

SESSION 2000

A) a) Résoudre l'équation : $\log_2 x - \log_8(5 - 2x) = 1$

b) Résoudre : $\cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x + 1 = 0$

c) On donne $z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = 1 - i$

Calculer le module et l'argument de $\frac{z_1}{z_2}$.

Calculer $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

B)1) (P) est un plan euclidien muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Soit φ l'application de (P) dans (P) définie par $\begin{cases} x' = y - 4 \\ y' = x + 4 \end{cases}$

Montrer que φ est une isométrie affine de (P) que l'on précisera.

2) On appelle f_a la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$f_a = \frac{(a+2)x}{x+2-a}$. a étant un paramètre réel appartenant $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$ et on appelle (C_a)

la courbe représentative de f_a dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ de (P).

a) Montrer que, pour tout a de $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$, (C_a) est globalement invariante par φ .

b) Montrer que toutes les courbes (C_a) passent par deux points indépendants de a .

3) Soit ω_a le point de coordonnées $(a - 2; a + 2)$ dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ de (P) et les vecteurs $\vec{I} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} - \vec{j})$ et $\vec{J} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j})$.

a) Montrer que $(\omega_a; \vec{I}; \vec{J})$ est un repère orthonormé de (P).

b) Déterminer une équation de (C_a) dans le repère $(\omega_a; \vec{I}; \vec{J})$.

En déduire que (C_a) est une hyperbole équilatère.

SESSION 2001

A) 1) Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $x^2 + y^2 - 2x^2 y' = 0$

b) $y'' + 2y' + 5y = 0$ et déterminer la solution f qui vérifie: $f(0) = 1$ et $f'(0) = -1$

2) Soit α un nombre réel appartenant à l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

Montrer que $\tan^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$

Vérifier que $\tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$. En déduire la valeur $\tan \frac{3\pi}{8}$.

3) Le plan euclidien (P) est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

On considère les points $A(3 ; 1)$, $B(0 ; 2)$.

Soit a un réel strictement positif.

Trouver les coordonnées du point M tel que $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 3\frac{\vec{i}}{\ln a} + 3a\ln\frac{1}{a}\vec{j}$.

B) On considère la fonction f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 4})$$

1) Quel est l'ensemble de définition de f ?

Montrer que l'on a : $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{f(x) + f(-x)}{2} = \ln 2$

2) Etudier et tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé et montrer qu'elle admet un centre de symétrie.

3) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

SESSION 2002

I) Soit ABCD un losange de centre O avec $OB = 2OA$

a) Déterminer l'ensemble des points M tels que :

$$(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC})(2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) = 0$$

b) Déterminer l'ensemble des points M tels que : $MA^2 + MC^2 - 2MD^2 = -6OA^2$

II) On considère la fonction f définie par : $f(x) = \ln|x^2 - 1|$

a) Etudier le sens de variation de la fonction f .

b) On désigne par (C) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Montrer que (C) admet un axe de symétrie.

c) Démontrer que pour tout réel x de D_f , $f(x) = 2\ln|x| + \ln\left|1 - \frac{1}{x^2}\right|$ et calculer

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Donner une interprétation graphique de cette limite.

d) Construire (C) .

III) On pose $U_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin x \, dx, n \in \mathbb{N}$.

a) Calculer U_n à l'aide d'une intégration par parties.

b) Montrer que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique. Indiquer le premier terme et la raison.

c) On note $S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$. Calculer S_n et sa limite quand n tend vers $+\infty$.

SESSION 2003

A) Les faces d'un dé cubique sont numérotés respectivement 6 ; 6 ; 6 ; 5 ; 4 ; 3.

On suppose que lors d'un lancer la probabilité d'apparition de chaque face est kx ; x étant le numéro de la face et k un nombre réel.

1) Montrer que $k = \frac{1}{30}$.

2) On lance 4 fois ce dé, quelle est la probabilité d'obtenir 2 fois le numéro 6.

B)1) La fonction numérique g est définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = 2x\sqrt{x} - 3\ln x + 6$.
En utilisant le sens de variation de g , déterminer suivant les valeurs de x , le signe de $g(x)$.

2) La fonction numérique f est définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{3\ln x}{\sqrt{x}} + x - 1$

a) Déterminer les limites de f en 0, en $+\infty$.

b) Utiliser le résultat de la question 1) pour déterminer le sens de variation de f .

3) Soit (D) la droite d'équation $y = x - 1$ et (C) la représentation graphique de f dans un repère orthonormé du plan. Montrer que (D) est asymptote à (C) et étudier la position relative de (C) et (D).

4) Construire (C) et (D).

SESSION 2004

A)1. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer deux entiers naturels x et y tels que : $45x - 28y = 1$.

2. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation (E) : $45x - 28y = 1$

3. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation (E') : $45x - 28y = 6$

B) On donne la fonction f définie $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x - 1)e^{x+1}$

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O ; I ; J).

1. Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

En déduire que la courbe admet comme asymptote l'un des axes de coordonnées en $-\infty$.

2. Etudier les variations de f et construire (C).

3. Calculer l'aire du domaine limité par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 1$.

SESSION 2005

A) 1.a) Trouver l'ensemble des entiers naturels diviseurs du nombre 5929.

b) Trouver les couples $(a; b)$ d'entiers naturels dont le PGCD et le PPCM sont solutions de l'équation : $x^2 - 91x + 588 = 0$.

2. Démontrer que $A = 3^{3n+2} + 2^{n+4}$ est divisible par 5.

B) Soit la suite (U_n) définie par :
$$\begin{cases} U_1 = -1 \\ U_{n+1} = \frac{n}{2(n+1)} U_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)}, \text{ pour tout } n \text{ non nul.} \end{cases}$$

1. Montrer en raisonnant par récurrence que la suite (U_n) est majorée par 3.

2. Étudier le sens de variation de (U_n) .

3. On considère la suite (V_n) définie pour tout entier n non nul par $V_n = n(3 - U_n)$. Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

4. Exprimer V_n puis U_n en fonction de n .

C) Soit θ un nombre réel tel que $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$.

1- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 \cos^2 \theta - 2z \sin \theta \cos \theta + 1 = 0$.

2- Déterminer le module et un argument de chaque solution de cette équation.

3- Résoudre l'équation différentielle $(1 + \cos 2\theta)y'' - (2\sin 2\theta)y' + 2y = 0$, où y représente une fonction de la variable réelle.

D) Soit ABC un triangle.

1-a) Construire les points I, J et K tels que : $I = \overline{(A; 2), (C; 1)}$;

$J = \overline{(A; 1), (B; 2)}$; $K = \overline{(C; 1), (B; -4)}$.

b) Démontrer que le point B est barycentre de $\{(C; 1), (K; 3)\}$.

2-a) Démontrer que le point J est le barycentre de $\{(A; 2), (C; 1), (K; 3)\}$.

b) Démontrer que le milieu du segment $[IK]$ est le point J.

3- Soit L et M les milieux respectifs de $[CI]$ et $[CK]$. Montrer que IJML est un parallélogramme et que son centre G est l'isobarycentre des points A, B et C.

SESSION 2006

A) On compose un jury en tirant au sort trois personnes parmi sept volontaires : quatre hommes et trois femmes. X désigne la variable aléatoire qui associe à chaque jury le nombre de femmes qu'il présente.

1. Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance $E(X)$.

2. Calculer la probabilité qu'il ait au moins une femme dans le jury.

B) 1. Déterminer l'ensemble des entiers relatifs x tels que $8x \equiv 7[5]$.

2. Résoudre l'équation : $(x; y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, 336x + 210y = 294$.

C) Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on considère les points A, B et C de coordonnées respectives $(1; 5)$, $(2; 3)$ et $(4; 4)$.

1. Déterminer le barycentre G_α des points A, B et C affectés respectivement des coefficients $1; \alpha + 1; -\alpha + 3$ avec α réel.
2. Déterminer l'ensemble G_α quand α décrit $\mathbb{R}$.
3. Choisir α pour que G_α soit le point D $(1; 3)$.
4. On prend $\alpha = 5$, déterminer l'ensemble des points M du plan vérifiant : $MA^2 + 6MB^2 - 2MC^2 = 25$.

D) Le repère $(O; I; J)$ est orthonormé.

Soit f la fonction définie par : $f(x) = (1 - x)(1 + e^x)$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f .

1. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Démontrer que la droite (D) d'équation $y = -x + 1$ est asymptote à (C) en $-\infty$. Préciser la position relative de (C) et (D).
3. Etudier les variations de la fonction dérivée f' et en déduire les variations de f .
4. Tracer (C).

SESSION 2007

A) 1. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\sum_{k=1}^n k(n-k) = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}$$

2.a) Décomposer 469 en produit de facteurs premiers.

b) Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation : $x^3 - y^3 = 469$.

B) Dans une ville, il y a trois médecins. Quatre habitants de cette ville, malades le même jour, appellent au hasard l'un de ces trois médecins.

1. Quelle est la probabilité pour qu'un seul médecin soit appelé ?
2. Quelle est la probabilité pour que les trois médecins soient appelés ?

C) Le repère $(O; I; J)$ est orthonormé.

Soit la fonction définie par :
$$\begin{cases} f(x) = x - 1 + \frac{1}{x}, & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = 1 - (\ln x)^2, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- 1.a) Démontrer que f est continue et dérivable en 1.
- b) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et préciser les branches infinies de la courbe représentative (C) de f .
- c) Etudier les variations de f .

Démontrer que le point d'abscisse e est un point d'inflexion de (C) .

d) Tracer (C) .

2. Soit h la restriction de f à l'intervalle $]1; +\infty[$.

a) Démontrer que h réalise une bijection de $]1; +\infty[$ vers un intervalle que l'on précisera.

b) En déduire que h admet une fonction réciproque h^{-1} dont on précisera le sens de variation.

Tracer la courbe représentative de h^{-1} .

C) 1. Déterminer le module et un argument du nombre complexe $U = \frac{\sqrt{3}+i}{4}$

2. Soit f l'application de $\mathbb{C}$ vers lui-même qui, à tout nombre complexe z , associe : $f(z) = Uz + (1+i)(1-U)$.

Montrer que f est bijective et déterminer le nombre complexe ω tel que $f(\omega) = \omega$.

3. Soit I, M et M' les points du plan complexe ayant pour affixes ω, z et $f(z)$ respectivement.

On suppose M différent de I . Donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{IM}; \overrightarrow{IM'})$ et calculer la distance IM' en fonction de la distance IM .

On note F l'application qui à tout point M associe le point M' . Préciser la nature de F et déterminer ses éléments caractéristiques.

4. Soit A_0 le point d'affixe $z_0 = -1 + 2i$. On définit, pour tout entier naturel n , $z_{n+1} = f(z_n)$.

On note A_n le point d'affixe z_n dans le plan complexe.

Calculer en fonction de n , la distance IA_n . Quelle est la limite de cette distance quand n tend vers $+\infty$.

SESSION 2008

A) 1. Trouver toutes les paires d'entiers naturels a et b tels que l'on ait :

$$\begin{cases} \text{PGCD}(a; b) = 42 \\ \text{PPCM}(a; b) = 1680 \end{cases}$$

2. Déterminer l'ensemble des entiers relatifs x tels que : $8x \equiv 7[5]$.

3. Résoudre l'équation : $(x; y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, 336x + 210y = 294$. (La deuxième question fournira une solution particulière de l'équation simplifiée).

B) Une caisse contient pêle-mêle 10 cubes rouges, 20 cubes jaunes et 5 cubes verts, tous de la même taille.

1. Quelle est la probabilité de pouvoir faire le drapeau de la République de Guinée :

a) en prenant simultanément 3 cubes ?

b) en prenant simultanément 4 cubes ?

2. Quelle est la probabilité, en prenant successivement 3 cubes l'un après l'autre, sans remise, d'obtenir dans l'ordre le drapeau de la République de Guinée.

C) On donne la fonction f définie par : $f(x) = x + \frac{e^x}{2(e^x - 2)}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et calculer les limites de f aux bornes de cet ensemble.

2. Etudier les variations de f .

3.a) Montrer que la droite (D_1) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe représentative (C) de f en $-\infty$. Préciser la position de (C) par rapport à (D_1) .

b) Montrer que la droite (D_2) d'équation $y = x + \frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe représentative (C) de f en $+\infty$. Préciser la position de (C) par rapport à (D_2) .

4. Montrer que le point de coordonnées $(\ln 2; \ln 2 + \frac{1}{4})$ est un centre de symétrie de (C) .

5. Construire (C) dans un repère orthonormé $(O; I; J)$. (unité de longueur : 2cm ; $\ln 2 \approx 0,69$).

D) On donne un rectangle $ABCD$ du plan dont les côtés $[AB]$ et $[BC]$ ont pour longueurs a et b .

Pour tout réel non nul m , on note G_m le barycentre du système de points pondérés $\{(A; m), (B; -1), (C; 1)\}$.

Pour chacune des questions ci-dessous, on donnera une solution géométrique puis une solution analytique.

1. Déterminer l'ensemble (E_1) des points G_m lorsque m décrit $\mathbb{R}^*$.

2. Déterminer l'ensemble (E_2) des points M du plan tels que :

$$\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

3. Déterminer l'ensemble (E_3) des points M du plan tels que :

$$(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})(2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0.$$

SESSION 2009

A)1) En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer le PGCD des nombres 231 et 3311.

2) Soit n un entier naturel supérieur à 2. On pose : $A(n) = 1 + 2 + \dots + n$ et $B(n) = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$.

On rappelle que, quelque soit n , $A(n) = \frac{n(n+1)}{2}$

a) Démontrer par récurrence, que quelque soit n , $B(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

b) On suppose que n est un multiple de 3. Déterminer dans ce cas, le PGCD de $A(n)$ et $B(n)$.

c) Vérifier le résultat obtenu dans le cas particulier où $n = 21$.

B) Cinq personnes se donnent rendez-vous dans un des cafés d'un village qui en compte cinq. Chaque personne choisit au hasard l'un des cinq cafés.

1) Calculer la probabilité pour que chacune des personnes ait choisit un café différent.

2) Calculer la probabilité pour que les cinq personnes se retrouvent dans le même café.

3) Calculer la probabilité pour qu'au moins deux personnes se retrouvent dans un même café.

C) Soit la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+$ par :
$$\begin{cases} f(x) = x \ln(x + \frac{1}{x}), \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 1.

b) On considère la fonction g définie pour x appartenant à $[1; +\infty[$, par $g(x) = x \ln x$ et on appelle (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Etudier g et tracer (Γ) .

c) Etudier la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Montrer que la courbe (C) de f dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ et (Γ) sont asymptotes et préciser leurs positions relatives.

d) Déterminer f' et f'' , puis étudier le sens de variation de f' et montrer que f' est positive.

Achever l'étude de la fonction f . Tracer (C) sur la même figure que (Γ) .

D) ABC est un triangle, On pose $BC = a, AC = b, AB = c$, A' est le milieu du segment $[BC]$; B' celui de $[AC]$; C' celui de $[AB]$. Soit G l'isobarycentre des sommets du triangle ABC.

1) Montrer que, pour tout point M du plan: $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + \frac{a^2+b^2+c^2}{3}$

2) En calculant de deux façons différentes $(\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC})^2$, établissez que :

$$2\vec{MA} \cdot \vec{MA'} + \vec{MB} \cdot \vec{MC} = 3MG^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{6}$$

3) On considère les points communs aux cercles de diamètre $[AA']$ et $[BC]$.

Montrer que, lorsqu'ils existent, ils appartiennent à un cercle de centre G dont on donnera le rayon en fonction de a, b, c .

SESSION 2010

Exercice1 :

I)1) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul, on a :

$$\sum_{k=1}^n k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$$

2)a) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation : $661x - 991y = 1$

b) Soit (U_n) et (V_n) les suites arithmétiques définies par :

$$\begin{cases} U_0 = 3, V_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = U_n + 991 \\ \forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} = V_n + 661 \end{cases}$$

Déterminer tous les couples (p, q) d'entiers naturels inférieurs à 2000, tels que :

$$U_p = V_q$$

II) Soit ABCD un parallélogramme. P est le point tel que : $\vec{AP} = \frac{1}{3}\vec{AB}$. Q est le symétrique du milieu de $[AD]$ par rapport à A . Démontrer que les points P, Q, C sont alignés.

Exercice2 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$

1) Déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}_+$.

2) Soit la suite (U_n) définie pour $n > 0$ par :

$$U_n = \int_{\ln(n)}^{\ln(n+1)} f(x) dx$$

Calculer U_1 et U_2 . Exprimer U_n en fonction de .

3) Montrer que (U_n) est une suite décroissante positive.

Que peut-on en déduire ? Calculer la limite de cette suite.

4) On pose : $S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$

a) Calculer S_1 , S_2 , S_3 et exprimer S_n en fonction de n .

b) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

Problème :

I) Soit f la fonction définie par : $f(0) = 0$ et pour tout réel strictement positif x par :

$$f(x) = \frac{x \ln x}{x+1}$$

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

2) Soit φ la fonction dérivable sur $]0; +\infty[$ et définie par : $\varphi(x) = \ln x + x + 1$

a) Etudier le sens de variation de φ .

b) Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique β telle que :

$0,27 \leq \beta \leq 0,28$; avec $(\varphi(0,27) \simeq -0,04$ et $\varphi(0,28) \simeq 0,007)$

3)a) Exprimer $f'(x)$ en fonction de $\varphi(x)$. En déduire les variations de f .

b) Vérifier que : $f(\beta) = -\beta$

c) Calculer la limite de f en $+\infty$. Dresser le tableau de variation de f .

4) Tracer la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . On placera en particulier les points d'abscisses : 1; 3; 4; e^2 ; 12.

On prendra: $\ln(0,27) \simeq -1,31$; $\ln(0,28) \simeq -1,27$; $\ln 2 \simeq 0,7$; $\ln 3 \simeq 1,1$; $\ln 5 \simeq 1,6$

II) 1)a) Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique α dans

$[3; 4]$. On prendra : $f(3) \simeq 0,82$ et $f(4) \simeq 1,1$

b) Démontrer que les équations : $f(x) = 1$ et $e^{1+\frac{1}{x}} = x$ sont équivalentes.

2) Soit g la fonction dérivable sur $]0; +\infty[$ et définie pour tout réel strictement positif x par : $g(x) = e^{1+\frac{1}{x}}$.

Soit (U_n) la suite définie par : $U_0 = 3$ et la relation de récurrence : $U_{n+1} = g(U_n)$.

Démontrer par récurrence que: $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in [3; 4]$; sachant que $\forall x \in [3; 4]$,

$g(x) \in [3; 4]$.

SESSION 2011

A) Dans un système de numération de base a , on considère les nombres :

$$A = \overline{211} ; B = \overline{312} ; C = \overline{133032}.$$

1) Expliquer pourquoi a doit être strictement supérieur à 3.

2)a) Sachant que $C = A \times B$, montrer que $a^3 - 3a^2 - 2a - 8 = 0$.

En déduire que a divise 8.

b) Déterminer alors a .

3) L'écriture d'un nombre dans le système décimal est 214, écrire ce dans la base 4.

4) Dans cette question on suppose que $a = 4$.

a) Ecrire A , B et C dans le système décimal.

b) Montrer alors que $C = A \times B = \text{PPCM}(A; B)$.

En déduire que l'équation : $Ax + By = 1$ a des solutions dans $\mathbb{Z}^2$.

5) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $37x + 54y = 1$. Vérifier que $(19; -13)$ est une solution de cette équation.

Résoudre cette équation.

B) Deux chasseurs Moussa et Mamadou, aperçoivent ensemble un lièvre et tirent simultanément.

1) Sachant que Moussa atteint et tue d'habitude 5 lièvres sur 6 et Mamadou 4 sur 5, quelle est la probabilité pour que le lièvre soit tué ?

2) En fait, Mamadou a tiré le premier.

a) Quelle est la probabilité pour que Moussa tue le lièvre sachant que, si Mamadou tire et manque, les chances normales pour Moussa d'atteindre le lièvre se trouve diminuée de moitié ?

b) Dans ces conditions : Mamadou a tiré le premier, puis Moussa, quelle est la probabilité pour que le lièvre d'en échapper sain et sauf ?

C) Soit g la fonction définie par : $g(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$.

1)a) Déterminer l'ensemble de définition D_g de g et démontrer que :

$$\forall x \in D_g, g(x) > x + |x|.$$

b) En déduire le signe de g sur D_g .

2) Etudier g et tracer sa courbe représentative.

3) Soit φ la fonction définie par : $\varphi(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

- a) Résoudre l'équation : $\varphi(x) = -\ln(3 - 2\sqrt{2})$ et démontrer que φ est impaire.
- b) Etudier φ et tracer sa courbe représentative.
- c) Démontrer que φ est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et que : $\forall n \in \mathbb{Z}, \varphi\left(\frac{e^n - e^{-n}}{2}\right) = n$.
- 4) Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on considère l'intégrale I_n définie par :

$$I_n = \int_1^2 \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} dx.$$

- a) Calculer I_2 et démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier naturel $n \geq 2$:

$$I_{n+1} = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + (1-n)I_n$$

- b) Etablir que pour tout nombre réel $x \in [1; 2]$, $0 \leq \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} \leq \frac{e}{x^n}$.
- c) En déduire un encadrement de I_n , puis étudier la limite éventuelle de la suite (I_n) .
- D) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct. Soit S une similitude directe de centre I transformant les points A et B d'affixes respectives $3 + i$; $3 - i$ en A' et B' d'affixes respectives $2 + 5i$ et $4 + 3i$
- 1) Déterminer les éléments caractéristiques de S .
- 2) Déterminer le barycentre des points I, A, B affectés respectivement 6; 1; 1. En déduire le barycentre des points I, A', B' affectés des mêmes coefficients.

SESSION 2012

Exercice1 : 1) Calculer le PGCD de $4^5 - 1$ et de $4^6 - 1$.

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 0, u_1 = 1$, et pour tout entier naturel n , $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n$.

- 2) Calculer les termes u_2, u_3 et u_4 de la suite (u_n) .
- 3)a) Montrer que la suite (u_n) vérifie, pour tout entier naturel n ; $u_{n+1} = 4u_n + 1$.
- b) Montrer que, pour tout entier naturel n , u_n est un entier naturel.
- c) En déduire, pour tout entier naturel n , le PGCD de u_n et u_{n+1} .
- 4) Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n + \frac{1}{3}$.
- a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme v_0 .
- b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .
- c) Déterminer, pour tout entier naturel n , le PGCD de $4^{n+1} - 1$ et de $4^n - 1$.

Exercice2 :

A tout point M du plan de coordonnées $(x; y)$, on associe son affixe $z = x + iy$. Soit S l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M_1 d'affixe z_1 telle que : $z_1 = (-1 + i)z + 1 + 4i$.

- 1) Donner la nature de S et déterminer ses éléments caractéristiques.
- 2) Calculer les coordonnées x et y du point M en fonction de x_1 et y_1 de M_1 .
- 3) Déterminer les équations des transformés par S de la droite d'équation $x = 0$ et de la droite (D') d'équation $y = x - 1$.

Problème :

A) On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*$;
 $g(x) = 1 + x - x \ln x$

- 1) Etudier la continuité et la dérivabilité de g en 0.
- 2) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.
- 3a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\beta \in]0; +\infty[$.
- b) Justifier que $3,5 < \beta < 3,6$.
- 4) Tracer (C_g) .

B) On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{\ln x}{1+x} + 2$; $\forall x \in]0; +\infty[$.

- 1a) Démontrer que $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{x(1+x)^2}$
- b) Dresser le tableau de variation de f .
- 2) Déterminer les coordonnées du point d'intersection A de la courbe (C_f) avec la droite (D) d'équation $y = 2$.
- 3) Construire la courbe (C_f) dans le même repère $(O; I; J)$.
- C) a) Justifier que $\ln \beta = \frac{\beta+1}{\beta}$.
- b) A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que :

$$\int_1^\beta x \ln x \, dx = \frac{(\beta+1)^2}{4}.$$

.....**SESSION 2013**.....

Exercice1 :

- 1) On considère l'équation (E) : $8x + 5y = 1$, où $(x; y)$ est un couple de nombres entiers relatifs. Donner une solution particulière de l'équation (E) et résoudre l'équation (E).

2) Soit N un nombre naturel tel qu'il existe un couple $(a ; b)$ de nombres entiers

$$\text{vérifiant : } \begin{cases} N = 8a + 1 \\ N = 5b + 2 \end{cases}$$

a) Montrer que le couple $(a ; -b)$ est solution de (E).

b) Quel est le reste, dans la division de N par 40 ?

3) Résoudre l'équation $8x + 5y = 100$, où $(x ; y) \in \mathbb{Z}^2$.

Exercice2 :

On considère dans le plan, un triangle ABC rectangle en A tel que $AB=2a$ et $AC=a$, où a est un nombre réel strictement positif donné.

1)a) Déterminer et construire le barycentre G des points pondérés

$$\{(A; 1), (B; -1), (C; 1)\}.$$

b) Déterminer et construire l'ensemble (C) des points M du plan tels que :

$$\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\|.$$

2) Soit H le point du plan défini par : $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

Démontrer que le point H est le barycentre des points pondérés

$$(A ; 3); (B ; 1) \text{ et } (C ; -2).$$

Problème :

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^2}{2} + x - 2x \ln x$ si $x \in]0; +\infty[$ et $f(0) = 0$. On appelle (C) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé $(O; I; J)$.

A) On considère la fonction numérique g définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = x - 1 - 2 \ln x.$$

1) Calculer les limites respectives de g à droite en 0 et en $+\infty$.

2) On admet que la fonction g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on note g' sa dérivée.

Déterminer g' et étudier son signe. En déduire le sens de variation de g et dresser son tableau de variation. Vérifier que $g(1) = 0$.

3) Démontrer qu'il existe un unique réel α tel que $\alpha \in]3; 4[$ et $g(\alpha) = 0$.

4) Déduire des questions précédentes, le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

B) On considère la fonction numérique h définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ par :

$$h(x) = 2 \ln x + 1$$

1) Démontrer que : $\forall x \in]3; 4[, h(x) \in]3; 4[$.

2) On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 3,5 \\ u_{n+1} = h(u_n) \end{cases}$

a) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}; u_n \in [3; 4]$

b) Calculer l'arrondi d'ordre 3 de u_1 . Démontrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

c) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. (On admettra que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la valeur α précédente et on prendra $\alpha = 3,5$).

C)1) Démontrer que la fonction f est continue à droite en 0.

2) La fonction f est-elle dérivable à droite en 0 ? Justifier votre réponse. En donner une interprétation graphique

3) Calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

4) Calculer la limite de $\frac{f(x)}{x}$ quand x tend vers $+\infty$ puis interpréter graphiquement ce résultat.

5) La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on note f' sa dérivée. Démontrer que : $\forall x \in]0; +\infty[; f'(x) = g(x)$

6) En utilisant les résultats de A), déterminer le signe de f' et dresser le tableau de variation de f . Tracer la courbe (C).

7) Soit t un nombre réel tel que : $0 < t < 1$. En utilisant une intégration par parties, calculer l'aire $A(t)$ de la partie du plan comprise entre la courbe (C), la droite (OI) et les droites d'équations $x = t$ et $x = 1$.

Calculer la limite de $A(t)$ quand t tend vers 0.

.....SESSION 2014.....

Exercices : (8 points)

A) On considère les trois entiers naturels a, b, c qui s'écrivent dans la base n :

$$a = 111; b = 114; c = 13054$$

1) Sachant que $c = ab$; déterminer n , puis l'écriture de chacun des nombres a, b, c dans le système décimal.

(2 points)

2) Vérifier, en utilisant l'algorithme d'Euclide, que a et b sont premiers entre eux.

En déduire les solutions dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $ax + by = 1$. (2 points)

B) Une variable aléatoire X prend les valeurs 1; -1 et 2 avec les probabilités e^a, e^b, e^c , où a, b, c sont en progression arithmétique. On suppose que l'espérance mathématique $E(X)$ de X est égale à 1.

1) Calculer a, b, c et la variance $V(X)$ de X . **(1,5 point)**

2) Soit A, B, C trois points d'abscisses respectives 1; -1 et 2 d'une droite graduée (Δ) .

a) Calculer l'abscisse du point G barycentre de $\{(A, 1); (B, 2); (C, 4)\}$. **(0,5 point)**

b) On pose : $\varphi(M) = \frac{1}{7}(MA^2 + 2MB^2 + 4MC^2)$; où M est un point de (Δ) .

Montrer que $\varphi(G) = V(X)$. **(0,5 point)**

c) Déterminer l'ensemble (Γ) des points M de (Δ) tels que $\varphi(M) = 3$. **(1,5 point)**

Problème : (12 points)

Partie A : (3,5 points)

On considère la fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $g(x) = (1 - x)e^{1-x} - 1$

1)a) Justifier que la limite de g en $+\infty$ est -1 . **(0,25 point)**

b) Déterminer la limite de g en $-\infty$. **(0,25 point)**

2)a) Démontrer que, pour tout x élément de $\mathbb{R}$, $g'(x) = (x - 2)e^{1-x}$ **(1 point)**

b) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation. **(1 point)**

3)a) Démontrer que l'équation $x \in \mathbb{R}, g(x) = 0$ admet une solution unique α . **(0,5 point)**

b) Justifier que : $0,4 < \alpha < 0,5$ **(0,25 point)**

4) En déduire que : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty; \alpha[, g(x) > 0 \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) < 0 \end{cases}$ **(0,25 point)**

Partie B : (7 points)

On considère la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $f(x) = xe^{1-x} - x + 2$.

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . L'unité graphique est 2 cm.

1) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. **(0,5 point)**

2)a) Démontrer que f est une primitive de g . **(0,5 point)**

b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation. **(1 point)**

3)a) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = -x + 2$ est une asymptote oblique à (C) en $+\infty$. **(0,25 point)**

b) Etudier la position relative de (D) et (C) . **(0,5 point)**

- 4) Démontrer que (C) admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction (OJ) . **(0,25 point)**
- 5) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1. **(0,5 point)**
- 6) Démontrer que $f(\alpha) = 1 - \alpha + \frac{1}{1-\alpha}$ **(1 point)**
- 7) Justifier que, pour tout nombre réel x , $f(-x + 2) = e^{x-1}f(x)$ **(0,75 point)**
- 8) On admet que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions. On appelle β l'une des solutions.

Démontrer que $-\beta + 2$ est l'autre solution. **(0,75 point)**

- 9) Tracer (D) , (T) et (C) . (On prendra $\alpha = 0,4$ et $\beta = 2,5$) **(1 point)**

Partie C : (1,5 point)

Soit λ un nombre réel strictement positif et $A(\lambda)$ l'aire en cm^2 de la partie du plan délimitée par (C) , la droite (D) d'équation $y = -x + 2$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \lambda$.

- 1) Calculer $A(\lambda)$ à l'aide d'une intégration par parties. **(1 point)**
- 2) Déterminer la limite de $A(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$. **(0,5 point)**

.....**SESSION 2015**.....

Exercice 1 : (4 points)

- 1) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, on a : **(1,5 point)**

$$\sum_{k=1}^n k(n-k) = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}$$

- 2) Démontrer que pour tout entier naturel n : $10^{9n+2} + 10^{6n+1} + 1$ est divisible par 111. **(1 point)**
- 3)a) Décomposer 469 en produit de facteurs premiers. **(0,5 point)**
- b) Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation : $x^3 - y^3 = 469$. **(1 point)**

Exercice 2 : (5 points)

Le plan complexe est muni du repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ direct. Soit $z \in \mathbb{C}$ où $\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes. Posons $z = x + iy$, x et y réels.

- 1) Soit $M(z)$ un point du plan complexe et $M'(z')$ l'image de M par la rotation de centre O et d'angle θ . Exprimer z' en fonction de z et θ . **(0,5 point)**
- 2) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) d'inconnue z qui suit. (E) :

$$\frac{1}{2}z^2 + 4z\sqrt{3} + 32 = 0$$

Résoudre l'équation (E). **(0,5 point)**

3) On considère les points A et B d'affixes respectives $a = -4\sqrt{3} - 4i$ et $b = -4\sqrt{3} + 4i$.

Calculer OA, OB et AB. En déduire la nature du triangle OAB. **(1,25 point)**

4) On désigne par C le point d'affixe $c = \sqrt{3} + i$ et par D son image par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Déterminer l'affixe de D. **(0,25 point)**

5) On appelle G le barycentre des points pondérés (O, 1); (D, -1) et (B, -1).

a) Montrer que le point G a pour affixe $g = -4\sqrt{3} + 6i$ **(0,5 point)**

b) Placer les points A, B, C et G sur une figure (Unité graphique : 1 cm) **(1 point)**

6) Déterminer une mesure en radians de l'angle $(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GC})$ **(0,5 point)**

En déduire la nature du triangle GAC. **(0,5 point)**

Problème : (11 points)

Partie A : (3,5 points)

Soit la fonction numérique dérivable sur $]0; +\infty[$ et définie par :

$$g(x) = -\frac{2x+1}{x^2} + \ln x$$

1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ **(0,25 point)** b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ **(0,25 point)**

2) a) Démontrer que : $\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) = \frac{x^2+2x+2}{x^3}$ **(1 point)**

b) En déduire le sens de variation de g. **(0,5 point)**

c) Dresser le tableau de variation de la fonction g. **(0,5 point)**

3) a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0, \forall x \in]x; +\infty[$ admet une solution unique α . **(0,25 point)**

b) Justifier que $2,55 < \alpha < 2,56$. **(0,5 point)**

c) Démontrer que : $\begin{cases} \forall x \in]0; \alpha[, g(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) > 0 \end{cases}$ **(0,25 point)**

Partie B : (6 points)

On considère la fonction dérivable sur $]0; +\infty[$ et définie par :

$$f(x) = \left(\frac{1}{x} - \ln x\right) e^{-x}.$$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthogonal (O, I, J) .

(Unités graphiques : $OI = 2\text{cm}$ et $OJ = 10\text{cm}$).

1)a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ puis donner une interprétation graphique du résultat. **(0,5 point)**

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ puis donner une interprétation graphique du résultat. **(0,5 point)**

2) Démontrer que : $f(\alpha) = -\frac{1+\alpha}{\alpha^2} e^{-\alpha}$ **(1 point)**

3)a) Démontrer que : $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = e^{-x} \times g(x)$ **(1 point)**

b) En utilisant la partie A, déterminer les variations de f . **(1,25 point)**

c) Dresser le tableau de variation de f . **(0,25 point)**

4) Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1 est : $y = -\frac{3}{e}x + \frac{4}{e}$ **(0,5 point)**

5) Construire la droite (T) et la courbe (C) dans le plan muni du repère orthogonal (O, I, J) .

On prendra $\alpha = 2,6$. **(1 point)**

Partie C : (1,5 point)

1) Soit h la fonction dérivable sur $]0; +\infty[$ et définie par :

$$h(x) = e^{-x} \ln x$$

Démontrer que h est une primitive de f sur $]0; +\infty[$. **(0,25 point)**

2) Soit λ un nombre réel tel que $\lambda > 3$.

a) Calculer, en cm^2 et en fonction de λ , l'aire $A(\lambda)$ de la partie du plan comprise entre (C), (OI) et les droites d'équations $x = 3$ et $x = \lambda$. **(1 point)**

b) Calculer $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda)$. **(0,25 point)**

.....SESSION 2016.....

Exercice 1 : (4 points)

Dans une urne, il y a n boules rouges et $2n$ boules blanches. On tire simultanément p boules de l'urne avec $p < n$.

1) Si $n = 5$ et $p = 4$, calculer les probabilités des événements suivants :

A : « obtenir deux boules rouges et deux boules blanches ».

B : « obtenir au moins une boule blanche ». (On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles)

- 2) On suppose que $p = 2$ et n un entier naturel quelconque tel que $n \geq 2$.
- a) Calculer la probabilité P_n d'obtenir deux boules de même couleur.
- b) Démontrer que la suite $(P_n)_{n \geq 2}$ est majorée par 1. Quel est le sens de variation de $(P_n)_{n \geq 2}$?
- c) Dédurre de la question précédente que $(P_n)_{n \geq 2}$ est convergente et calculer sa limite.

Exercice 2 : (6 points)**Partie A : (4 points)**

- I) 1) On désigne par n un entier naturel quelconque, on pose :
 $A = n - 1$ et $B = n^2 - 3n + 6$
- a) Montrer que le PGCD de A et B est égal au PGCD de A et 4.
- b) Déterminer suivant les valeurs de n le PGCD de A et B.
- 2) Pour quelles valeurs de l'entier relatif n , le nombre $\frac{n^2 - 3n + 6}{n - 1}$ est-il entier relatif ?
- II) Pour tout couple (a, b) d'entiers relatifs, on désigne par μ leur PPCM et par δ leur PGCD.
- 1) Déterminer les couples (a, b) d'entiers naturels tels que : $2\mu + 3\delta = 11$.
- 2) Dresser la liste des diviseurs de 108.
- Déterminer les couples (a, b) d'entiers naturels tels que :
 $\mu - 3\delta = 108$ et $10 < \delta < 15$.

Partie B : (2 points)

On considère trois points non alignés A, B et C de l'espace.

On désigne par G_1 le barycentre des points pondérés (A,3), (B,2) et (C,-1) et par G_2 le barycentre des points pondérés (A,2), (B,1) et (C,1).

- 1)a) Calculer $\overrightarrow{G_1 G_2}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
- b) En déduire que $G_1 \neq G_2$.
- 2) A tout point M de l'espace on fait correspondre les points M_1 et M_2 tels que :
 $\overrightarrow{MM_1} = 3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{MM_2} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.
- a) Démontrer que si M décrit une droite (D) de l'espace, M_1 décrit la droite (Δ) image de (D) par une homothétie que l'on précisera.
- b) Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{M_1 M_2}$ reste constant quand M décrit l'espace.
- 3) Déterminer l'ensemble (S) des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{MM_1} \times \overrightarrow{MM_2} = 0$.

Problème : (10 points)**Partie A :**

Dans tout le problème, les fonctions étudiées sont dérivables sur $]0; +\infty[$.

On considère la fonction h définie sur $]0; +\infty[$ par : $h(x) = 1 + \frac{1}{x^2} - 2\ln x$

1) Calculer les limites de h en $+\infty$ et à droite en 0.

2) On note h' la dérivée de h ; démontrer que : $\forall x \in]0; +\infty[, h'(x) = \frac{-2(1+x^2)}{x^3}$.

3) Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique x_0 dans $]1; +\infty[$.
En déduire le signe h .

Partie B :

On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x^2(1 - \ln x) + 1 + \ln x$

1) Calculer les limites de g en $+\infty$ et à droite en 0.

2) On note g' la dérivée de g ; démontrer que : $\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) = xh(x)$.
Démontrer que $g(x_0) > 0$.

3) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique x_1 dans $]0; 1[$

4) On admet que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique x_2 dans $]x_0; +\infty[$

a) Déterminer le signe de g .

b) Démontrer que $x_1 \in]0,3; 0,4[$ et $x_2 \in]3,3; 3,4[$

Partie C :

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(0) = 0$ et $\forall x \in$

$]0; +\infty[, f(x) = \frac{x \ln x}{1+x^2}$

1) Démontrer que f est continue à droite en 0 mais non dérivable à droite en 0.

2) Calculer la limite de f en $+\infty$ puis interpréter graphiquement ce résultat.

3) On note f' la dérivée de f ; démontrer que : $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x^2)^2}$

4) Dresser le tableau de variation de f .

5) Démontrer que si α est une solution de l'équation $g(x) = 0$ alors : $\ln \alpha = \frac{\alpha^2+1}{\alpha^2-1}$ et en déduire $f(\alpha)$

6) En déduire que $f(x_1) < 0$ et $f(x_2) > 0$. Vérifier que $f(1) = 0$, puis en déduire le signe de f .

7) Tracer la courbe représentative (C_f) de f dans le plan muni du repère orthogonal (O, I, J) .

(On prendra pour unités : 3 cm en abscisses ; 8 cm en ordonnées, $x_1 \approx 0,35$ et $x_2 \approx 3,35$).

.....SESSION 2017.....

Exercice1 : (4 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$

1) Déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}_+$.

2) Soit la suite (U_n) définie pour $n > 0$ par :

$$U_n = \int_{\ln(n)}^{\ln(n+1)} f(x) dx$$

Exprimer U_n en fonction de n .

3) Montrer que (U_n) est une suite décroissante positive. Que peut-on en déduire ?

Calculer la limite de U_n lorsque n tend vers $+\infty$.

4) On pose : $S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$

a) Calculer S_1 , S_2 et S_3 . Exprimer S_n en fonction de n .

b) Calculer la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 2 : (4 points)

Une variable aléatoire X prend les valeurs 1; -1 et 2 avec les probabilités respectives e^α , e^β , e^γ , où α, β, γ sont en progression arithmétique.

On suppose que l'espérance mathématique $E(X)$ de X est égale à 1.

1) Calculer α, β, γ et la variance $V(X)$ de X .

2) Soit A, B, C trois points d'abscisses respectives 1; -1 et 2 d'une droite graduée (Δ) .

a) Calculer l'abscisse du point G barycentre de $\{(A, 1); (B, 2); (C, 4)\}$.

b) On pose : $\varphi(M) = \frac{1}{7}(MA^2 + 2MB^2 + 4MC^2)$; où M est un point de (Δ) .

Montrer que $\varphi(G) = V(X)$.

c) Déterminer l'ensemble (Γ) des points M de (Δ) tels que $\varphi(M) = 3$.

Problème : (12 points)**Partie A :**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x} \ln(1 + e^x)$. On note (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$. L'unité graphique est 1cm sur l'axe des abscisses et 10cm sur l'axe des ordonnées.

1) a) On rappelle que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$. Déterminer la limite de f en $-\infty$

b) Vérifier que pour tout réel x : $f(x) = \frac{x}{e^x} + e^{-x} \ln(1 + e^{-x})$.

Déterminer la limite de f en $+\infty$

c) En déduire que la courbe (C) admet deux asymptotes que l'on précisera.

2) On considère la fonction g définie sur l'intervalle $] -1 ; +\infty[$ par :

$$g(t) = \frac{t}{1+t} - \ln(1+t)$$

a) Démontrer que la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$

b) En déduire le signe de $g(t)$ lorsque $t > 0$.

3) a) Calculer $f'(x)$ et l'exprimer en fonction de $g(e^x)$, f' désignant la fonction dérivée de f .

b) En déduire le sens de variation de la fonction f puis dresser son tableau de variation.

4) Tracer les asymptotes à la courbe (C) et la courbe (C).

Partie B

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

1) Etudier le sens de variation de la fonction F

2) a) Vérifier que, pour tout nombre réel t , $\frac{1}{1+e^t} = 1 - \frac{e^t}{1+e^t}$ et calculer $\int_0^x \frac{dt}{1+e^t}$

b) En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, le calcul de $F(x)$

c) Vérifier que $F(x)$ peut s'écrire sous les formes suivantes :

$$F(x) = x - \ln(1 + e^x) - f(x) + 2\ln 2 \quad (1)$$

$$F(x) = \ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right) - f(x) + 2\ln 2 \quad (2)$$

3) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$

4) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} (F(x) - x)$. Donner une interprétation graphique de ce résultat. On donne : $\ln 2 \approx 0,69$

.....SESSION 2018.....

Exercice 1 : (5 points)

1) Calculer $(1 + \sqrt{6})^2$; $(1 + \sqrt{6})^4$; $(1 + \sqrt{6})^6$

b) Appliquer l'algorithme d'Euclide à 847 et 342. Que peut-on en déduire ?

2) Soit n un entier naturel non nul. On note a_n et b_n les entiers naturels tels que $(1 + \sqrt{6})^n = a_n + b_n \sqrt{6}$

Que valent a_1 et b_1 ?

D'après les calculs de la question 1)a), donner d'autres valeurs de a_n et b_n .

a) Calculer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n .

b) Démontrer que, si 5 ne divise pas $a_n + b_n$, alors 5 ne divise pas non plus $a_{n+1} + b_{n+1}$.

En déduire que, quelque soit n entier naturel non nul, 5 ne divise pas $a_n + b_n$.

c) Démontrer que, si a_n et b_n sont premiers entre eux, alors a_{n+1} et b_{n+1} sont premiers entre eux.

En déduire que, quelque soit n entier naturel non nul, a_n et b_n sont premiers entre eux.

Exercice 2 : (4 points) Le plan est muni du repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

A tout point M d'affixe z , on fait correspondre le point M' d'affixe z' telle que $z' = z^2 - 4z$

1) Calculer les coordonnées $(x'; y')$ du point M' en fonction des coordonnées $(x; y)$ du point M .

2)a) Démontrer que l'ensemble (H) des points M du plan tels que z' soit un nombre imaginaire pur est une hyperbole.

b) Préciser dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, les coordonnées du centre Ω , celles des sommets et les équations des asymptotes de (H) .

3) Soit P le point d'affixe $-\frac{5}{2} - 2i$

Déterminer les points M du plan tels que le quadrilatère $OMM'P$ soit un parallélogramme.

Problème : (11 points)**Etude préliminaire :**

On considère la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = \ln(1+x) - x$.

- 1) Etudier le sens de variation de g .
- 2) En déduire que pour tout réel a positif ou nul, $\ln(1+a) \leq a$.

Partie A :

On considère la fonction f_1 définie sur $[0; +\infty[$ par $f_1(x) = \ln(e^x + x) - x$

- 1) Calculer $f'_1(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$ et en déduire le sens de variation de la fonction f_1 .

- 2) Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$,

$$f_1(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{e^x}\right).$$

En déduire la limite de f_1 en $+\infty$.

- 3) Dresser le tableau de variation de f_1 .

Partie B :

On considère la fonction f_k définie sur $[0; +\infty[$ par $f_k(x) = \ln(e^x + kx) - x$

Soit (C_k) la courbe représentative de la fonction f_k dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, (unités graphiques : 5 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées)

- 1) Calculer $f'_k(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$ et en déduire le sens de variation de la fonction f_k .

- 2) Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$,

$$f_k(x) = \ln\left(1 + k\frac{x}{e^x}\right).$$

En déduire la limite de f_k en $+\infty$.

- 3) a) Dresser le tableau de variation de f_k .

- b) Montrer que pour tout réel x de $[0; +\infty[$, on a $f_k(x) \leq \frac{k}{e}$

- 4) Déterminer l'équation de la tangente (T_k) à (C_k) au point O.

- 5) Soit p et m deux réel strictement positifs tels que $p < m$. Etudier la position relative de (C_p) et (C_m) .

- 6) Tracer les courbes (C_1) et (C_2) ainsi que leurs tangentes respectives (T_1) et (T_2) en O.

Partie C :

Soit λ un réel strictement positif, on note $A(\lambda)$ l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe (C_k) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$

1) Sans calculer $A(\lambda)$, montrer que $A(\lambda) \leq k \int_0^\lambda x e^{-x} dx$ (on pourra utiliser le résultat de la question préliminaire).

2) Calculer à l'aide d'une intégration par parties l'intégrale $\int_0^\lambda x e^{-x} dx$.

3) On admet que $A(\lambda)$ admet une limite en $+\infty$. Montrer que $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda) \leq k$.

Interpréter graphiquement ce résultat.

SESSION 2019**Exercice 1 :**

Les suites d'entiers naturels (x_n) et (y_n) sont définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} x_0 = 3 \text{ et } x_{n+1} = 2x_n - 1 \\ y_0 = 1 \text{ et } y_{n+1} = 2y_n + 3 \end{cases}$$

1) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $x_n = 2^{n+1} + 1$.

2)a) Calculer le PGCD de x_8 et x_9 , puis celui de x_{2002} et x_{2003} .

Que peut-on en déduire pour x_8 et x_9 d'une part, pour x_{2002} et x_{2003} d'autre part ?

b) x_n et x_{n+1} sont-ils premiers entre eux pour tout entier naturel n ?

3) a) Démontrer que pour tout entier naturel n , $2x_n - y_n = 5$.

b) Exprimer y_n en fonction de n .

c) En utilisant les congruences modulo 5, étudier suivant les valeurs de l'entier p le reste de la division euclidienne de 2^p par 5.

d) On note d_n le PGCD de x_n et y_n pour tout entier naturel n .

Démontrer que l'on a $d_n = 1$ ou $d_n = 5$; en déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que x_n et y_n soient premiers entre eux.

Exercice 2 :

A) Une urne contient n boules blanches ($n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$), 5 boules rouges et 3 boules vertes.

On tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne.

1) Quelle est la probabilité de tirer deux boules blanches ?

2) On note $p(n)$ la probabilité de tirer deux boules de même couleur.

Montrer que $p(n) = \frac{n^2 - n + 26}{(n+8)(n+7)}$

B) Pour les questions suivantes, $n = 4$

1) Calculer $p(4)$

2) Un tirage consiste à tirer simultanément et au hasard deux boules de l'urne.

Un joueur effectue deux tirages indépendants, en remettant dans l'urne avant le second tirage les deux boules tirées la première fois.

Il mise au départ la somme de 30 francs.

Pour chaque tirage :

- Si les deux boules sont de même couleur il reçoit alors 40 francs ;
- Si elles sont de couleurs différentes, il reçoit alors 5 francs ;

On appelle gain du joueur la différence, à l'issue des deux tirages, entre la somme perçue par le joueur et sa mise initiale (ce gain peut être positif ou négatif).

On désigne par X la variable aléatoire égale au gain du joueur.

a) Quelles sont les valeurs prises par X ?

b) Déterminer la loi de probabilité de X .

c) Calculer l'espérance de X .

Problème :

Partie A :

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2e^x + 2x - 7$

1) Etudier les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.

2) Etudier le sens de variation de la fonction g sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation.

3) Justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α tel que $0,940 < \alpha < 0,941$

4) Etudier le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie B :

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x - 5)(1 - e^{-x})$.

On note (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) Etudier le signe de f sur $\mathbb{R}$.

2) Etudier les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

3) Calculer $f'(x)$, où f' désigne la fonction dérivée de f , et vérifier que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe. Dresser le tableau de variation de f .

4) a) Démontrer l'égalité : $f(\alpha) = \frac{(2\alpha-5)^2}{2\alpha-7}$

b) Etudier le sens de variation de la fonction $h : x \mapsto \frac{(2x-5)^2}{2x-7}$ sur l'intervalle $\left]-\infty; \frac{5}{2}\right]$

En déduire, à partir de l'encadrement de α obtenu dans la partie A, un encadrement d'amplitude 10^{-2} de $f(\alpha)$.

5) Démontrer que la droite (D) , d'équation $y = 2x - 5$, est asymptote à (C) en $+\infty$. Préciser la position de (C) par rapport à (D) .

6) Tracer la droite (D) et la courbe (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 2 cm).

Parti C :

A l'aide d'une intégration par parties, calculer en cm^2 l'aire A de la portion du plan délimitée par la courbe (C) , l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \frac{5}{2}$.

Partie D :

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on considère les points A_n, B_n et C_n , d'abscisse n appartenant respectivement à l'axe des abscisses, à la droite (D) et à la courbe (C) ; soit u_n le réel défini par $u_n = \frac{C_n B_n}{A_n B_n}$

1) Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a :

$$u_n = \frac{2n-5-f(n)}{2n-5}$$

2) a) Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

b) Calculer la limite de la suite (u_n) . Pouvait-on prévoir ce résultat ?

SESSION 2020

Exercice 1 : (05 points)

Pour tout entier naturel n non nul, on considère les nombres :

$$a_n = 4 \times 10^n - 1; b_n = 2 \times 10^n - 1; c_n = 2 \times 10^n + 1$$

1) a) Calculer $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3$ et c_3 .

b) Montrer que a_n et c_n sont divisibles par 3.

c) Montrer, en utilisant la liste des nombres premiers inférieurs à 100 donnée ci-dessous, que b_3 est premier.

d) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $b_n \times c_n = a_{2n}$.

En déduire la décomposition en facteurs premiers de a_6 .

e) Montrer que $\text{PGCD}(b_n; c_n) = \text{PGCD}(b_n; 2)$.

En déduire que b_n et c_n sont premiers entre eux.

- 2) On considère l'équation (E) : $b_3x + c_3y = 1$ d'inconnues les entiers relatifs x et y .
- a) Justifier le fait que l'équation (E) possède au moins une solution.
- b) En appliquant l'algorithme d'Euclide aux nombres c_3 et b_3 , déterminer une solution particulière de (E).
- c) Résoudre l'équation (E).

Liste des nombres premiers inférieurs à 100 :

2 – 3 – 5 – 7 – 11 – 13 – 17 – 19 – 23 – 29 – 31 – 37 – 41 –
43 – 47 – 53 – 59 – 61 – 67 – 71 – 73 – 79 – 83 – 89 – 97

Exercice 2 : (05 points)

Partie1 :

On considère la fonction p définie sur $\forall z \in \mathbb{C}$, $p(z) = z^3 - (3 + 2i)z^2 + (1 + 5i)z + 2 - 2i$

- 1) a) Calculer $p(i)$.
- b) Déterminer deux nombres complexes a et b tels que : $p(z) = (z - i)(z^2 + az + b)$
- 2) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 - (3 + i)z + 2 + 2i = 0$.
- 3) En déduire dans $\mathbb{C}$ les solutions de l'équation (E) : $p(z) = 0$.

Partie2 :

Le plan est muni d'un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$ d'unité 5 cm.

On pose $z_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \frac{1+i}{2}z_n$

On note A_n le point du plan d'affixe z_n

- 1) a) Calculer z_1 et z_2
- b) Placer les points A_0 , A_1 et A_2 dans le plan complexe.
- 2) On considère la suite U définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = |z_{n+1} - z_n|$
- a) Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = \frac{\sqrt{2}}{2} |z_n|$

b) Démontrer que la suite U est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et de premier terme $\sqrt{2}$

c) Exprimer U_n en fonction de n .

Problème : (10 points)

Partie A : On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1} + \ln x$

- 1) Déterminer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.
- 2) Démontrer que pour tout réel x appartenant à $]0; +\infty[$,

$$g'(x) = \frac{(x^2+1)^2 - 2x(1-x^2)}{x(x^2+1)^2}$$

- 3) a) Démontrer que pour tout réel x appartenant à $]0; +\infty[$, $2x(1 - x^2) < (x^2 + 1)^2$
- b) En déduire le signe de $g'(x)$.

c) Dresser le tableau de variation de g .

4) a) Démontrer que 1 est l'unique solution de l'équation $g(x) = 0$

b) Démontrer que : $g(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$ et $g(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$

Partie B :

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = x \ln x - \ln(x^2 + 1) & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ et

(C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O, I, J) . (Unité graphique : 1 cm en abscisse et 2 cm en ordonnée).

1) Etudier la continuité de f en 0.

2) Démontrer que la courbe (C) admet au point d'abscisse 0 une demi-tangente verticale.

3) Calculer la limite de f en $+\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. En déduire une interprétation graphique.

4) a) Démontrer que pour tout réel x appartenant à $]0; +\infty[$, $f'(x) = g(x)$

b) Déterminer le sens de variation de f

c) Dresser le tableau de variation de f

5) a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0; +\infty[$

b) Vérifier que : $2,22 < \alpha < 2,23$

6) Démontrer que pour tout réel x appartenant à $]0; 1]$, $-\ln 2 \leq f(x) < 0$

7) Construire (C) dans le repère (O, I, J) . On prendra $\alpha = 2,22$

SESSION 2021

Exercice1 : (05 points)

Une variable aléatoire X prend les valeurs 1; -2 et 3 avec les probabilités respectives $\ln \alpha, \ln \beta, \ln \gamma$, où α, β, γ sont, dans cet ordre, les termes consécutifs d'une suite géométrique. On suppose que l'espérance mathématique $E(X)$ de X est égale à 1.

1) Calculer α, β, γ ainsi que la variance $V(X)$ et l'écart type $\sigma(X)$.

2) Dans le plan (P) , on considère une droite (D) munie d'un repère normé $(O, \vec{u})$ et les points A, B, C de (D) d'abscisses respectives 1; -2; 3.

a) Calculer l'abscisse du barycentre G des points A, B, C affectés des coefficients respectifs $\frac{1}{6}; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}$.

b) Soit φ l'application de (P) dans $\mathbb{R}$ définie par, pour tout $M \in (P)$,

$$\varphi(M) = \frac{1}{6}MA^2 + \frac{1}{3}MB^2 + \frac{1}{2}MC^2$$

Calculer $\varphi(G)$ et montrer que $\varphi(G) = V(X)$.

c) Déterminer et construire l'ensemble (C) des points M de (P) tels que $\varphi(M) = 9$.

Exercice2 : (04 points)

Soit ABC un triangle équilatéral de côté a , I et O les points tels que :

$$\vec{IC} = 2\vec{BI} \text{ et } \vec{AO} = 3\vec{IO}.$$

1) Faire une figure.

2) Ecrire O comme barycentre des points A, B et C.

3) En déduire que : $2\vec{BO} = \vec{AC}$.

4) Retrouver les égalités suivantes : $OB^2 = \frac{a^2}{4}$; $OA^2 = \frac{7a^2}{4}$ et $OC^2 = \frac{3a^2}{4}$.

5) Justifier que le triangle AOC est rectangle en C.

6) On note (Γ) l'ensemble des points M du plan tels que : $-MA^2 + 2MB^2 + MC^2 = a^2$.

a) Vérifier que le point C appartient à l'ensemble (Γ) .

b) En déduire l'ensemble (Γ) puis construire (Γ) .

Problème : (11 points)

Partie A : Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2e^x - x - 2$.

1) Déterminer la limite de g en $-\infty$ et la limite de g en $+\infty$.

2) Etudier le sens de variation de g , puis dresser son tableau de variation.

3) On admet que l'équation $g(x) = 0$ a exactement deux solutions réelles.

a) Vérifier que 0 est l'une de ces solutions.

b) L'autre solution est appelée α . Montrer que $-1,6 \leq \alpha \leq -1,5$.

4) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs du réel x .

Partie B : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} - (x+1)e^x$.

1) Déterminer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$. (On pourra mettre e^{2x} en facteur).

2) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe. Etudier le sens de variation de f .

3) Montrer que $f(\alpha) = -\frac{\alpha^2+2\alpha}{4}$, où α est défini dans la partie A.

En déduire un encadrement de $f(\alpha)$. (On rappelle que $-1,6 \leq \alpha \leq -1,5$).

4) Etablir le tableau de variation de f .

5) Tracer la courbe (C) , représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique 2 cm).

Partie C :

1) Soit m un réel négatif. Interpréter graphiquement l'intégrale $\int_m^0 f(x) dx$. (On justifiera la réponse).

2)a) Calculer $\int_m^0 xe^x dx$ à l'aide d'une intégration par parties.

b) En déduire $\int_m^0 f(x) dx$.

3) Calculer la limite de $\int_m^0 f(x) dx$, lorsque m tend vers $-\infty$.

SESSION 2022

Exercice1 : (05 points)

Soit la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :
$$\begin{cases} U_1 = \frac{5}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, U_{n+1} = 3 - \frac{n}{2(n+1)} \times (3 - U_n) \end{cases}$$

- 1) Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n < 3$
- 2) a. Justifier que $U_{n+1} - U_n = \frac{n+2}{2(n+1)} \times (3 - U_n)$
b. Etudier ainsi la monotonie de (U_n)
- 3) Montrer que (U_n) est convergente.
- 4) On pose : $V_n = n(3 - U_n)$ où $n \in \mathbb{N}^*$
a. Prouver que (V_n) est une suite géométrique.
b. Calculer V_n en fonction de n .
- 5) a. En déduire le terme général de (U_n)
b. Calculer ainsi la limite de (U_n)

Exercice2 : (04 points)

Une université propose aux étudiants trois orientations et trois seulement : une filière A, une filière B et une filière C.

Chaque étudiant de l'université est inscrit dans une des trois filières et une seule. Les effectifs de la filière A sont le double de ceux de la filière B. Les effectifs de la filière B sont le triple de ceux de la filière C.

On sait que :

- 30% des étudiants de la filière A sont des filles ;
- 25% des étudiants de la filière B sont des filles ;
- 35% des étudiants de la filière C sont des filles ;

On choisit au hasard un étudiant de cette université.

On note A l'évènement : «l'étudiant est inscrit dans la filière A». De même pour B et C. On note F l'évènement : «l'étudiant est une fille».

- 1) Calculer les probabilités des évènements : A ; B et C.
- 2) Calculer les probabilités : $P_A(F)$; $P_A(\bar{F})$; $P_B(F)$; $P_B(\bar{F})$; $P_C(F)$ et $P_C(\bar{F})$.
- 3) Calculer les probabilités des évènements : $F \cap A$; $F \cap B$ et $F \cap C$.
- 4) Calculer la probabilité que l'étudiant soit une fille. En déduire celle d'être un garçon.
- 5) Calculer la probabilité que l'étudiant soit inscrit dans la filière A sachant que c'est une fille.

6) L'étudiant, choisi au hasard, n'est pas inscrit dans la filière A. Calculer alors la probabilité que ce soit une fille.

Problème : (11 points)

Le but du problème est d'étudier la fonction f définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[, f(x) = \frac{x^2}{x-1} \times \ln x \\ f(0) = 0 \text{ et } f(1) = 1 \end{cases}$$

On notera (C) la courbe représentative de f relativement à un repère orthonormé (O, I, J) d'unités 5 cm.

Partie A :

On considère la fonction g dérivable sur $]0; +\infty[$ et définie par : $g(x) = (x - 2)\ln x + (x - 1)$

- 1) Démontrer que pour tout réel x élément de $]0; +\infty[$: $g'(x) = \frac{2(x-1)}{x} + \ln x$
- 2) Etudier le sens de variation de g , puis dresser son tableau de variation.
- 3) Dédire de 2) que $g(x)$ est positif pour tout réel x élément de $]0; +\infty[$.

Partie B :

1) a. Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

b. Démontrer que f est continue à droite en 0, et continue en 1.

c. Calculer le nombre dérivé de f à droite en 0.

Donner une interprétation graphique de ce résultat.

d. On admettra ici que f est dérivable en 1 et que : $f'(1) = \frac{3}{2}$

En déduire une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.

2) a. On admettra que f est dérivable sur $]0; 1[\cup]1; +\infty[$.

Démontrer que pour tout x appartenant à $]0; 1[\cup]1; +\infty[$, $f'(x) = \frac{x}{(x-1)^2} \times g(x)$

b. En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

c. Démontrer que pour tout x appartenant à $[0; 1]$, on a : $0 \leq f(x) \leq 1$

d. Dans le repère (O, I, J), tracer la demi-tangente à (C) au point O, la tangente à (C) au point B de coordonnées (1; 1) et la courbe (C). On donne : $\ln 2 \approx 0,69$; $\ln 3 \approx 1,1$

Partie C :

1) Pour tout réel α appartenant à $]0; \frac{1}{2}[$, on considère l'intégrale $A(\alpha)$ telle que :

$$A(\alpha) = \int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}+\alpha} \frac{t^2}{t-1} \ln t dt$$

On note A la limite de $A(\alpha)$ quand α tend vers $\frac{1}{2}$ par valeurs inférieures.

Que représente géométriquement le nombre A ?

2) a. Démontrer que la fonction H_n définie, pour tout entier naturel non nul n , sur $]0; +\infty[$ par : $H_n(t) = \frac{t^{n+1}}{(n+1)} \times \left(\ln t - \frac{1}{n+1} \right)$ est une primitive de la fonction $t \rightarrow t^n \times \ln t$ sur $]0; +\infty[$.

b. Soit $\alpha \in]0; \frac{1}{2}[$. Pour tout entier naturel non nul, on pose :

$$I_n(\alpha) = \int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}+\alpha} t^n \times \ln t dt$$

et $I_n = \lim_{\alpha \rightarrow \frac{1}{2}} I_n(\alpha)$. Calculer $I_n(\alpha)$ et en déduire que $I_n = -\frac{1}{(n+1)^2}$

3) Pour tout réel t différent de 1, et pour tout entier naturel non nul n , calculer la somme $t^2 + t^3 + \dots + t^{n+1}$. (Somme des n premiers termes d'une suite géométrique).

Démontrer que $\frac{t^2}{t-1} = -t^2 - t^3 - \dots - t^{n+1} + \frac{t^{n+2}}{t-1}$ et que

$$A(\alpha) = -I_2(\alpha) - I_3(\alpha) - \dots - I_{n+1}(\alpha) + \int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}+\alpha} f(t) dt$$