a)}$ ②.

① et ② donnent $\forall t \in \left[-\frac{\pi}{2}; a\right[$,

$0 \leq \frac{\cos^{2n}(t)}{-\sin(t)} \leq \frac{\cos^{2n}(a)}{-\sin(a)}$. on en déduit que :

$0 \leq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{a} \frac{\cos^{2n}(a)}{-\sin(t)} dt \leq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{a} \frac{\cos^{2n}(a)}{-\sin(a)} dt$. Par conséquent : $0 \leq I_n(a) \leq \frac{\cos^{2n}(a)}{\sin(a)}\left(a + \frac{\pi}{2}\right)$

Déduisons-en que $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n(a) = 0$.

$\forall a \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right[$, $\left|\cos^{2n}(a)\right| < 1$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \cos^{2n}(a) = 0$. D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n(a) = 0$

3°) Pour tout entier naturel non nul n, on définit la fonction F_n sur $\left[-\frac{\pi}{2}; a\right]$ par :

$F_n(t) = \cos t + \frac{\cos^3 t}{3} + \frac{\cos^5 t}{5} + \cdots + \frac{\cos^{2n-1} t}{2n-1}$.

a- Prouvons que F_n est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2}; a\right]$ et que $\forall t \in \left[-\frac{\pi}{2}; a\right]$,

$F_n'(t) = \frac{-1 + \cos^{2n} t}{\sin t}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $t \mapsto \cos^{2n}(t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur $\left[-\frac{\pi}{2}; a\right]$. Il en résulte que la fonction F_n est la somme de n fonctions dérivables sur $\left[-\frac{\pi}{2}; a\right]$, donc F_n est dérivable sur $\forall t \in \left[-\frac{\pi}{2}; a\right]$.

$\forall t \in \left[-\frac{\pi}{2}; a\right]$,

$F_n'(t) = -\left[\sin(t) + \sin(t)\cos^2(t) + \cdots + \sin(t)\cos^{2n-2}(t)\right]$

$= -\sin(t)\left[1 + \cos^2(t) + \cos^4 + \cdots + \cos^{2n-2}(t)\right]$

$= -\sin(t) \times \frac{1 - \left[\cos^2(t)\right]^n}{1 - \cos^2(t)}$

$= -\sin(t) \times \frac{1 - \left[\cos^2(t)\right]^n}{\sin^2(t)}$ d'où

$F_n'(t) = \frac{-1 + \cos^{2n}(t)}{\sin(t)}$

Calculons $F_n\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\cos^n\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$. D'où $F_n\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$

b- En intégrant la relation précédente entre $-\frac{\pi}{2}$ et a, démontrons que

$F_n(a) = \frac{-g(a)}{C} - I_n(a)$.

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{a} F_n'(t) dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{a} \frac{-1 + \cos^{2n}(t)}{\sin(t)} dt$

Scanné avec CamScanner

$F_n(a) - F_n\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{a}\left(\frac{-1}{\sin(t)} + \frac{\cos^{2n}(t)}{\sin(t)}\right)dt$ or

$F_n\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Donc :

$$F_n(a) = -\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{a}\left(\frac{2}{\sin(t)}\right)dt + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{a}\left(\frac{\cos^{2n}(t)}{\sin(t)}\right)dt$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{a} g'(t)dt + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{a}\left(\frac{\cos^{2n}(t)}{\sin(t)}\right)dt$$

$$= -\frac{1}{2}\left(g(a) - g\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{a}\left(\frac{-\cos^{2n}(t)}{\sin(t)}\right)dt$$

$$F_n(a) = -\frac{g(a)}{2} - I_n$$

car $g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\cos -\frac{\pi}{2}\right) = f(0) = 0$. D'où

$$F_n(a) = \frac{-g(a)}{2} - I_n(a)$$

c- Déduisons-en $\lim_{n\to+\infty} F_n(a)$.

Comme $\lim_{n\to+\infty} I_n(a) = 0$ alors

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(a) = -\frac{g(a)}{C}$$

D/ Dans cette partie $x \in]0;1[$; $t \in]0;x[$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1°) • Vérifions que $\sum_{k=0}^{2n-1} x^k = \frac{1-x^{2n}}{1-x}$.

$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{2n-1}$ est la somme des 2n premiers termes de la suite géométrique de raison x et de premier terme 1.

On a alors : $\sum_{k=0}^{2n-1} x^k = \frac{1-x^{2n}}{1-x}$ (1)

• Vérifions que

$\sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k x^k = \frac{1+(-1)^{2n-1}x^{2n}}{1+x}$.

$\sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k x^k$ est la somme de $2n$ premiers termes de la suite géométrique de raison $(-x)$ et de premier terme 1.

On a alors :

$$\sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k x^k = \frac{1+(-x)^{2n}}{1+x} = \frac{1+(-1)^{2n-1}x^{2n}}{1+x} \quad (2)$$

2°) a- Démontrons que $1 < \frac{1}{1-t^2} < \frac{1}{1-x^2}$.

$t \in]0;x[\Leftrightarrow 0 < t < x$

$\Rightarrow 0 < t^2 < x^2$

$t \in]0;x[\Rightarrow -x^2 < 1-t^2 < 1$

$\Rightarrow 1 < \frac{1}{1-t^2} < \frac{1}{1-x^2}$ car

$1 - x^2 > 0$.

D'où, pour $0 \le t < x < 1$, on a :

$1 < \frac{1}{1-t^2} < \frac{1}{1-x^2}$.

Déduisons-en que :

$$0 < \frac{x^{2n+1}}{2n+1} < \int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t^2}dt < \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1-x^2)}.$$

$1 < \frac{1}{1-t^2} < \frac{1}{1-x^2} \Rightarrow t^{2n} < \frac{t^{2n}}{1-t^2} < \frac{t^{2n}}{1-x^2}$ car $t^{2n} > 0$

$\Rightarrow \int_0^x t^{2n}dt < \int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t^2}dt < \int_0^x \frac{t^{2n}}{1-x^2}dt$

Car $\frac{t^{2n}}{1-t^2}$ est prolongeable par continuité en zéro.

$\Rightarrow \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^x < \int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t^2}dt < \left[\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)(1-x^2)}\right]_0^x$

Et comme $x > 0$, alors $\boxed{0 < \frac{x^{2n+1}}{2n+1} < \int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t^2}dt < \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1-x^2)}}$

b- Utilise les relation (1) et (2) pour démontrons que :

$$-\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^{2n}}{2n} + \int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t}dt$$

Scanné avec CamScanner

$$(1)\Leftrightarrow \frac{1-x^{2n}}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{2n-1}$$

$$(1)\Leftrightarrow \frac{1}{1-x}-\frac{x^{2n}}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{2n-1}$$

$$(1)\Leftrightarrow \frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{2n-1}+\frac{x^{2n}}{1-x}$$

$$(1)\Leftrightarrow \int_0^x \frac{1}{1-t}dt=\int_0^x\left(1+t+t^2+t^3+\cdots+t^{2n-1}\right)dt+\int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t}dt$$

$$(1)\Leftrightarrow \left[-\ln(1-x)\right]_0^x=\left[t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}t^{2n}\right]_0^x+\int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t}dt$$

D'où, $-\ln(1-x)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^{2n}}{2n}+\int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t}dt$

• $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t^2}dt$

$$(2)\Leftrightarrow \frac{1+(-1)^{2n-1}x^{2n}}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+x^{2n-1}$$

$$(2)\Leftrightarrow \frac{1}{1+x}+\frac{(-1)^{2n-1}x^{2n}}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+x^{2n-1}$$

$$(2)\Leftrightarrow \frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+x^{2n-1}-\frac{(-1)^{2n-1}x^{2n}}{1+x}$$

$$(2)\Leftrightarrow \int_0^x \frac{1}{1+t}dt=\int_0^x\left(1-t+t^2-t^3+\cdots+t^{2n-1}\right)dt+(-1)^{2n}\int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t}dt$$

$$(2)\Leftrightarrow \left[\ln(1+t)\right]_0^x=\left[t-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{4}t^4+\cdots+\frac{1}{2n}t^{2n}\right]_0^x+(-1)^{2n}\int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t}dt$$

D'où, $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t^2}dt$

c- <u>Déduisons-en que</u> :

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t^2}dt$$

$$\ln(1+x)-\ln(1-x)=2x+2\frac{x^3}{3}+2\frac{x^5}{5}+\cdots+2\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t}dt+\int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t}dt$$

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2x+2\frac{x^3}{3}+2\frac{x^5}{5}+\cdots+2\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+2\int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t^2}dt$$

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t^2}dt$$

D'où, $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t^2}dt$

3°) Des questions D/ 1°) et 2°), trouve deux fonctions U et V sans intégrale telles que : $U(x)<f(x)<V(x)$.

On a : $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\frac{1}{2}f(x)=f(x)=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t^2}dt\right)$

D'après la question D/2°)

$$-\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1-x^2)}<-\int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t^2}dt<-\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$-2\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1-x^2)}<-2\int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t^2}dt<-2\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

donc :

$$-2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1-x^2)}\right)<f(x)<$$
$$-2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)$$

Ainsi :

$$U(x)=\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\frac{x^{2n-1}}{(2n+1)(1-x^2)}\right)\text{ et}$$

$$V(x)=-2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)$$

Scanné avec CamScanner

RÉPUBLIQUE TUNISIENNE **MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION** **EXAMEN DU BACCALAURÉAT** SESSION **2019**	**Session de contrôle**	
	Épreuve : **Mathématiques**	Section : **Mathématiques**
	Durée : **4h**	Coefficient de l'épreuve : **4**

Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4.

La page 4/4 est à rendre avec la copie

Exercice1 : (3 points)

Soient ABC un triangle rectangle en A et Δ la médiatrice du segment $[AB]$.

Répondre par « Vrai » ou « Faux » en justifiant la réponse.

1) $t_{\overrightarrow{BC}} \circ S_{\Delta} = t_{\overrightarrow{AC}} \circ S_{(AC)}$.
2) $S_{(AB)} \circ h_{(A,2)} \circ S_{(AC)} = h_{(A,-2)}$.
3) Si f est une isométrie fixant les points A et B alors $f^{-1} \circ S_{\Delta} \circ f$ est une symétrie glissante d'axe Δ.

Exercice 2 : (4,5 points)

Dans le plan P muni d'un repère orthonormé direct $R(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points I, C, D et K d'affixes respectives 1 + i, 1 + 2 i, 2i et 3i.

1) a) Placer les points I, C, D et K dans le repère R.
   b) Montrer qu'il existe une unique similitude indirecte g qui transforme I en D et D en K.
   c) Déterminer le rapport de g.
   d) Déterminer l'image du triangle IDO.
2) Soit M un point du plan et M' son image par g.
   On désigne par z et z' les affixes respectives de M et M'.
   a) Montrer que $z' = -\frac{1}{2}(1+i)\bar{z} + 1 + 2i$.
   b) Soit Ω le centre de g. Déterminer l'affixe de Ω.
   c) Vérifier que K est le milieu du segment $[\Omega I]$.
   d) Construire alors le centre Ω et l'axe Δ de g.
3) Soit h = gog.
   a) Montrer que h est une homothétie de rapport $\frac{1}{2}$.
   b) On considère la suite de points $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $A_0 = I$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+2} = h(A_n)$.
   Déterminer et construire les points A_2 et A_4.
   c) Soit $S_n = A_0A_2 + A_2A_4 + \ldots + A_{2n-2}A_{2n}$.
   Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 3 : (3 points)

Une entreprise fabrique des pièces électroniques pour une marque de voitures. Une étude statistique a prouvé que 6% des pièces fabriquées sont défectueuses.

L'unité de contrôle rejette 97% des pièces défectueuses et 2% des pièces non défectueuses.

On choisit une pièce au hasard et on la soumet à un test de contrôle.
On note D : " la pièce est défectueuse." et R : "la pièce est rejetée par l'unité de contrôle."

1) Traduire la situation par un arbre pondéré de probabilités.
2) a) Calculer la probabilité que la pièce soit défectueuse et ne soit pas rejetée par l'unité de contrôle.
   b) On dit qu'il ya erreur de contrôle lorsque une pièce défectueuse est acceptée ou une pièce non défectueuse est rejetée. Calculer la probabilité pour qu'il y ait une erreur de contrôle.
3) Montrer que la probabilité pour que la pièce soit acceptée est égale à 0,923.
4) Pour la commercialisation de ses pièces l'entreprise décide de faire passer chaque pièce à trois contrôles successifs mais indépendants :
   - Si la pièce est acceptée par les trois contrôles, elle sera commercialisée avec le logo de la marque de voiture.
   - Si elle est acceptée uniquement par deux contrôles, elle sera commercialisée sans le logo de la marque de voiture.
   - Si elle est acceptée uniquement par un contrôle ou rejetée, elle sera détruite.

   a) Montrer que la probabilité pour que la pièce soit commercialisée sans le logo de la marque de voiture est $3\times(0,923)^2\times(0,077)$.
   b) Déterminer la probabilité pour que la pièce soit détruite.

Exercice 4 : (4 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les plans P_1 et P_2 d'équations respectives P_1 : $3x - 2y - 2z = 1$ et P_2 : $4x - 11y + 2z = 0$.

1) a) Montrer que P_1 et P_2 se coupent suivant une droite Δ.
   b) Donner une représentation paramétrique de Δ.

Dans la suite de l'exercice, on se propose de déterminer les points de Δ à coordonnées entières.

2) On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $7x - 13y = 1$.
   Vérifier que (2, 1) est une solution de (E) et résoudre l'équation (E).
3) On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ le système (S) : $\begin{cases} 3x-2y-2z=1, \\ 4x-11y+2z=0. \end{cases}$
   a) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.
      Montrer que (x, y, z) est solution de (S) si et seulement si $\begin{cases} 7x-13y=1, \\ 2z = 11y - 4x. \end{cases}$
   b) En déduire l'ensemble des points de Δ à coordonnées entières.

Exercice 5 : (5,5 points)

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{\frac{-1}{2x^2}}$ si $x \neq 0$ et $g(0)=0$. On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1) a) Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$.

   b) Etudier la parité de g. Interpréter graphiquement le résultat.

2) a) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{g(x)}{x}$ et en déduire que g est dérivable en 0.

   b) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que $g'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$, pour tout $x \neq 0$.

   c) Dresser le tableau de variation de g.

   d) Montrer que g réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, 1[$.

   e) On désigne par g^{-1} la fonction réciproque de g, expliciter $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in [0, 1[$.

3) a) Montrer que $\mathscr{C}$ admet deux points d'inflexions A et B que l'on déterminera.
   (A désigne le point d'inflexion d'abscisse positive).

   b) En annexe, on a représenté dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ d'équations respectives $y = e^x$ et $y = x^2$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   Construire dans le même repère les points A et B et tracer la courbe $\mathscr{C}$

4) Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = g^2(x)$. Justifier que f est croissante sur $[0, +\infty[$.

5) Soit un entier $n \geq 2$. On pose $V(n) = \pi \int_0^n f(t)\,dt$.

   a) Interpréter graphiquement V(n).

   b) Montrer que $V(n) \geq \pi \int_{\sqrt{n}}^n f(t)\,dt$.

   c) En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} V(n) = +\infty$.

   d) Montrer que $V(n) \leq n\pi$.

   e) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{V(n)}{n}$.

Section : ..... N° d'inscription : ..... Série : .....

Nom et Prénom : .....

Date et lieu de naissance : .....

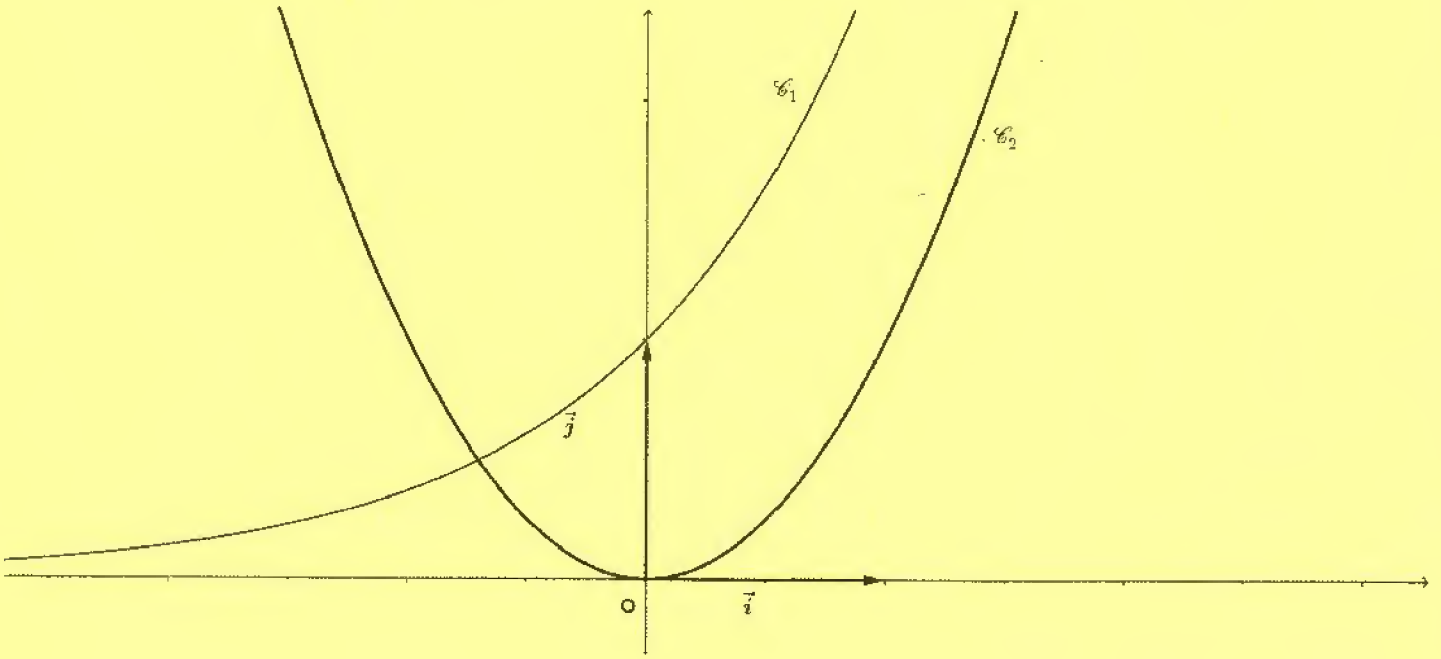
Signatures des surveillants

.....

.....

Épreuve : Mathématiques - Section : Mathématiques - Session de contrôle (2019)

Annexe à rendre avec la copie



CORRECTION : EPREUVE MATHEMATIQUES Session de contrôle 2019 BAC MATHS

Exercice N°1 :

1°) $\left(t_{\overrightarrow{AC}}\ o\ S_{(AC)}\right)^{-1}=\left(S_{(AC)}\right)^{-1}\ o\ \left(t_{\overrightarrow{AC}}\right)^{-1}=S_{(AC)}\ o\ t_{\overrightarrow{CA}}$ et $S_\Delta\circ S_{(AC)}=t_{\overrightarrow{AB}}$ car $\Delta\|(AC)$

$\Rightarrow\left(t_{\overrightarrow{BC}}\circ S_\Delta\right)\circ\left(t_{\overrightarrow{AC}}\circ S_{(AC)}\right)^{-1}=t_{\overrightarrow{BC}}\circ S_\Delta\circ S_{(AC)}\circ t_{\overrightarrow{CA}}=t_{\overrightarrow{BC}}\circ t_{\overrightarrow{AB}}\circ t_{\overrightarrow{CA}}=t_{\vec{0}}=idp$

$\Rightarrow t_{\overrightarrow{BC}}\circ S_\Delta=t_{\overrightarrow{AC}}\circ S_{(AC)}\ \Rightarrow$ **Vrai**

Ou bien : $t_{\overrightarrow{BC}}\circ S_\Delta=t_{\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}}\circ S_\Delta=t_{\overrightarrow{AC}}\circ t_{\overrightarrow{BA}}\circ S_\Delta=t_{\overrightarrow{AC}}\circ S_{(AC)}$ car $t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}}(\Delta)=(AC)$

2°) $S_{(AB)}\circ h_{(A,2)}\circ S_{(AC)}=S_{(AB)}\circ S_{(AC)}\circ h_{(A,2)}=r_{(A,\pi)}\circ h_{(A,2)}=h_{(A,-2)}\ \Rightarrow$ **Vrai**

3°) f est une isométrie qui fixe A et B donc $f=idp$ ou $f=S_{(AB)}$ d'où $f^{-1}=idp$ ou $f^{-1}=S_{(AB)}$

- $f=idp\Rightarrow f^{-1}\circ S_\Delta\circ f=S_\Delta$
- $f=S_{(AB)}\Rightarrow f^{-1}\circ S_\Delta\circ f=S_{(AB)}\circ\overbrace{S_\Delta\circ S_{(AB)}}^{(AB)\perp\Delta}=\overbrace{S_{(AB)}\circ S_{(AB)}}^{idp}\circ S_\Delta=S_\Delta$

  Donc $f^{-1}\circ S_\Delta\circ f=S_\Delta\Rightarrow$ **Faux**

Exercice N°2:

1°) a) figure 1

b) $\mathrm{I}\neq\mathrm{D}$ et $\mathrm{D}\neq\mathrm{K}$ donc il existe une similitude indirecte g qui transforme I en D et D en K

c) Soit k le rapport de g on a : $k=\dfrac{\mathrm{DK}}{\mathrm{ID}}=\dfrac{|z_\mathrm{K}-z_\mathrm{D}|}{|z_\mathrm{D}-z_\mathrm{I}|}=\dfrac{|3i-2i|}{|2i-1-i|}=\dfrac{|i|}{|-1+i|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

d) IDO est un triangle rectangle et isocèle en I, on sait que $\mathrm{g(I)=D}$ et $\mathrm{g(D)=K}$

$\Rightarrow\mathrm{g(IDO)=DKg(O)}$ est un triangle rectangle et isocèle indirecte en D d'où $\mathrm{g(IDO)=DKC}$

2°) a) $\mathrm{g(M)=M'}\Leftrightarrow z'=a\overline{z}+b$, on a $\mathrm{g(IDO)=DKC}$ donc $\mathrm{g(O)=C}\Rightarrow b=1+2i$

$g(\mathrm{D})=\mathrm{K}\Rightarrow 3i=a\times 2\overline{i}+b\Rightarrow 3i=-2ia+1+2i\Rightarrow -1+i=-2ia\Rightarrow a=\dfrac{-1+i}{-2i}=-\dfrac{1+i}{2}$

Donc $z'=-\dfrac{1}{2}(1+i)\overline{z}+1+2i$

b) $z_\Omega=\dfrac{a\times\overline{b}+b}{1-|a|^2}$

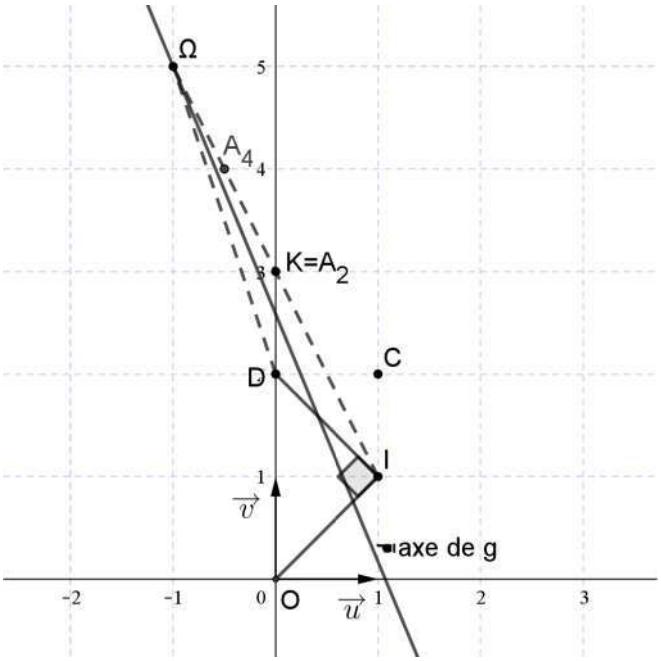
- $a\times b+b=-\dfrac{1}{2}(1+i)(1-2i)+1+2i$

  $=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{2}i$
- $1-|a|^2=1-\left|-\dfrac{1}{2}(1+i)\right|^2=\dfrac{1}{2}$

il en résulte que $z_\Omega=-1+5i$

$\Rightarrow\mathrm{K}$ est le milieu de segment $[\Omega\mathrm{I}]$

d) L'axe de g porte la bissectrice intérieur de l'angle $\mathrm{I\hat{\Omega}D}$



3°) a) $g=\overbrace{h'_{\left(\Omega,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}\circ S_\Delta}^{\text{forme réduite}}=S_\Delta\circ h'_{\left(\Omega,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}\Rightarrow g\circ g=h'_{\left(\Omega,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}\circ\overbrace{S_\Delta\circ S_\Delta}^{idp}\circ h'_{\left(\Omega,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}=h_{\left(\Omega,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$, ($h'$ homothétie)

b) $A_0=I\Rightarrow A_2=h(A_0)=h(I)\Rightarrow\overrightarrow{\Omega A_2}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega I}=A_2=K$

$A_4=h(A_2)=h(K)\Rightarrow\overrightarrow{\Omega A_4}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega K}\Rightarrow A_4$ est le milieu du segment $[\Omega K]$

c) $A_2=h(A_0)$ et $A_4=h(A_2)\Rightarrow\overrightarrow{A_2A_4}=\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0A_2}\Rightarrow A_2A_4=\frac{1}{2}A_0A_2$

$A_4=h(A_2)$ et $A_6=h(A_4)\Rightarrow\overrightarrow{A_4A_6}=\frac{1}{2}\overrightarrow{A_2A_4}\Rightarrow A_4A_6=\frac{1}{2}A_2A_4=\left(\frac{1}{2}\right)^2A_0A_2$

$A_6=h(A_4)$ et $A_8=h(A_6)\Rightarrow\overrightarrow{A_6A_8}=\frac{1}{2}\overrightarrow{A_4A_6}\Rightarrow A_6A_8=\frac{1}{2}A_4A_6=\left(\frac{1}{2}\right)^3A_0A_2$

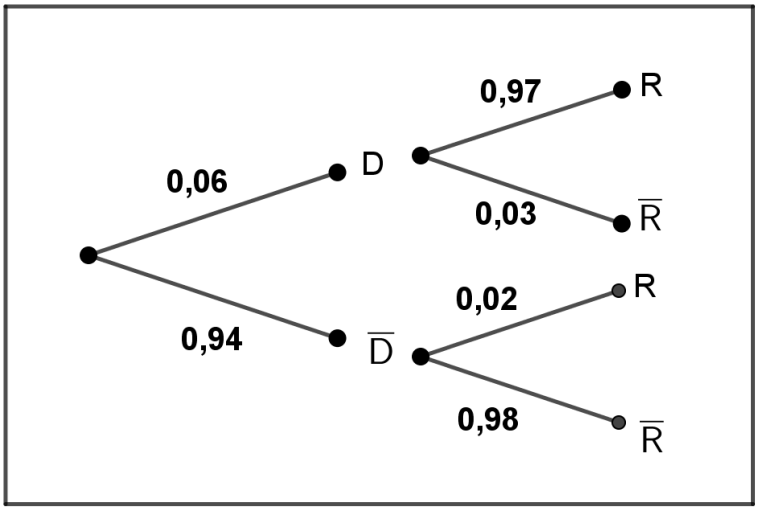
En général : $A_{2n-2}A_{2n}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}A_0A_2$

$S_n=A_0A_2+A_2A_4+A_4A_6+\ldots+A_{2n-2}A_{2n}=A_0A_2+\frac{1}{2}A_0A_2+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}A_0A_2$

$=\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)A_0A_2=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}IK\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=2\times IK=2\sqrt{5}$

Exercice N°3 :

1°)



2°) a) $p(D\cap\overline{R})=0,06\times0,03=0,0018$

b) $p(\overline{D}\cap R)+p(D\cap\overline{R})$

$=0,94\times0,02+0,0018=0,0206$

3°) $p(\overline{R})=p(\overline{D}\cap\overline{R})+p(D\cap\overline{R})$

$=0,94\times0,98+0,0018=0,923$

4°) Soit X l'alea numérique qui pour valeur le nombre de fois où la pièce est accepter au cours de trois contrôles

X suit une loi binomiale de paramètre $p=0,923$ et $n=3$

$p(X=k)=C_3^k(0,923)^k\times(0,077)^{3-k}$ avec $k\in\{0,1,2,3\}$

a) $p_1=p(X=2)=C_3^2(0,923)^2\times(0,077)^{3-2}=3(0,923)^2(0,077)$

b) $p_2=p(X=1)+p(X=0)=C_3^1(0,923)^1\times(0,077)^{3-1}+C_3^0\left((0,923)^0\times0,077\right)^{3-0}$

$=3(0,923)\times(0,077)^2+(0,077)^3=0,0169$

Exercice N°4 :

1°) a) $\overrightarrow{N_{P_1}}\begin{pmatrix}3\\-2\\-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{N_{P_2}}\begin{pmatrix}4\\-11\\2\end{pmatrix}$ et $\frac{3}{4}\neq\frac{-2}{-11}\Rightarrow$ P_1 et P_2 sont sécants

b) $M(x,y,z)\in\Delta\Leftrightarrow\begin{cases}3x-2y-2z=1\\4x-11y+2z=0\end{cases}\Leftrightarrow$ pour $x=t\in\mathbb{R}$ $\begin{cases}(1)+(2)\Rightarrow 7t-13y=1\\2z=-4t+11y\end{cases}$

2°) • $7\times2-13\times1=14-13=1$

• $7x-13y=7\times2-13\times1\Leftrightarrow 7(x-2)=13(y-1)$

$\Leftrightarrow 13$ divise $7(x-2)$ et $7\wedge13=1$ donc lemme de Gauss

13 divise $(x-2)$ Ainsi $x-2=13k$; $k\in\mathbb{Z}$ par suite $x=2+13k$; $k\in\mathbb{Z}$

$*$ $7.(13k)=13(y-1)\Leftrightarrow 7k=y-1\Leftrightarrow y=1+7k$; $k\in\mathbb{Z}$

Conclusion : $S_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}=\{(2+13k,1+7k)\ ;\ k\in\mathbb{Z}\}$

3°) a) $(S):\begin{cases}3x-2y-2z=1\\4x-11y+2z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(1)+(2)\Rightarrow 7x-13y=1\\(2)\Rightarrow 2z=-4x+11y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}7x-13y=1\\2z=-4x+11y\end{cases}$

Réciproquement : $\begin{cases}7x-13y=1\\2z=-4x+11y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}7x-13y=1\\2z+4x-11y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(1)-(2)\Rightarrow 3x-2y-2z=1\\2z+4x-11y=0\end{cases}$

(ou bien par équivalence)

3°) b) $\begin{cases}7x-13y=1\\2z=-4x+11y\end{cases}\Leftrightarrow x=2+13k$; $y=1+7k$ et $2z=3+25k$; $k=2p+1$, $p\in\mathbb{Z}$

Donc $M(15+26p,8+14p,14+25p)$; $p\in\mathbb{Z}^*$

Exercice N°5 :

1°) a) • $x\mapsto u(x)=-\frac{1}{2x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ et $u(\mathbb{R}^*)=]-\infty,0[$

$x\mapsto v(x)=e^x$ est continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]-\infty,0[$ d'où $g=v\circ u$ est continue sur $\mathbb{R}^*$

• $\lim\limits_{x\to0}\left(-\frac{1}{2x^2}\right)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}g(x)=0=g(0)$ donc est continue en 0

g est continue sur $\mathbb{R}^*$ et en 0 d'où elle est continue sur $\mathbb{R}$

b) $x\in\mathbb{R}$, $-x\in\mathbb{R}$ et $g(-x)=g(x)\Rightarrow g$ est paire

Donc la courbe ζ de g admet $(O,\vec{j})$ comme axe de symétrie

2°) a) On pose $X=-\frac{1}{x^2}\Rightarrow x^2=-\frac{1}{X}\Rightarrow x=\sqrt{-\frac{1}{X}}$, $X\to-\infty$ lorsque $x\to0^+$

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{g(x)}{x}\right)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{e^{-\frac{1}{2x^2}}}{x}\right)=\lim_{X\to-\infty}\left(\frac{e^{\frac{X}{2}}}{\sqrt{-\frac{1}{X}}}\right)=\lim_{X\to-\infty}\left(\sqrt{-Xe^X}\right)=0\Rightarrow g'_d(0)=0$$

ζ admet une demi-tangente horizontale au point O par raison de symétrie (g est paire)

$g'(0)=0$

D'où g est dérivable en 0

b) • $x \mapsto u(x) = -\dfrac{1}{2x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $u(\mathbb{R}^*) =]-\infty, 0[$

$x \mapsto v(x) = e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]-\infty, 0[$ d'où g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$

• pour tout $x \neq 0$ on a : $g'(x) = \left(-\dfrac{1}{2x^2}\right)' e^{-\frac{1}{2x^2}} = \dfrac{1}{x^3} e^{-\frac{1}{2x^2}} = \dfrac{g(x)}{x^3}$

c) g est paire $\Rightarrow$ on étudie g sur $[0, +\infty[$, $g'(x) > 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\dfrac{1}{2x^2}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} e^x = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1$

x	0	$+\infty$
g'(x)	+	
g(x)	0 ↗	1

d) g est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$

et $f([0, +\infty[) = \left[f(0), \lim\limits_{+\infty} f\right[= [0, 1[$

$\Rightarrow g$ réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, 1[$

e) $y \in]0, +\infty[$, $x \in]0, 1[$, $g^{-1}(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x \Leftrightarrow e^{-\frac{1}{2y^2}} = x \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2y^2} = \ln x$

$\Leftrightarrow -\dfrac{1}{2\ln x} = y^2$ or $g^{-1}(x) = y \in]0, +\infty[$ et $g(0) = 0 \Leftrightarrow g^{-1}(0) = 0$

D'où $\forall x \in [0, 1[: g^{-1}(x) = \sqrt{-\dfrac{1}{2\ln x}}$

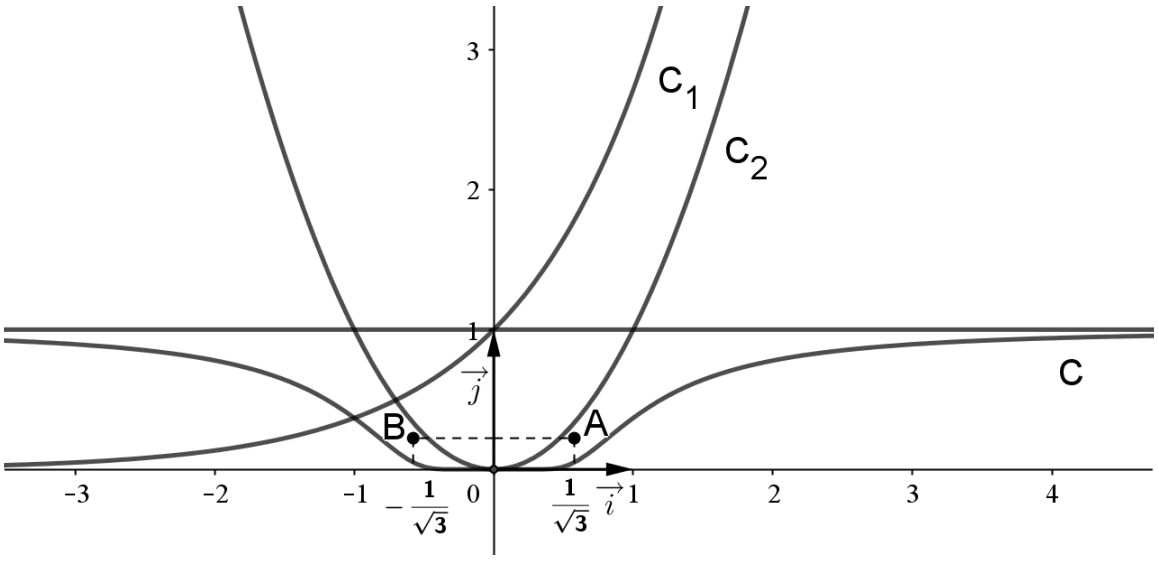
3°) a) Pour tout $x \neq 0$ on a : $g''(x) = \dfrac{x^3 g'(x) - 3x^2 g(x)}{x^6} = \dfrac{x^3 \dfrac{g(x)}{x^3} - 3x^2 g(x)}{x^6} = \dfrac{g(x)(1 - 3x^2)}{x^6}$

Le signe de $g''(x)$ est celui de $(1 - 3x^2)$, on a $1 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ou $x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$g''(x)$ s'annule deux fois et change de signe donc ζ admet deux points d'inflexions $A\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, e^{-\frac{3}{2}}\right)$ et $B\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, e^{-\frac{3}{2}}\right)$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$+\infty$
signe de g''(x)	−	0	+	0	−

b)



4°) $\forall x \in [0,+\infty[\ , \mathrm{f}(x) = g^2(x) \Rightarrow \mathrm{f}'(x) = 2g'(x)g(x) \geq 0 \Rightarrow \mathrm{f}$ est croissante sur $[0,+\infty[$

5°) a) $V(n) = \pi\int_0^n \mathrm{f}(t)\,dt = \pi\int_0^n g^2(t)\,dt \Rightarrow$ comme g est continue et positive sur $[0,\pi]$

Alors : $V(n)$ est le volume(en unité de volume) engendré par rotation de la courbe ζ au tour de l'axe des abscisses

b) $\pi\int_{\sqrt{n}}^n \mathrm{f}(t)\,dt - \pi\int_{\sqrt{n}}^n \mathrm{f}(t)\,dt = \pi\left(\int_0^n \mathrm{f}(t)\,dt + \int_n^{\sqrt{n}} \mathrm{f}(t)\,dt\right) = \pi\int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{f}(t)\,dt \geq 0$

$\Rightarrow V(n) \geq \pi\int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{f}(t)\,dt$

c) • f est croissante sur $[0,+\infty[$; $t \geq \sqrt{n} \Rightarrow \mathrm{f}(t) \geq \mathrm{f}\left(\sqrt{n}\right) \Rightarrow \pi\int_{\sqrt{n}}^n \mathrm{f}(t)\,dt \geq \pi\ \mathrm{f}\left(\sqrt{n}\right)\int_{\sqrt{n}}^n 1\,dt$

$\Rightarrow V(n) \geq \pi\ \mathrm{f}\left(\sqrt{n}\right)\left(n-\sqrt{n}\right) \Rightarrow V(n) \geq \pi\sqrt{n}\ \mathrm{f}\left(\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n}-1\right)$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f\left(\sqrt{n}\right) = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \pi\sqrt{n}\ \mathrm{f}\left(\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n}-1\right) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} V(n) = +\infty$

d) Pour tout réel t de $[0,+\infty[\ , g(t) \leq 1 \Rightarrow \mathrm{f}(t) \leq 1 \Rightarrow \pi\int_{\sqrt{n}}^n \mathrm{f}(t)\,dt \leq \pi\int_{\sqrt{n}}^n 1\,dt$

$\Rightarrow V(n) \leq \pi\left(n-\sqrt{n}\right) \leq \pi n$

e) $\pi \mathrm{f}\left(\sqrt{n}\right)\left(n-\sqrt{n}\right) \leq V(n) \leq \pi n \Leftrightarrow \pi\ \mathrm{f}\left(\sqrt{n}\right)\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \leq \dfrac{V(n)}{n} \leq \pi$

$$\lim_{n\to+\infty} \pi\overbrace{\mathrm{f}\left(\sqrt{n}\right)}^{1}\left(1-\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}}_{0}\right) = \pi \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{V(n)}{n} = \pi$$

الشبكة التربوية التونسية
www.edunet.tn

REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION	SESSION DE CONTROLE	EXAMEN DU BACCALAURÉAT SESSION DE JUIN 2009
SECTION : MATHEMATIQUES		
EPREUVE : MATHEMATIQUES	DURÉE : 4 Heures	COEFFICIENT : 4

Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4. La page 4/4est à rendre avec la copie.

Exercice 1 (3 points)

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse correcte vaut 0,75 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse vaut 0 point.

1) Soit z un nombre complexe de module 2.

Alors le conjugué $\overline{z}$ de z est égal à

a) $\frac{\sqrt{2}}{z}$

b) $\frac{2}{z}$

c) $\frac{4}{z}$

2) Dans Le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives 1 et i . L'ensemble des points M d'affixe z tel que $\frac{z-i}{z-1}$ est réel est

a) la droite (AB) privée de A

b) le segment [AB] privé de A

c) le cercle de diamètre [AB] privé de A

3) Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $(-\ln 2)$. Alors la suite (v_n) définie par $v_n = e^{u_n}$ est

a) une suite arithmétique de raison (– 2)

b) une suite géométrique de raison (– 2)

c) une suite géométrique de raison $(\frac{1}{2})$

4) La limite de $x \ln(1+\frac{2}{x})$ quand x tend vers $+\infty$ est égale à

a) 0

b) 1

c) 2

Exercice 2 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = x + (x-1)e^{-x}$ et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (unité graphique 2 cm)

1) a) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b) Montrer que la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.

c) Déterminer la position relative de $\mathscr{C}$ et Δ.

2) On donne ci-dessous le tableau de variation de la fonction f.

x	0		$+\infty$
f'(x)	3	+	
f(x)	-1	↗	$+\infty$

a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet, dans $\mathbb{R}_+$, une seule solution α et vérifier que $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.

b) Tracer la droite Δ et la courbe $\mathscr{C}$.
(On précisera la demi tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 et on prendra $\alpha \simeq 0{,}4$).

3) On désigne par (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \int_\alpha^1 [f(x)]^n \, dx$.

a) Calculer u_1. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.

c) En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 3 (4 points)

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \quad ; \quad u_{n+1} = \dfrac{2u_n + v_n}{3} \\ v_0 = 1 \quad ; \quad v_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2v_n}{5} \end{cases}$$

1) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $u_n \leqslant v_n$.

2) Montrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.

3) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et qu'elles admettent la même limite.

4) Soit la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = 9u_n + 5v_n$

a) Montrer que (w_n) est une suite constante.

b) En déduire la limite commune des suites (u_n) et (v_n).

Exercice 4 (5 points)

Dans l'annexe ci-jointe (page 4/4), ABCD est un rectangle de centre O et tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$.

Le point E désigne le symétrique du point A par rapport à D.

Soit S la similitude directe de centre C, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

1) a) Justifier que S(A) = B

b) Montrer que le triangle ACE est équilatéral et en déduire que S(E) = O.

2) Soit I un point du segment [EO], distinct des points O et E et soit (Γ) le cercle de centre I et passant par A.

Les droites (AD) et (AB) recoupent le cercle (Γ) respectivement en M et P.

a) Tracer (Γ) et placer les points M et P.

b) Justifier que le point C appartient à (Γ).

3) Soit N le projeté orthogonal du point C sur la droite (MP).

a) Montrer que $(\overrightarrow{MP},\overrightarrow{MC}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$.

b) En déduire que S(M) = N.

4) Montrer que les points B, D et N sont alignés.

Exercice 5 (3 points)

On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : $3x + 4y = -8$.

1) a) Vérifier que (0, – 2) est une solution de (E).

b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E).

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la droite Δ dont une équation est : $3x + 4y + 8 = 0$ et on désigne par A le point de Δ d'abscisse 0.

a) Montrer que si M est un point de Δ à coordonnées entières alors AM est un multiple de 5.

b) Soit N un point de Δ de coordonnées (x, y).

Vérifier que $AN = \frac{5}{4}|x|$.

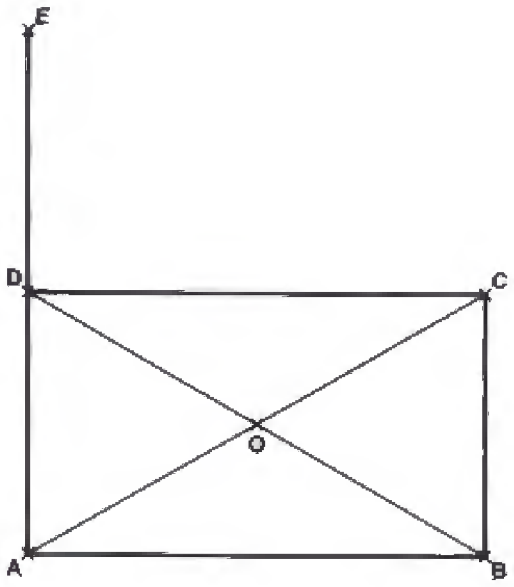
c) En déduire que si AN est un multiple de 5 alors x et y sont des entiers.

Section : ..... N° d'inscription : ..... Série : .....
Nom et prénom : .....
Date et lieu de naissance : .....

Signature des Surveillants
.....
.....

Annexe à rendre avec la copie

Exercice 4



Epreuve de Math Section Math Session de contrôle 2009

Exercice n°1

De quoi s'agit-il ?

Nombres complexes-suites –fonction logarithme népérien-limites

CORRIGÉ

1) Réponse - c - 2) Réponse - a - 3) Réponse - c - 4) Réponse - c -

Exercice n°2

De quoi s'agit-il ?

Fonction exponentielle - suites – calcul intégral.

CORRIGÉ

1) a- En posant $t=-x$ on aura $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{t\to-\infty}\left(\underbrace{-t}_{+\infty}-\underbrace{te^t}_{0}-\underbrace{e^t}_{0}\right)=+\infty$.

b- En posant $t=-x$ on aura $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{t\to-\infty}\left(-\underbrace{te^t}_{0}-\underbrace{e^t}_{0}\right)=0$

Donc la droite Δ d'équation $y=x$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$ au voisinage de $+\infty$.

c- Soit $x\in[0,+\infty[$; $f(x)-x=(x-1)e^{-x}$

- sur $[0,1]$ la courbe $(\mathscr{C})$ est située au dessous de Δ .
- sur $[1,+\infty[$ la courbe $(\mathscr{C})$ est située au dessus de Δ .

2) a- f est définie et strictement croissante sur $[0,+\infty[$ donc elle réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $f\left([0,+\infty[\right)$

de plus f est continue sur $[0,+\infty[$ donc $f\left([0,+\infty[\right)=[-1,+\infty[$.

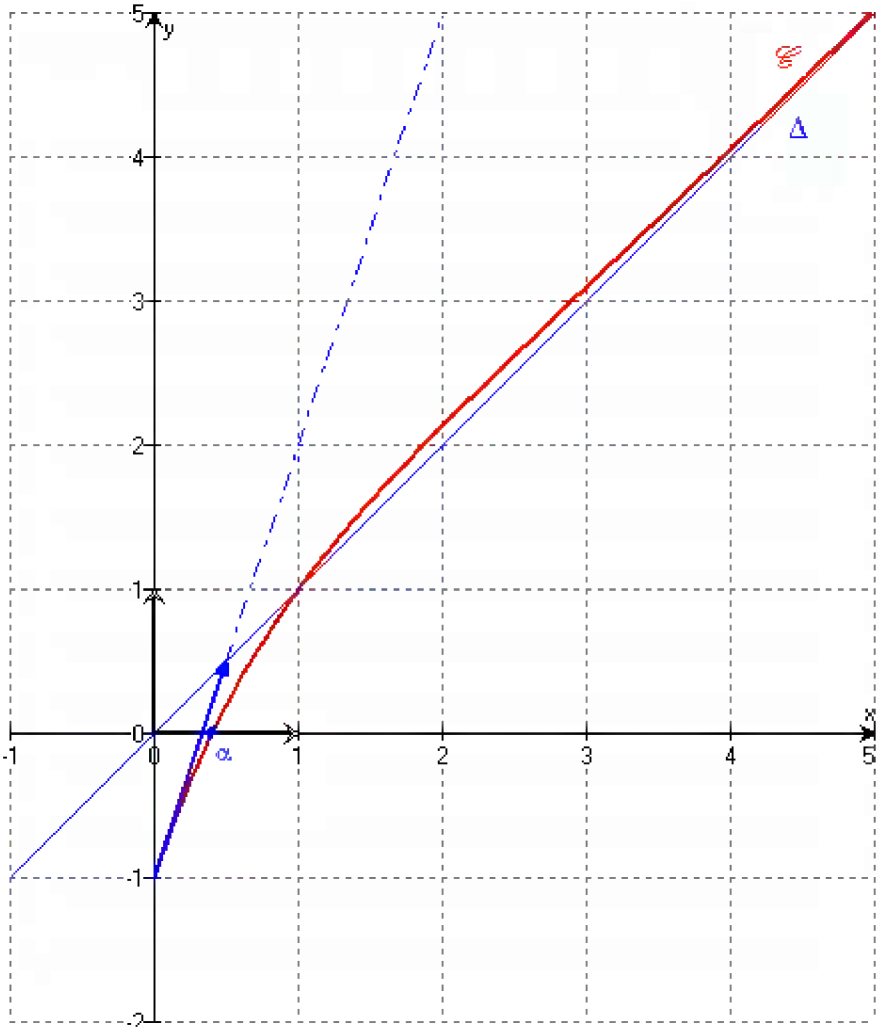
Comme $0\in[-1,+\infty[$ donc l'équation $f(x)=0$ admet dans $[0,+\infty[$ une solution unique α .

Puisque $f(0)=-1<0$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)>0$ donc $0<\alpha<\frac{1}{2}$.

Conclusion : L'équation $f(x)=0$ admet dans $[0,+\infty[$ une solution unique $\alpha\in\left]0,\frac{1}{2}\right[$.

b- D'après le tableau de variation de la fonction f on a : $f'(0)=3$

donc la demi tangente à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0 est de coefficient directeur 3.



3) a- $u_1=\int_\alpha^1 f(x)\,dx=\int_\alpha^1\left(x+(x-1)e^{-x}\right)dx=\int_\alpha^1 x\,dx+\int_\alpha^1(x-1)e^{-x}dx$

Or $\int_\alpha^1 x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_\alpha^1=\frac{1}{2}(1-\alpha^2)$

$\int_\alpha^1(x-1)e^{-x}dx$ on intègre par parties on pose : $\begin{cases}u(x)=x-1 & \to & u'(x)=1\\ v'(x)=e^{-x} & \to & v(x)=-e^{-x}\end{cases}$

Par suite $\int_\alpha^1(x-1)e^{-x}dx=\left[-(x-1)e^{-x}\right]_\alpha^1+\int_\alpha^1 e^{-x}dx=\left[-xe^{-x}\right]_\alpha^1=-\frac{1}{e}+\alpha e^{-\alpha}$

donc $u_1=\int_\alpha^1 f(x)\,dx=\frac{1}{2}(1-\alpha^2)-\frac{1}{e}+\alpha e^{-\alpha}$.

Interprétation : $f(x)\geq 0$ pour tout $x\in[\alpha,1]$ donc u_1 représente l'aire, en unité d'aire, du domaine du plan limité par la courbe $(\mathscr{C})$ et les droites d'équations : $y=0$, $x=1$ et $x=\alpha$

b- sur $[0,1]$ la courbe $(\mathscr{C})$ est situé au dessous de Δ donc pour tout réel $x \in [0,1]$, $f(x) \le x$

de plus pour tout $x \in [\alpha, +\infty[$, $f(x) \ge 0$ et $\alpha < 1$ ainsi pour tout $x \in [\alpha, 1]$ on a : $0 \le f(x) \le x$

par suite $0 \le \int_\alpha^1 [f(x)]^n dx \le \int_\alpha^1 x^n dx$

d'où $0 \le u_n \le \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_\alpha^1$ or $\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_\alpha^1 = \frac{1}{n+1} - \frac{\alpha^{n+1}}{n+1} \le \frac{1}{n+1}$ donc $0 \le u_n \le \frac{1}{n+1}$

c- Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ et $0 \le u_n \le \frac{1}{n+1}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice n°3

De quoi s'agit-il ?

Suites adjacentes

CORRIGÉ

1) Montrons, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \le v_n$.

- vérification : pour $n = 1$ l'inégalité $u_1 \le v_1$ est vraie (car $u_1 = \frac{1}{3}$ et $v_1 = \frac{2}{5}$)

- soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $u_n \le v_n$ et montrons que $u_{n+1} \le v_{n+1}$

  Comme $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} - \frac{3u_n + 2v_n}{5} = \frac{u_n - v_n}{15} \le 0$ car $u_n - v_n \le 0$ donc $u_{n+1} \le v_{n+1}$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \le v_n$.

2) - $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n + v_n}{3} - u_n = -\frac{u_n - v_n}{3} \ge 0$ car $u_n - v_n \le 0$ donc (u_n) est une suite croissante.

- $v_{n+1} - v_n = \frac{3u_n + 2v_n}{5} - v_n = \frac{3(u_n - v_n)}{5} \le 0$ car $u_n - v_n \le 0$ donc (v_n) est une suite décroissante.

3)<u>Première méthode</u>

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \le v_n$ et (v_n) est une suite décroissante donc (v_n) est majoré par $v_0 = 1$

  Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \le 1$.

  Ainsi (u_n) est une suite croissante et majoré par 1 donc converge.

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \ge u_n$ et (u_n) est une suite croissante donc (u_n) est minoré par $u_0 = 0$

  Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \ge 0$.

Ainsi (v_n) est une suite décroissante et minoré par 0 donc converge.

□ On pose $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n)=l'$

$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=l$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1})=l$

Comme $u_{n+1}=\dfrac{2u_n+v_n}{3}$ donc les opérations sur les limites des suites donnent $l=\dfrac{2l+l'}{3}$

D'où $l=l'$

<u>Deuxième méthode</u>

D'après ce qui précède on a : $u_{n+1}-v_{n+1}=\dfrac{1}{15}(u_n-v_n)$

Montrons par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n-v_n=-\left(\frac{1}{15}\right)^n$

vérification : l'égalité $u_0-v_0=-\left(\frac{1}{15}\right)^0$ est vraie (car $u_0=0$, $v_0=1$ et $-\left(\frac{1}{15}\right)^0=-1$)

supposons que $u_n-v_n=-\left(\frac{1}{15}\right)^n$

montrons que $u_{n+1}-v_{n+1}=-\left(\frac{1}{15}\right)^{n+1}$

on a : $u_{n+1}-v_{n+1}=\dfrac{1}{15}\left[-\left(\frac{1}{15}\right)^n\right]=-\left(\frac{1}{15}\right)^{n+1}$

donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n-v_n=-\left(\frac{1}{15}\right)^n$

Vu que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[-\left(\frac{1}{15}\right)^n\right]=0$ car $\left(\frac{1}{15}\right)\in]-1,1[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=0$

Compte tenu :

□ pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\le v_n$.

□ (u_n) est une suite croissante et (v_n) est une suite décroissante.

□ $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=0$

Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et par suite elles convergent vers la même limite

4) a- pour tout $n\in\mathbb{N}$, $w_{n+1}=9u_{n+1}+5v_{n+1}=3(2u_n+v_n)+(3u_n+2v_n)=9u_n+5v_n=w_n$

Donc (w_n) est une suite constante.

b- (w_n) est une suite constante donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, $w_n=w_0=9u_0+5v_0=5$.

Par suite pour tout $n \in \square$, $9u_n + 5v_n = 5$.

Donc si L est la limite commune des suites (u_n) et (v_n) on aura $9L + 5L = 5$

Ce qui donne $L = \frac{5}{14}$ ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}(v_n) = \frac{5}{14}$.

Exercice n°4

De quoi s'agit-il ?

Similitudes-angles inscrits –symétrie orthogonale.

CORRIGÉ

1) a- $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) \equiv (\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})\ [2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{2} - (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\ [2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$ donc $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

De plus, comme ABC est un triangle rectangle en B donc $\frac{CB}{CA} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

D'où $\begin{cases} \frac{CB}{CA} = \frac{1}{2} \\ (\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi] \end{cases}$ ce qui justifie que $S(A) = B$

b- □ D'une part $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE}) \equiv (\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})\ [2\pi]$

$\equiv (\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})\ [2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

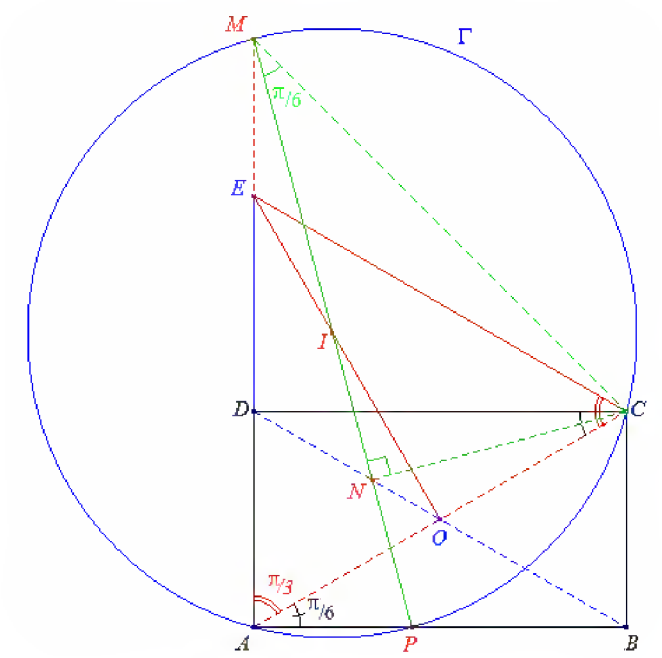
D'autre part $\left.\begin{matrix} E = S_{(DC)}(A) \\ D = S_{(DC)}(D) \\ C = S_{(DC)}(C) \end{matrix}\right\}$ donc $(\overrightarrow{EC},\overrightarrow{ED}) \equiv -(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})\ [2\pi]$

Ainsi $\begin{cases} (\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE}) \equiv \dfrac{\pi}{3} \ [2\pi] \\ (\overrightarrow{EC},\overrightarrow{EA}) \equiv (\overrightarrow{EC},\overrightarrow{ED}) \ [2\pi] \\ \qquad\qquad \equiv -\dfrac{\pi}{3} \ [2\pi] \end{cases}$ ce qui prouve que le triangle ACE est équilatéral.

□ On a le triangle ACE est équilatéral et $O = A * C$ donc $\begin{cases} \dfrac{CO}{CE} = \sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2} \\ (\overrightarrow{CE},\overrightarrow{CO}) \equiv \dfrac{\pi}{3} \ [2\pi] \end{cases}$

Conclusion : $S(E) = O$.

2) a-



b- ACE est un triangle équilatéral et $O = A * C$ donc la droite (OE) est la médiatrice du segment $[AC]$ et puisque $I \in [OE] \setminus \{O, E\}$ donc $IA = IC$ or (Γ) est le cercle de centre I et le rayon IA donc $C \in (\Gamma)$.

3) a- $(\overrightarrow{MP},\overrightarrow{MC})$ et $(\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AC})$ sont deux angles inscrits dans (Γ) interceptant le même arc orienté $\overset{\frown}{PC}$

Donc $(\overrightarrow{MP},\overrightarrow{MC}) \equiv (\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AC}) \ [2\pi]$ or $(\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AC}) \equiv \dfrac{\pi}{6} \ [2\pi]$ donc $(\overrightarrow{MP},\overrightarrow{MC}) \equiv \dfrac{\pi}{6} \ [2\pi]$.

b- Comme $\begin{cases} (\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MC}) \equiv \dfrac{\pi}{6} \ [2\pi] \\ (\overrightarrow{NC},\overrightarrow{NM}) \equiv \dfrac{\pi}{2} \ [2\pi] \end{cases}$ donc $(\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CN}) \equiv \dfrac{\pi}{3} \ [2\pi]$ (I)

de plus on a $\dfrac{CN}{CM} = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$ (II)

d'après (I) et (II) on en déduit $S(M) = N$

4) $M \in (AD)$ et $E \in (AD)$ donc A , E et M sont alignés de plus $\left.\begin{matrix} S(A) = B \\ S(E) = O \\ S(M) = N \end{matrix}\right\}$

et comme toute similitude conserve l'alignement donc B , O et N sont alignés.

D'où $N \in (OB)$ et puisque $D \in (OB)$ on en déduit alors que B , D et N sont alignés.

Exercice n°5

De quoi s'agit-il ?

Résolution dans Z^2 d'une équation du type $ax + by = c$ – détermination des points d'une droite à coordonnées entières

CORRIGÉ

1) a- $3 \times 0 + 4 \times (-2) = -8$ donc $(0,-2)$ est solution de (E).

b- Soit $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ solution de (E).

On a : $\left.\begin{matrix} 3 \times x + 4 \times y = -8 \\ 3 \times 0 + 4 \times (-2) = -8 \end{matrix}\right\}$ donc $3 \times x = -4 \times (y + 2)$

comme $\left.\begin{matrix} 3 / -4 \times (y+2) \\ 3 \wedge (-4) = 1 \end{matrix}\right\}$ alors d'après Gauss $3 / (y+2)$ ainsi $y = 3k - 2$ où $k \in \mathbb{Z}$

par suite $3 \times x = -4 \times (3k)$ d'où $x = -4k$ ainsi $(x, y) = (-4k\ ,\ 3k - 2)$ où $k \in \mathbb{Z}$

réciproquement : soit $(x, y) = (-4k\ ,\ 3k - 2)$ où $k \in \mathbb{Z}$

on a : $3 \times (-4k) + 4 \times (3k - 2) = -8$ donc (x, y) est solution de (E).

Conclusion : $S_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} = \{\ (-4k\ ,\ 3k - 2)\ ,\ k \in \mathbb{Z}\ \}$

2) a- $\begin{cases} M(x, y) \in \Delta \\ (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \end{cases}$ signifie $\begin{cases} 3x + 4y = -8 \\ (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \end{cases}$ signifie $(x, y) = \{\ (-4k\ ,\ 3k - 2)\ ,\ k \in \mathbb{Z}\ \}$

Donc $AM = \sqrt{(-4k)^2 + (3k)^2} = 5 \times |k|$ où $k \in \mathbb{Z}$

Par suite AM est un multiple de 5.

b- $N(x,y) \in \Delta$ signifie $3x+4y=-8$ signifie $y=-\dfrac{8+3x}{4}$

Donc $AN^2 = x^2 + \left(-\dfrac{3x}{4}\right)^2 = \dfrac{25}{16}x^2$ par suite $AN = \dfrac{5}{4}|x|$.

c- Si AN est un multiple de 5 alors il s'écrit sous la forme $AN = 5|k|$ où $k \in \mathbb{Z}$

Donc $\dfrac{5}{4}|x| = 5|k|$ où $k \in \mathbb{Z}$ ainsi $|x| = 4|k|$ où $k \in \mathbb{Z}$ d'où x est un entier

Comme $y = -\dfrac{8+3x}{4} = -2 - \dfrac{3x}{4}$ donc y = -2+3k où $k \in \mathbb{Z}$ d'où y est un entier

Conclusion : Si AN est un multiple de 5 alors x et y sont des entiers.

REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION EXAMEN DU BACCALAUREAT SESSION DE JUIN 2008		NOUVEAU REGIME SESSION DE CONTROLE	
SECTION :	MATHEMATIQUES		
EPREUVE :	MATHEMATIQUES	DUREE : 4 h	COEFFICIENT : 4

Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4. La page 4/4 est à rendre avec la copie.

Exercice n°1 : (3 points)

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse correcte vaut 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse vaut 0 point.

1) Soit $I = \int_1^e \frac{(\ln x)^3}{x}\,dx$.

Alors I est égale à

a) 3 . b) $\frac{1}{4}$. c) $-\frac{1}{4}$.

2) Soit $\ell = \lim\limits_{x \to 1^-} \left[\ln(1-x) + \frac{1}{1-x} \right]$, alors

a) $\ell = 1$. b) $\ell = 0$. c) $\ell = +\infty$.

3) Soit n un entier non nul tel que $(5n) \wedge (3^2 \times 5^3 \times 7) = 35$.

Alors

a) $n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3)$. b) $n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 5)$. c) $n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 7)$.

Exercice 2 : (4 points)

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation

$$(E) : z^3 + (5+i)z^2 + (10+2i)z + 8 = 0 .$$

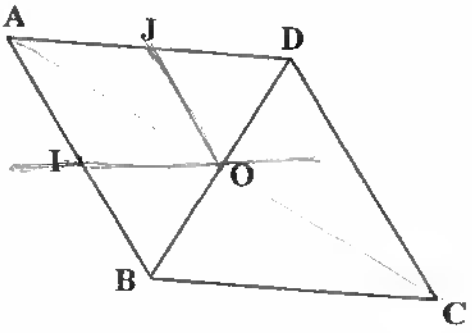
1) a) Montrer que l'équation (E) admet une solution réelle que l'on déterminera.
b) Résoudre l'équation (E).

2) Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère l'application f qui à tout point M d'affixe z associe le point M'd'affixe z' tel que $z' = (1+i)z$.
a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.
b) Soit M un point du plan distinct de O et soit M' son image par f.
Montrer que le triangle OMM'est rectangle isocèle et en déduire un procédé de construction du point M'.

3) On considère les points A_n définis par :
A_0 le point d'affixe (-1+i) et pour tout entier naturel n , $A_{n+1} = f(A_n)$.
a) Placer les points A_0, A_1 , A_2 , A_3 et A_4.
b) Pour quelles valeurs de n, les points O, A_0 et A_n sont-ils alignés ?

Exercice 3 : (4 points)

Le plan est orienté dans le sens direct. Dans la figure ci-contre , ABCD est un losange de centre O , I est le milieu du segment [AB] , J est le milieu du segment [AD] et $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.



1) a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement f qui transforme A en B et B en D.
b) caractériser f .
c) Déterminer l'image du triangle ABD par f .

2) Soit s un antidéplacement qui transforme l'ensemble $\{A,B,D\}$ en l'ensemble $\{B,C,D\}$ et tel que $s(A) = C$.
a) Déterminer l'image du segment [BD] par s .
b) En déduire que s est la symétrie orthogonale d'axe (BD) .

3) Soit g un antidéplacement qui transforme l'ensemble $\{A,B,D\}$ en l'ensemble $\{B,C,D\}$ et tel que $g(A) = D$.
a) Montrer que $g(D) = B$.
b) Caractériser alors g .

Exercice 4 : (5 points)

1) Soit f la fonction définie sur [-2, 2] par $\begin{cases} f(x) = (x+2)\ln(x+2) & \text{si} \quad x \neq -2 \\ f(-2) = 0. \end{cases}$

et ($\mathscr{C}$) sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a) Montrer que f est continue à droite en (-2).
b) Etudier la dérivabilité de f à droite en (-2).
c) Donner le tableau de variation de f.

2) Soit g la fonction définie sur [-2, 2] par $g(x) = f(x) - x\sqrt{4-x^2}$

et ($\mathscr{C}'$) sa courbe représentative dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a) Déterminer la position relative des courbes ($\mathscr{C}$) et ($\mathscr{C}'$).
b) Dans l'annexe ci-jointe (page 4), on a tracé la courbe ($\mathscr{C}'$) de g.
Tracer la courbe ($\mathscr{C}$) dans le même repère.

3) Soit α un réel non nul appartenant à [-2, 2].
On désigne par $\mathscr{A}_\alpha$ l'aire de la partie du plan limitée par les courbes ($\mathscr{C}$) et ($\mathscr{C}'$) et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \alpha$.

a) Montrer que $\mathscr{A}_\alpha = \int_0^\alpha x\sqrt{4-x^2}\,dx$. (On distinguera les deux cas $\alpha > 0$ et $\alpha < 0$).
b) Calculer $\mathscr{A}_\alpha$.
c) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par les deux courbes ($\mathscr{C}$) et ($\mathscr{C}'$).

Exercice 5 : (4 points)

Pour tout entier naturel non nul n, on considère la fonction f_n définie sur $[0,1]$ par $f_n(x) = e^{-x} - x^{2n+1}$

1) Etudier les variations de f_n.
2) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution u_n et que $u_n \in]0,1[$.

   On définit ainsi sur $\mathbb{N}^*$, une suite (u_n).
3) a) Soit n un entier naturel non nul et x un réel de l'intervalle $]0,1[$. Comparer les réels $f_{n+1}(x)$ et $f_n(x)$.

   $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$.

   b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(u_{n+1}) < 0$ $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$

   c) Montrer que la suite (u_n) est croissante et en déduire qu'elle est convergente.
4) a) Montrer que pour $n \geq 1$, $\ln(u_n) = -\frac{u_n}{2n+1}$.

   b) Calculer la limite de la suite u_n.

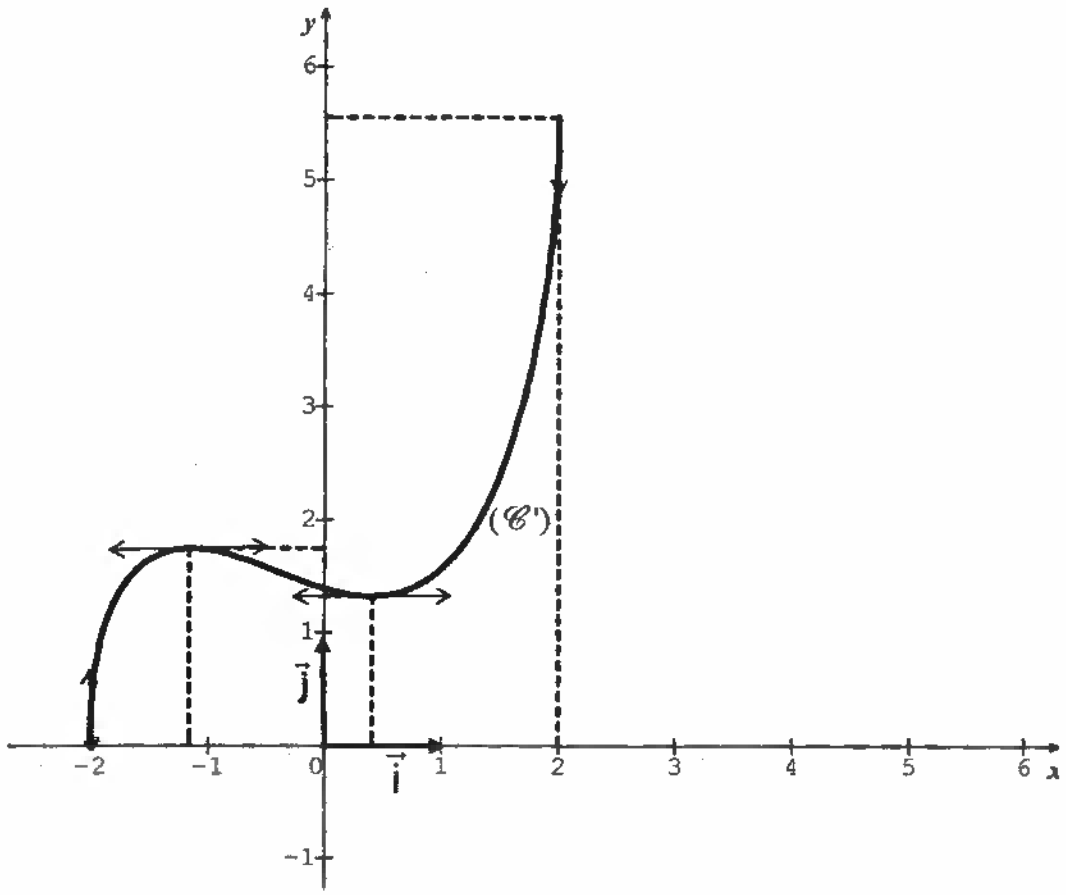
$-e^{-x} - (2n+1)^{2n}$

Section : ..... N° d'inscription : ..... Série : .....
Nom et prénom : .....
Date et lieu de naissance : .....

Signature des Surveillants
.....
.....

Annexe à rendre avec la copie

Exercice 4



Session de CONTROLE 2008

Section : Math

Epreuve : Mathématiques

Durée : 4 heures **Coefficient : 4**

Exercice n°1

A-CONTENU

Calcul intégral-limites –Congruences

B-REPONSES

1) Réponse - b - 2) Réponse - c - 3) Réponse - c -

Exercice n°2

A-Contenu

-Résolution dans C d'une équation du troisième degré admettant une racine réelle .

-Similitude directe.

B- SOLUTION

$$(E): z^3+(5+i)z^2+(10+2i)z+8=0$$

1) a- Soit $z_0 = x \ (x \in \mathbb{R})$ une solution réelle de (E) . Alors :

$x^3+(5+i)x^2+(10+2i)x+8=0$ donc $(x^3+5x^2+10x+8)+i(x^2+2x)=0$ par suite

$\begin{cases} x^3+5x^2+10x+8=0 \\ x^2+2x=0 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} x^3+5x^2+10x+8=0 \\ x=0 \quad \text{ou} \quad x=-2 \end{cases}$ ainsi $\boxed{z_0=-2}$

(car z =0 n'est pas une solution de (E))

b- comme $z_0=-2$ est une solution de (E), donc il existe deux nombres complexes b et c tels que

$z^3+(5+i)z^2+(10+2i)z+8=(z+2)(z^2+bz+c)$

par identification ,on obtient :b=3+i et c=4.

Par suite $(E):(z+2)(z^2+(3+i)z+4)=0$ donc $\begin{cases} z=-2 \\ z^2+(3+i)z+4=0 \end{cases}$

Résolvons l'équation $z^2+(3+i)z+4=0$

$\Delta=(3+i)^2-16=-8+6i=(1+3i)^2$ ce qui donne $\begin{cases} z'=\frac{1}{2}(-3-i-1-3i)=-2-2i \\ z''=\frac{1}{2}(-3-i+1+3i)=-1+i \end{cases}$

Conclusion : les solutions de l'équation (E) sont donc -2 , $-2-2i$ et $-1+i$

2) a- L'écriture complexe de f est de la forme $z'=az+b$ où $a=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ (complexe non nul) et $b=0$ donc f est une similitude directe de rapport $k=\sqrt{2}$, de centre O et dont une mesure de l'angle est $\frac{\pi}{4}$.

b- On a $MM'=|(1+i)z-z|=|iz|=|z|=OM$

D'autre part , $M'=f(M)$ donc $OM'^2=2OM^2$

par suite $MM'^2+OM^2=2OM^2=OM'^2$

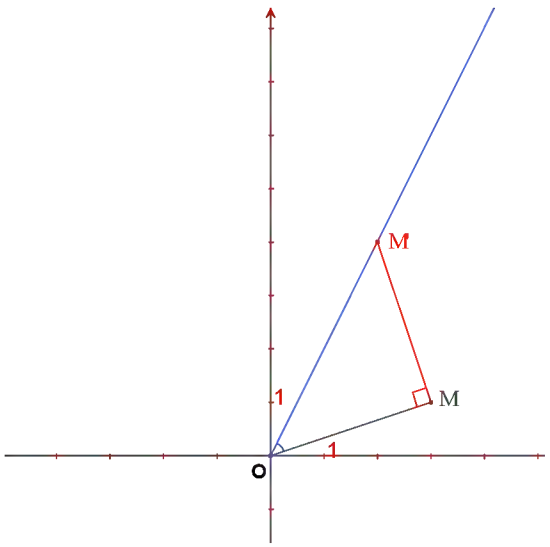
Ainsi OMM' est un triangle rectangle et isocèle en M.

Construction :

On construit la demi-droite $[Ot)$

tel que $(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{Ot})\equiv\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

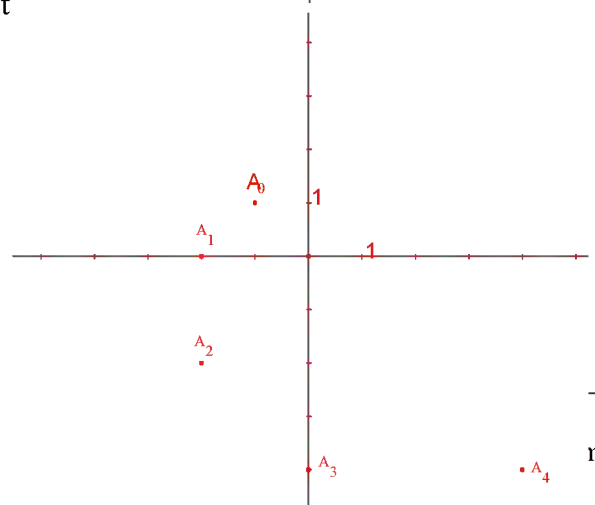
La perpendiculaire à (OM) issue de M coupe $[Ot)$ en M' d'où la construction.



3) a- pour tout $n\in\mathbb{N}$, désignons par z_n l'affixe du point A_n. comme $A_{n+1}=f(A_n)$ alors $z_{n+1}=(1+i)z_n$.

Par suite $A_0(-1+i)$; $A_1(-2)$; $A_2(-2-2i)$

$A_3(-4i)$ et $A_4(4-4i)$.



b- On a : $z_n = (1+i)\,z_{n-1}$

On établit par recurrence que pour tout entier naturel

non nul n on a $z_n = (1+i)^n z_0$

Les points O, A_0 et A_n sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{OA_0}$ et $\overrightarrow{OA_n}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{OA_0}$ et $\overrightarrow{OA_n}$ sont colinéaires si et seulement si $\frac{z_n}{z_0}$ est réel

$\frac{z_n}{z_0}$ est réel si et seulement si $\arg(1+i)^n = k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ si et seulement si $\boxed{n \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\,4) \ et \ n \ non \ nul.}$

Exercice n°3

A-CONTENU

-Antidéplacement : symétrie , symétrie glissante.

B-SOLUTION

1) a- $AB \neq 0$ et $AB = BD$ car ABD est équilatéral

alors il existe un unique antidéplacement f qui
envoie A sur B et B sur D.

b- On a $f \circ f(A) = D \neq A$

donc f est une symétrie glissante de vecteur
$\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AJ}$ $\left(\text{car } f \circ f = t_{\overrightarrow{2u}}\right)$ et d'axe la droite passant par le point $I = A * B$ et par le point $0 = B * D$
.donc l'axe de cette symétrie glissante est la droite (OI).

c- L'image du triangle direct ABD est un triangle indirect qui lui est isométrique
dont $f(A) = B$ et $f(B) = D$ sont deux sommets par suite l'image par f du triangle ABD est le triangle BDC

2) a- $\left.\begin{array}{r} s(\{A,B,D\}) = \{B,C,D\} \\ s(A) = C \\ s \text{ est une bijection} \end{array}\right\}$ donc $s(\{B,D\}) = \{B,D\}$ ainsi $s([BD]) = [BD]$.

b- d'après ce qui précède on a

$s([BD]) = [BD]$ et comme $O = B * D$ donc $s(O) = O$ par suite s est un antidéplacement
Qui fixe le point O d'où il s'agit d'une symétrie orthogonale d'axe (BD)

3) a- $\left.\begin{array}{r} g(\{A,B,D\})=\{B,C,D\} \\ g(A)=D \\ g \text{ est une bijection} \end{array}\right\}$ donc $g(\{B,D\})=\{B,C\}$ par suite on obtient : $g(D)=B$ ou $g(D)=C$

or si $g(D)=C$ on aura $g(B)=B$ par suite g est une symétrie orthogonale ce qui n'est pas le cas car $g\circ g(A)=C\neq A$ donc $g(D)=B$.

b- on a déjà $g(A)=D$, $g(D)=B$ et g n'est pas une symétrie orthogonale car $g\circ g(A)=B\neq A$ donc g est une symétrie glissante donc de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AI}$

$\left(\text{car } g\circ g=t_{\overrightarrow{2u}}\right)$ et d'axe la droite passant par $J=A*D$ et par $0=B*D$ donc l'axe de la symétrie glissante g est la droite (OJ).

Exercice n°4

A- CONTENU

-Fonction Logarithme.

-Continuité , dérivabilité, positions relatives de deux courbes.

-Calcul intégral, calcul d'aire .

B- SOLUTON

1) posons $t=x+2$

a- $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x)=\lim\limits_{x\to(-2)^+}(x+2)\ln(x+2)=\lim\limits_{t\to 0^+} t\ln t=0=f(-2)$

Donc f est continue à droite en (-2).

b- $\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{f(x)-f(-2)}{x+2}=\lim\limits_{x\to(-2)^+}\ln(x+2)=\lim\limits_{t\to 0^+}\ln t=-\infty$

c- f est dérivable sur $]-2,2]$ et on a :

$f'(x)=1+\ln(x+2)$. $f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\geq e^{-1}-2$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)\ln(x+2)=\lim\limits_{t\to+\infty} t\ln t=+\infty$

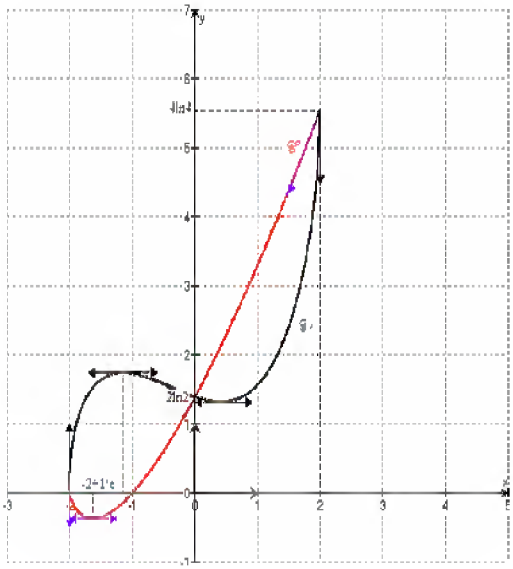
x	-2		$e^{-1}-2$		2
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$-e^{-1}$	↗	$+\infty$

2) a- $g(x)-f(x)=-x\sqrt{4-x^2}$

x	-2		0		2
$g(x)-f(x)$	‖	$+$	0	$-$	
position	‖	C Au dessous De C'			

Pour $x\in[-2,0]$ la courbe C est au dessus de la courbe C' et pour $x\in[0,2]$ la courbe C est au dessous de la courbe C'

b-



3) a-

- Si $\alpha<0$ on obtient $\mathcal{A}_\alpha=\int_\alpha^0\left(g(x)-f(x)\right)dx=\int_0^\alpha x\sqrt{4-x^2}dx$
- Si $\alpha>0$ on obtient $\mathcal{A}_\alpha=\int_0^\alpha\left(f(x)-g(x)\right)dx=\int_0^\alpha x\sqrt{4-x^2}dx$

Ainsi pour tout $\alpha\in[-2,2]\setminus\{0\}$ $\mathcal{A}_\alpha=\int_0^\alpha x\sqrt{4-x^2}dx$

b- $\mathcal{A}_\alpha=-\frac{1}{2}\int_0^\alpha -2x\sqrt{4-x^2}dx=-\frac{1}{3}\left[(4-x^2)\sqrt{4-x^2}\right]_0^\alpha=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}(4-\alpha^2)\sqrt{4-\alpha^2}$.

c- $\mathcal{A}=\mathcal{A}_{-2}+\mathcal{A}_2=\frac{16}{3}$ u.a.

Exercice n°5

A-CONTENU

-Suite de fonctions ; suites numériques ;convergences de suites

B-SOLUTION

-1) $f_n'(x)=-e^{-x}-(2n+1)x^{2n}<0$ sur $[0,1]$ donc

f_n est strictement décroissante sur $[0,1]$.

x	0		1
$f_n'(x)$		–	
$f_n(x)$	1	↘	$e^{-1}-1$

2) f_n est continue, strictement décroissante sur $[0,1]$ donc elle réalise une bijection de $[0,1]$ sur $f([0,1])=[e^{-1}-1,1]$ et comme $0\in]e^{-1}-1,1[$ alors l'équation $f_n(x)=0$ admet une solution unique $u_n\in]0,1[$

3) a- Pour tout $x\in]0,1[$, on a : $f_{n+1}(x)-f_n(x)=x^{2n+1}(1-x^2)>0$
donc pour tout $(n,x)\in\mathbb{N}^*\times]0,1[$ on a : $f_{n+1}(x)>f_n(x)$.

b- Pour tout $(n,x)\in\mathbb{N}^*\times]0,1[$ on a : $f_{n+1}(x)>f_n(x)$ pour $x=u_{n+1}$ on aura $\boxed{f_n(u_{n+1})<0}$.

c- • $f_n(u_{n+1})<0$ donc $f_n(u_{n+1})<f_n(u_n)$ et comme f_n est strictement décroissante alors sa réciproque l'est aussi et par suite $u_{n+1}>u_n$ ainsi (u_n) est une suite croissante.

• (u_n) est une suite croissante et majoré par 1 donc elle est convergente .

4) a- $f_n(u_n)=0$ donc $e^{-u_n}=(u_n)^{2n+1}$ ainsi $\boxed{\ln u_n=-\dfrac{u_n}{2n+1}}$.

b- Soit $\ell=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ alors on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\dfrac{u_n}{2n+1}\right)$ donc $\ln\ell=0$ par suite $\boxed{\ell=1}$.

FIN.

REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION
ET DE LA FORMATION

EXAMEN DU BACCALAUREAT

SESSION DE JUIN 2006

SESSION DE CONTROLE

SECTION : MATHEMATIQUES
EPREUVE : MATHEMATIQUES
DUREE : 4 heures COEFFICIENT : 4

EXERCICE 1 (5 points)

On dispose de deux urnes indiscernables U_1 et U_2.

U_1 contient 2 jetons noirs et 3 jetons blancs, U_2 contient 3 jetons noirs et 2 jetons blancs.

1) Une première épreuve consiste à tirer un jeton de l'urne U_1 et un jeton de l'urne U_2. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants.

   A : « Obtenir deux jetons noirs »

   B : « Obtenir deux jetons de même couleur »

   C : « Obtenir un jeton blanc et un seul ».

2) Une deuxième épreuve consiste à choisir une urne au hasard et à tirer un jeton de cette urne.

   a – Montrer que la probabilité de tirer un jeton blanc est égale à $\frac{1}{2}$.

   b – Calculer la probabilité de tirer un jeton de l'urne U_1, sachant qu'il est blanc.

3) On répète la deuxième épreuve n fois de suite ($n \geq 2$), en remettant chaque fois le jeton tiré dans son urne d'origine.

   Soit X l'aléa numérique qui est égal au nombre de fois où on a tiré un jeton blanc.

   a – Donner la loi de probabilité de X.

   b – Calculer son espérance et sa variance.

   c – Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la probabilité de tirer deux fois un jeton blanc est supérieure ou égale à $\left(\frac{1}{2}\right)^n$

EXERCICE 2 (5 points)

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = (1 + x)\, e^{-x}$ et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1) a – Dresser le tableau de variation de f.

   b – Tracer la courbe $\mathscr{C}$ (on étudiera les branches infinies).

2) Soit $v_n = \int_0^n f(x)\, dx$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

   a – Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $v_n = 2 - (2 + n)e^{-n}$

   b – Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

3) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$ on pose $u_k = \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx$.

Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $v_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

4) a – Montrer que pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $u_k = (e-1)\,k\,e^{-k} + (e-2)e^{-k}$

b – En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$v_n = (e-1)\sum_{k=1}^{n} k\,e^{-k} + \frac{e-2}{e-1}\,(1-e^{-n}).$$

5) Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} k\,e^{-k}$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{e}{(e-1)^2}$.

PROBLEME (10 points)

Soit AFED un carré de côté 4 cm tel que $(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et soit O son centre. On désigne par B et O_1 les symétriques respectifs de A et O par rapport à la droite (EF).

A – 1) a – Soit r la rotation définie par r(F) = E et r(E) = D. Préciser l'angle et le centre de r.

b – Soit $f = r \circ S_{(OO_1)}$; où $S_{(OO_1)}$ désigne la symétrie orthogonale d'axe (OO_1).

Montrer que f est la symétrie orthogonale d'axe (OE).

2) Soit $r' = t_{\overrightarrow{OO_1}} \circ r^{-1}$ où $t_{\overrightarrow{OO_1}}$ désigne la translation de vecteur $\overrightarrow{OO_1}$ et r^{-1} désigne la rotation réciproque de r.

a – Montrer que r' est une rotation dont on précisera l'angle .

b – Déterminer r' (O). En déduire que F est le centre de r' .

3) On désigne par g l'antidéplacement défini par g(D) = F et g(O) = O_1.

a – Montrer que g est une symétrie glissante et déterminer sa forme réduite.

b – Soit M un point du plan.

Montrer que [g(M) = r' (M)] si et seulement si [f(M) = M].

c – En déduire l'ensemble des points M tels que g(M) = r' (M).

B – Soit s la similitude directe telle que s(A) = F et s(B) = E

1) a – Déterminer l'angle et le rapport de s.

b – Montrer que $s = r \circ h_{\left(A,\frac{1}{2}\right)}$ où r est la rotation définie dans A-1)a et $h_{\left(A,\frac{1}{2}\right)}$ est l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$.

2) Soit Ω le centre de s.

a – Montrer que Ω appartient aux deux cercles de diamètres respectifs [AF] et [BE].

Construire Ω .

b – Montrer que s(E) = O. En déduire que Ω , O et B sont alignés.

3) On pose $B_0 = B$ et pour tout entier naturel n : $B_{n+1} = s(B_n)$.

a – Préciser B_1 et B_2.

b – Montrer que pour tout entier naturel non nul, le triangle $B_{n-1}\,B_n\,B_{n+1}$ est rectangle et les points B_{n-1}, Ω et B_{n+1} sont alignés.

c – Donner un procédé de construction de B_{n+1} à partir de B_{n-1} et B_n.

4) Pour tout entier naturel n, on pose $d_n = B_n\,B_{n+1} = \left\|\overrightarrow{B_n\ B_{n+1}}\right\|$

a – Montrer que $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera le 1er terme et la raison.

b – Soit $\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} d_k$. Calculer σ_n en fonction de n et déterminer $\lim_{n\to+\infty} \sigma_n$.

C – On désigne par : I le milieu de [AF], J le milieu de [OI] et L le symétrique de J par rapport à I

Soit $\mathscr{E}$ l'ellipse de sommets A, F, J et L.

1) Construire les foyers G_1 et G_2 de $\mathscr{E}$ (G_1 désigne le foyer qui appartient au segment [IF]).

2) Soit $G_1' = s(G_1)$ où s est la similitude directe de centre Ω, d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rapport $\frac{1}{2}$

a – Montrer que la droite $(\Omega G_1')$ est tangente à l'ellipse $\mathscr{E}$.

b – Construire le point de contact M de $\mathscr{E}$ et de $(\Omega G_1')$.

SESSION De CONTROLE 2006

Solutions de l'exercice1

1) p(A) = $\frac{2}{5}\times\frac{3}{5} = \frac{6}{25}$ p(B) = $\frac{2\times3}{25}+\frac{3\times2}{25} = \frac{12}{25}$ p(C) = $\frac{3\times3}{25}+\frac{2\times2}{25} = \frac{13}{25}$

2) a – On choisit l'urne U_1 et on tire un jeton blanc ou on choisit l'urne U_2 et on tire un jeton blanc.

Soient : D l'événement « tirer un jeton blanc » , U_1 : « tirer un jeton de l'urne U_1 » et

U_2 : « tirer un jeton de l'urne U_2 » .

on a D= $(U_1 \cap D) \cup (U_2 \cap D)$ avec $(U_1 \cap D)$ et $(U_2 \cap D)$ incompatibles.

la probabilité de tirer un jeton blanc est donc

p(D) = p($U_1 \cap$D) + p($U_2 \cap$D) = p(U_1).p(D/U_1) + p(U_2).p(D/U_2) = $\frac{1}{2}\times\frac{3}{5} + \frac{1}{2}\times\frac{2}{5}$ = $\frac{1}{2}$.

b) p(U_1/D) = $\frac{p(U_1 \cap D)}{p(D)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{5}$

3) X(Ω) = { 1 , 2, … , n }. X suit une loi binomiale de paramètres n et p = $\frac{1}{2}$.

a) k ∈ { 1 , 2, … , n } : p(X = k) = $C_n^k\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = C_n^k\left(\frac{1}{2}\right)^n$

b) E(X) = n $\times\frac{1}{2} = \frac{n}{2}$ V(X) = n $\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{n}{4}$

c) p(X = 2) = $C_n^2\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Comme $C_n^2 \geq 1$ alors p(X = 2) ≥ $\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Solutions de l'exercice2

f est définie sur IR par f(x) = (1 + x). e^{-x}

1) a) f est dérivable sur IR et f '(x) = –x . e^{-x} . $\lim\limits_{x\to-\infty}$ f(x) = –∞ .

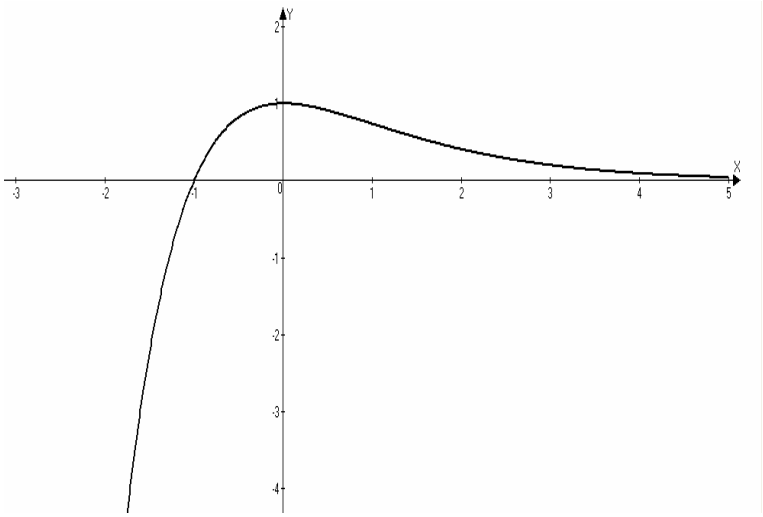
$\lim\limits_{x\to+\infty}$ f(x) = $\lim\limits_{x\to+\infty}$ e^{-x} – (–x e^{-x}) = 0.

x	–∞ 0 +∞		
f '(x)	+	0	–

f	$-\infty$ ↗ 1 ↘ 0

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{1}{x}+1\right)e^{-x} = +\infty$.

C admet au voisinage de $-\infty$ une branche parabolique de direction $(O, \vec{j})$.



2) a) $v_n = \int_0^n f(x)dx = \int_0^n (1+x)e^{-x}dx = \left[-(1+x)e^{-x}\right]_0^n + \int_0^n e^{-x}dx = 2 - (2+n)e^{-n}$.

b) $v_n = g(n)$ avec $g(x)=2-(2+x)e^{-x}$

or $\lim_{x\to+\infty} g(x)=2$ donc $\lim_{n\to+\infty} v_n = 2$.

3) $v_n = \int_0^n f(x)dx = \sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k} f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

4) a) $k \in IN^*$: $u_k = \int_{k-1}^{k} f(x)dx = \int_{k-1}^{k}(1+x)e^{-x}dx = \left[-(1+x)e^{-x}\right]_{k-1}^{k} + \int_{k-1}^{k} e^{-x}dx$

$= \left[-(1+x)e^{-x}\right]_{k-1}^{k} + \left[-e^{-x}\right]_{k-1}^{k} = (e-1)\,k\,e^{-k} + (e-2)\,e^{-k}$

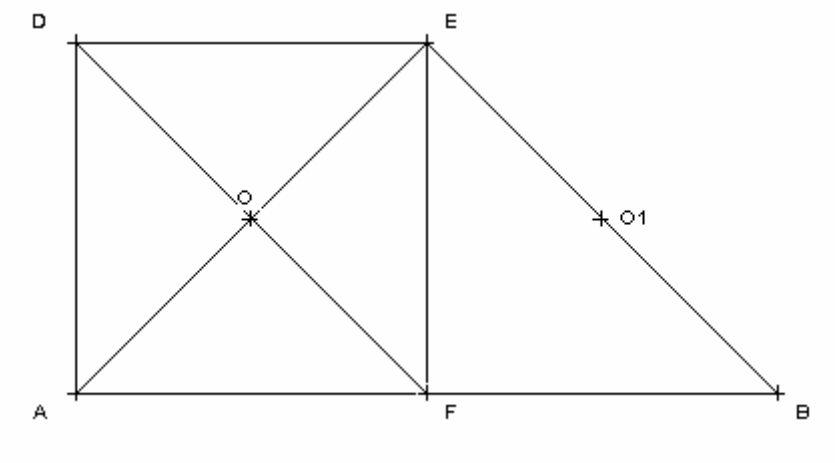
b) $v_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = (e-1)\sum_{k=1}^{n} ke^{-k} + (e-2)\sum_{k=1}^{n} e^{-k} = (e-1)\sum_{k=1}^{n} ke^{-k} + (e-2)\times e^{-1}\frac{1-e^{-n}}{1-e^{-1}}$.

$v_n = (e-1)\sum_{k=1}^{n} ke^{-k} + \frac{e-2}{e-1}\left(1-e^{-n}\right)$

5) $S_n = \sum_{k=1}^{n} ke^{-k} = \frac{1}{e-1}\left(v_n - \frac{e-2}{e-1}\left(1-e^{-n}\right)\right)$. $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{e-1}\left(2-\frac{e-2}{e-1}\right) = \frac{e}{(e-1)^2}$

Solutions Du Problème

A –



1)a- L'angle de r est $\left(\overrightarrow{FE}\,\hat{,}\,\overrightarrow{ED}\right) \equiv \left(\overrightarrow{FE}\,\hat{,}\,\overrightarrow{FA}\right) \equiv \pi/2\ [2\pi]$.

Le centre de r est O : point d'intersection des médiatrices de [FE] et [ED].

b- O est le milieu de [EA], les symétries orthogonales conservent les milieux, donc O_1 est le milieu de [EB]. EOFO_1 est un carré.

f est la composée d'un déplacement et d'un antidéplacement, donc f est un antidéplacement.

De plus f(O) = ro$S_{(OO_1)}$(O) = r(O) = O et f(E) = ro$S_{(OO_1)}$(E) = r(F) = E et O et E sont deux points distincts, donc f est la symétrie orthogonale d'axe (OE).

(ou encore, on écrit r = $S_{(OE)}oS_{(OO_1)}$, donc f = ro$S_{(OO_1)}$ = $S_{(OE)}oS_{(OO_1)}$ o $S_{(OO_1)}$ = $S_{(OE)}$)

2) a- r' est la composée d'une translation et d'une rotation d'angle $-\pi/2$, donc r' est une rotation d'angle $-\pi/2$.

b- r'(O) = $t_{\overrightarrow{OO_1}}$ o r^{-1}(O) = $t_{\overrightarrow{OO_1}}$ (O) = O_1.

Comme FO = FO_1 et $\left(\overrightarrow{FO}\,\hat{,}\,\overrightarrow{FO_1}\right) \equiv -\pi/2\ [2\pi]$, alors d'après la propriété caractéristique,

r'(F) = F , donc F est le centre de r'.

3) a- [DF] et [OO_1] n'ont pas la même médiatrice, donc g n'est pas une symétrie orthogonale, elle est alors une symétrie glissante.

g(D) = F , donc le milieu O de [DF] appartient à l'axe de g.

g(O) = O_1 , donc le milieu de OO_1 appartient à l'axe de g.

L'axe de g est alors la droite (OO_1).

O est un point de l'axe de g et g(O) = O_1 donc $\overrightarrow{OO_1}$ est le vecteur de g,

Et par suite g = $t_{\overrightarrow{OO_1}}oS_{(OO_1)}$ = $S_{(OO_1)}ot_{\overrightarrow{OO_1}}$.

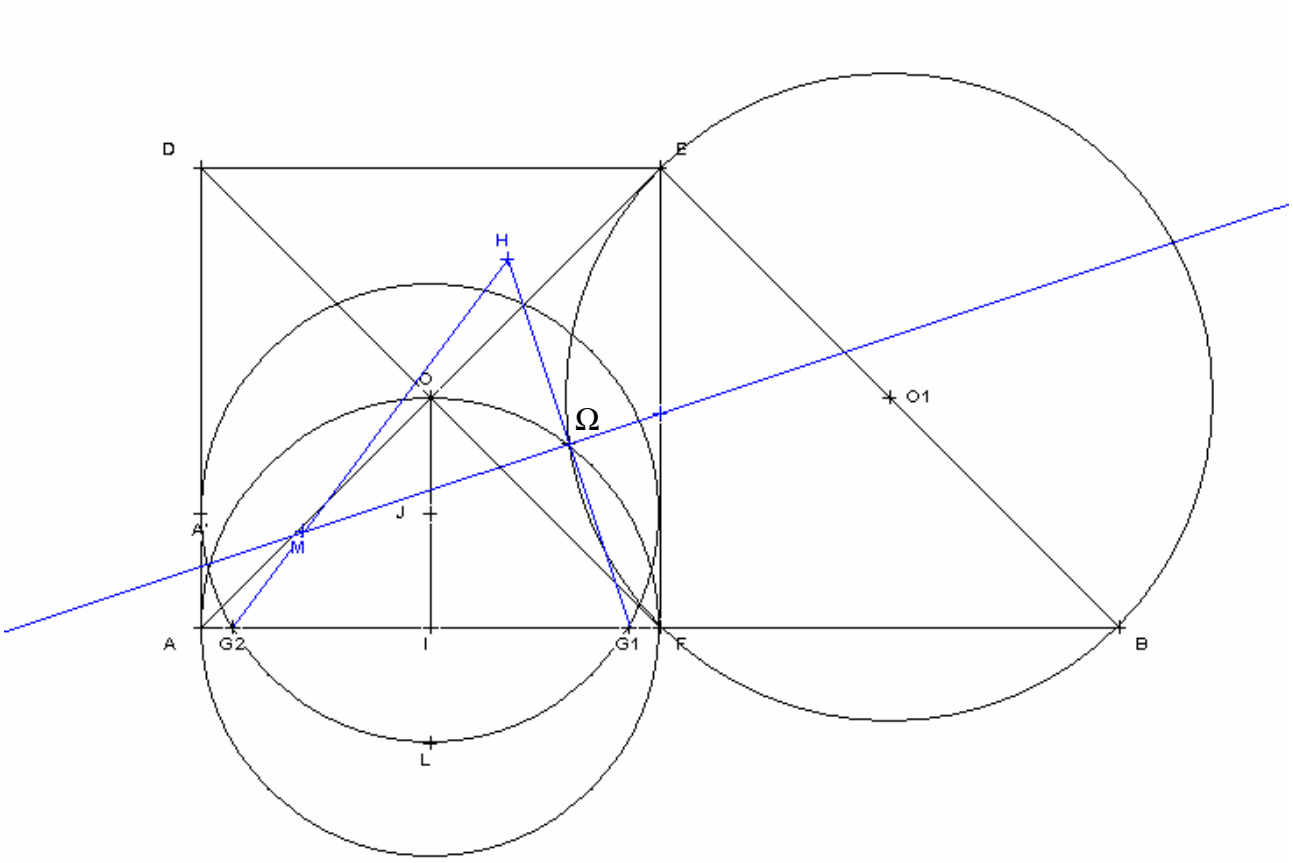
b- $g(M) = r'(M) \Leftrightarrow t_{\overrightarrow{OO_1}} \circ S_{(OO_1)}(M) = t_{\overrightarrow{OO_1}} \circ r^{-1}(M) \Leftrightarrow S_{(OO_1)}(M) = r^{-1}(M) \Leftrightarrow$

$r \circ S_{(OO_1)}(M) = M$

$\Leftrightarrow f(M) = M$

c- $g(M) = r'(M) \Leftrightarrow f(M) = M$. Ainsi l'ensemble des points M tels que $g(M) = r'(M)$ est la droite (OE).

B –



1) a- L'angle de s est $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{FE}\right) \equiv \left(\overrightarrow{FB}, \overrightarrow{FE}\right) \equiv \pi/2\ [2\pi]$. Le rapport de s est $\frac{FE}{AB} = \frac{1}{2}$

b- $r \circ h_{\left(A, \frac{1}{2}\right)}(A) = r(A) = F$ et $r \circ h_{\left(A, \frac{1}{2}\right)}(B) = r(F) = E$.

donc s et $r \circ h_{\left(A, \frac{1}{2}\right)}$ sont deux similitudes directes qui coïncident en deux points distincts ,

par suite $s = r \circ h_{\left(A, \frac{1}{2}\right)}$

2) a- s est de centre Ω et d'angle $\pi/2$, et $s(A) = F$ donc $\left(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega F}\right) \equiv \pi/2\ [2\pi]$, et par suite

Ω appartient au cercle de diamètre [AF] . de même s(B) = E donc $\left(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega E}\right) \equiv$ π/2 [2π],

et donc Ω appartient au cercle de diamètre[BE]

Comme s(A) = F alors F n'est pas le centre de s. Par suite Ω est le second point d'intersection

(autre que F) des deux cercles de diamètres [AF] et [BE].

b- s(E) = r o $h_{\left(A,\frac{1}{2}\right)}$ (E) = r(O) = O

sos est une similitude directe de centre Ω, et d'angle π/2 + π/2 = π. Or sos(B) = s(E) = O

donc $\left(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega O}\right) \equiv \pi$ [2π] , et donc Ω, O et B sont alignés.

3) a- B_1 = s(B_0) = s(B) = E et B_2 = s(B_1) = s(E) = O.

b- s est d'angle π/2 ; s(B_{n-1}) = B_n et s(B_n) = B_{n+1} , donc $\left(\overrightarrow{B_{n-1}B_n}, \overrightarrow{B_nB_{n+1}}\right) \equiv$ π/2 [2π]

par suite $B_{n-1}\, B_n\, B_{n+1}$ est rectangle en B_n

sos est de centre Ω et d'angle = π ; comme sos(B_{n-1}) = s(B_n) = B_{n+1}

alors $\left(\overrightarrow{\Omega B_{n-1}}, \overrightarrow{\Omega B_{n+1}}\right) \equiv \pi$ [2π] donc les points B_{n-1} , Ω et B_{n+1} sont alignés.

c- B_{n+1} est le point d'intersection de la perpendiculaire en B_n à (B_n B_{n-1}) avec (ΩB_{n-1}).

4) a- s est de rapport 1/2 ; s(B_{n-1}) = B_n et s(B_n) = B_{n+1} donc $\frac{B_nB_{n+1}}{B_{n-1}B_n}$ = 1/2 ; par suite $\frac{d_n}{d_{n-1}}$ = 1/2

La suite (d_n) est donc géométrique de rapport 1/2 .

b- $d_0 = B_0\, B_1$ = BE = $4\sqrt{2}$, donc $\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} d_k = 4\sqrt{2}\,\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)}$ =

$8\sqrt{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$

$-1 < \frac{1}{2} < 1$ donc $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$ par suite $\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = 8\sqrt{2}$

C-

1) Si dans un repère orthonormé, l'équation réduite de l'ellipse est $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (a > b > 0) alors

$c^2 = a^2 - b^2$, et donc $a^2 = c^2 + b^2$ et on a

IF = a, IJ = b et IG = c. (G est l'un des foyers de l'ellipse)

donc $JG^2 = JI^2 + IG^2 = b^2 + c^2 = a^2$ par suite JG = a. ainsi :

Le cercle de centre J et de rayon IF coupe (AF) en G_1 et G_2

2)a- G_1 est un foyer,

Le cercle de diamètre [AF] est le cercle principal de l'ellipse.

Ω appartient à ce cercle et $(\Omega G_1')$ est perpendiculaire à (ΩG_1)

ainsi le projeté orthogonal du foyer G_1 sur $(\Omega G_1')$ est le point Ω du cercle principal.

donc $(\Omega G_1')$ est tangente à l'ellipse.

b- Soit H le symétrique du foyer G_1 par rapport à la tangente $(\Omega G_1')$. Alors

$(G_2 H)$ coupe $(\Omega G_1')$ en M : point de contact de l'ellipse avec la tangente $(\Omega G_1')$.