

RÉPUBLIQUE GABONAISE
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

BACCALAURÉAT SÉRIE C
SESSION : JUIN 2026

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures — Coefficient : 5

L'usage de la calculatrice scientifique est autorisé.

Examineur : M. Gildas MBA OBIANG, *Agrégé de Mathématiques*

Le candidat est invité à porter une attention particulière à la clarté des raisonnements et à la qualité de la rédaction.

EXERCICE 1 : Nombres complexes et Arithmétique

(5 points)

Partie A : Arithmétique et structures

1. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on considère l'équation dans $\mathbb{Z}^2$ suivante :

$$(E_n) : n \cdot x - (n + 1) \cdot y = 2$$

- (a) À l'aide du théorème de Bézout, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation (E_n) admet un couple unique de solutions (x_0, y_0) dans $\mathbb{Z}^2$ tel que $0 \leq x_0 \leq n$. Déterminer ce couple en fonction de n .

- (b) Résoudre de manière générale l'équation (E_n) dans $\mathbb{Z}^2$.

2. On considère le système de congruences suivant, d'inconnue $x \in \mathbb{Z}$:

$$(S) : \begin{cases} 2x \equiv 3 \pmod{5} \\ 3x \equiv 2 \pmod{7} \end{cases}$$

- (a) Transformer ce système sous la forme standard $\begin{cases} x \equiv a \pmod{5} \\ x \equiv b \pmod{7} \end{cases}$ en explicitant la démarche.

- (b) En déduire l'ensemble des solutions de (S) dans $\mathbb{Z}$.

Partie B : Racines de l'unité et configuration géométrique Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

1. On pose $S = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\omega^k$. En calculant $(1-\omega)S$, déterminer la valeur exacte de cette somme S en fonction de n et de ω .
2. Soit $\theta \in]0; \pi[$. On considère l'équation d'inconnue complexe z :

$$(G_\theta) : \left(\frac{z-i}{z+i} \right)^n = e^{2i\theta}$$

- (a) Montrer sans calcul que toutes les solutions de (G_θ) sont nécessairement réelles.

(b) Déterminer explicitement ces solutions sous forme trigonométrique.

3. **Recherche d'un ensemble de points :** Soit M un point d'affixe $z \neq -i$. Déterminer géométriquement ou analytiquement l'ensemble (Γ) des points M tels que le nombre complexe $Z = \frac{z^2-1}{z^2+1}$ soit un imaginaire pur.

EXERCICE 2 : QCM et Vrai/Faux avec justification

(4 points)

Chaque affirmation suivante doit être déclarée Vraie ou Fausse. Une justification complète, analytique ou géométrique, est exigée pour valider la réponse.

1. Dénombrement et Statistique :

On effectue 4 tirages successifs et sans remise dans une urne contenant n boules blanches et 3 boules noires ($n \geq 2$).

Affirmation : La probabilité d'obtenir une boule blanche exclusivement au deuxième et au quatrième tirage est égale à $\frac{3n(n-1)}{(n+3)(n+2)(n+1)n}$.

2. Isométries de l'espace et Ensembles de points :

Soient A et B deux points distincts fixés de l'espace. On considère l'application f qui à tout point M associe le point M' tel que $\vec{MM'} = \vec{MA} \wedge \vec{MB}$ (où $\wedge$ désigne le produit vectoriel).

Affirmation : L'ensemble des points M de l'espace tels que $M' = M$ est la droite (AB) .

3. Affinités vectorielles :

Soit f une application affine du plan affine dans lui-même. On note ϕ l'application vectorielle associée à f . Le plan est muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j})$ et pour tout vecteur $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$, l'application ϕ est définie par :

$$\phi(\vec{u}) = (-x + 4y)\vec{i} + (-2x + 5y)\vec{j}$$

Affirmation : ϕ est une affinité vectorielle de base la droite vectorielle D d'équation $y = x$ et de rapport $k = 3$.

4. Barycentres et Coniques :

Soit ABC un triangle équilatéral de côté a . On considère l'application h du plan dans $\mathbb{R}$ définie par $h(M) = 2MA^2 - MB^2 - MC^2$.

Affirmation : Pour toute constante réelle k , la ligne de niveau $h(M) = k$ est une ellipse dont le centre est le centre de gravité du triangle ABC .

EXERCICE 3 : Suites de points et Similitudes directes du plan (4 points)

Dans le plan orienté, on considère un triangle OAB rectangle et isocèle en O tel que $(\vec{OA}, \vec{OB}) = \frac{\pi}{2}$. Soit s la similitude directe de centre A qui transforme O en B .

1. Détermination de la similitude :

- (a) Justifier géométriquement que le rapport de s est $\sqrt{2}$ et que son angle est $\frac{\pi}{4}$.
- (b) Donner l'écriture complexe de s dans le repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ où $\vec{u} = \frac{1}{OA}\vec{OA}$ (on posera $OA = 1$).

2. Construction de la suite de points :

On définit la suite de points (M_n) par $M_0 = O$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M_{n+1} = s(M_n)$. On note z_n l'axe du point M_n .

- (a) Démontrer par récurrence l'égalité suivante pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$z_n - 1 = (\sqrt{2})^n e^{i\frac{n\pi}{4}} (-1)$$

- (b) Déterminer l'ensemble des valeurs de n pour lesquelles les points A , O et M_n sont alignés.

3. Étude de la convergence et de la longueur :

- (a) Calculer en fonction de n la distance $M_n M_{n+1}$. La suite de points (M_n) converge-t-elle ? Justifier.
- (b) On pose $L_n = \sum_{k=0}^n M_k M_{k+1}$. Exprimer L_n en fonction de n et d'évaluer $\lim_{n \rightarrow +\infty} L_n$.

4. Démonstration géométrique : Démontrer que pour tout entier naturel n , le triangle $AM_n M_{n+1}$ est rectangle et isocèle. En déduire la nature géométrique exacte du triangle $M_n M_{n+1} M_{n+2}$.**PROBLÈME : Fonction définie par une intégrale et géométrie (7 points)**

Partie A : Propriétés d'une fonction d'extension exponentielle Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(t) = \frac{e^{-t}}{t^2+1}$.

- 1. Justifier soigneusement que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $0 < h(t) \leq e^{-t}$.
- 2. Démontrer que pour tout $x \geq 0$, l'intégrale $F(x) = \int_0^x h(t) dt$ est parfaitement définie et prouver que la fonction F est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Partie B : Étude de la fonction principale On considère la fonction numérique f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x} + \int_1^x \frac{e^{-t}}{t^2+1} dt$$

On note $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 4 cm.

1. Limites, continuité et branches infinies :

- (a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
- (b) En utilisant les résultats de la **Partie A**, démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{e^{-t}}{t^2+1} dt$ existe et est égale à une constante réelle notée L .
- (c) En déduire la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Quelle est la conséquence géométrique immédiate pour la courbe $(\mathcal{C}_f)$?

2. Dérivation et sens de variations :

- (a) Montrer que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que sa fonction dérivée f' vérifie :

$$f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2} + \frac{e^{-x}}{x^2 + 1}$$

- (b) On admet que l'équation $f'(x) = 0$ admet une unique solution notée β sur $]0; +\infty[$. Démontrer, par un argument rigoureux de signe, que $1 < \beta < e$. Dresser le tableau de variations complet de la fonction f .

3. Théorème de la bijection et application :

- (a) Démontrer que la restriction de f à l'intervalle $]0; \beta]$ réalise une bijection de cet intervalle sur un intervalle J que l'on précisera.
- (b) En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0; \beta]$. Justifier de plus que $\alpha \in]0, 5; 1[$.

4. Application de l'inégalité des accroissements finis (IAF) :

Montrer que pour tout $x \in [1; e]$, on a l'encadrement suivant :

$$\frac{e^{-e}}{e^2 + 1} \leq f'(x) \leq 1 + \frac{1}{2e}$$

Partie C : Géométrie intégrale (Calcul d'aires et de volumes) Soit λ un réel tel que $\lambda > 1$.

1. **Calcul d'aire :** Soit $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire en cm^2 du domaine délimité par la courbe $(\mathcal{C}_f)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = \lambda$.
- (a) Montrer que pour tout $x \geq 1$, $\int_1^x \frac{e^{-t}}{t^2 + 1} dt \leq \frac{1}{2}(e^{-1} - e^{-x})$.
- (b) À l'aide d'une intégration par parties sur le terme $\frac{\ln(x)}{x}$, donner une majoration explicite de $\mathcal{A}(\lambda)$ en fonction de λ et de l'unité graphique.

2. Volume de révolution :

La courbe $(\mathcal{C}_f)$ subit une rotation complète autour de l'axe des abscisses sur l'intervalle $[1; \beta]$. Exprimer, sans tenter de l'évaluer explicitement, la valeur exacte du volume $\mathcal{V}$ du solide de révolution ainsi généré sous forme d'une intégrale dépendante du paramètre β .

— Fin de l'épreuve —