

EXERCICE 1 (10 points)

0.25 A-1- Vérifier que, $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$; $0 \leq 1 - x + x^2 - \frac{1}{x+1} \leq x^3$

0.25 2- En déduire que, $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$; $0 \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ln(1+x) \leq \frac{x^4}{4}$

B- On considère la fonction f définie sur $I = [0, +\infty[$ par,

$$f(0) = \frac{1}{2} \text{ et pour tout } x \text{ de }]0, +\infty[; f(x) = \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

✓ 0.5 1-a) Montrer que f est continue à droite en 0

0.5 b) Montrer que f est dérivable à droite en 0

✓ 0.5 c) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

✓ 0.5 2-a) Montrer que, $(\forall x \in]0, +\infty[)$; $f'(x) = -\frac{g(x)}{x^3}$

$$\text{où } g(x) = x + \frac{x}{x+1} - 2\ln(1+x)$$

✓ 0.5 b) Montrer que, $(\forall x \in I)$; $0 \leq g'(x) \leq x^2$

✓ 0.25 c) En déduire que, $(\forall x \in I)$; $0 \leq g(x) \leq \frac{x^3}{3}$

✓ 0.25 d) Déterminer le sens de variation de f sur I

✓ 0.25 3-a) Dresser le tableau de variation de f

0.5 b) Représenter graphiquement la courbe (C) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(On prendra $\|\vec{i}\| = 2cm$ et $\|\vec{j}\| = 2cm$)

0.5 C-1- Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in]0, 1[$ tel que $f(\alpha) = \alpha$

2- On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par,

$$u_0 = \frac{1}{3} \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = f(u_n)$$

✓ 0.5 a) Montrer que, $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \in [0, 1]$

✓ 0.5 b) Montrer que, $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right) |u_n - \alpha|$

- 0.5 $\checkmark$ c) Montrer par récurrence que, $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$
- 0.25 $\checkmark$ d) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α
- D- Pour tout $x \in I$, on pose, $F(x) = \int_x^1 f(t) dt$
- 0.5 1- Montrer que la fonction F est dérivable sur I et calculer $F'(x)$ pour tout $x \in I$
- 0.5 2-a) En utilisant la méthode d'intégration par parties, montrer que,
- $$(\forall x \in]0, +\infty[) ; F(x) = 2 \ln 2 - \left(1 + \frac{1}{x}\right) \ln(1+x)$$
- 0.5 b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$, puis en déduire que, $\int_0^1 f(t) dt = 2 \ln 2 - 1$
- 0.5 c) Calculer en cm^2 , l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) , l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$
- E- On pose, pour tout k de $\mathbb{N}$, $\Delta_k = f(k) - \int_k^{k+1} f(t) dt$
- et pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_k$
- 0.25 1-a) Vérifier que, $(\forall k \in \mathbb{N}) ; 0 \leq \Delta_k \leq f(k) - f(k+1)$
- 0.5 b) En déduire que, $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 0 \leq S_n \leq \frac{1}{2}$
- 0.25 2-a) Montrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est monotone.
- 0.25 b) En déduire que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.
- 0.25 c) Montrer que la limite ℓ de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifie, $\frac{3}{2} - 2 \ln 2 \leq \ell \leq \frac{1}{2}$

EXERCICE2 (3.5 points)

Soit m un nombre complexe non nul donné et $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

I- On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z

$$(E_m) : z^2 + mj^2z + m^2j = 0$$

$\checkmark$ 0.5 1- Vérifier que, $j^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 0$

$\checkmark$ 0.25 2-a) Montrer que le discriminant de l'équation (E_m) est, $\Delta = [m(1-j)]^2$

√ 0.5

b) Déterminer z_1 et z_2 les deux solutions de l'équation (E_m)

0.5

3- Dans cette question, on suppose que $m = 1 + i$

Montrer que $(z_1 + z_2)^{2022}$ est un imaginaire pur.

II- Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit φ la transformation du plan complexe qui à tout point $M(z)$ fait correspondre le point $M'(z')$ tel que $z' = (1 + j)z$

0.25

1- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application φ

2- On considère les points A, B et C d'affixes respectives m, mj et mj^2

et on note $A'(a'), B'(b')$ et $C'(c')$ les images respectives des points A, B et C

par l'application φ et soient $P(p), Q(q)$ et $R(r)$ les milieux respectifs des

segments $[BA'], [CB']$ et $[AC']$

0.75

a) Montrer que $a' = -mj^2, b' = -m$ et $c' = -mj$

0.25

b) Montrer que $p + qj + rj^2 = 0$

0.5

c) En déduire que le triangle PQR est équilatéral.

EXERCICES (3 points)

Soit n un entier naturel strictement supérieur à 1

On considère dans $\mathbb{N}^2$ l'équation $(E_n) : (x+1)^n - x^n = ny$

Soit (x, y) une solution de l'équation (E_n) dans $\mathbb{N}^2$ et soit p le plus petit diviseur premier de n

0.25

1-a) Montrer que $(x+1)^n \equiv x^n \pmod{p}$

0.25

b) Montrer que p est premier avec x et avec $(x+1)$

0.25

c) En déduire que $(x+1)^{p-1} \equiv x^{p-1} \pmod{p}$

0.5

2- Montrer que si n est pair, alors l'équation (E_n) n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}^2$

3- On suppose que n est impair.

0.5

a) Montrer qu'il existe un couple (u, v) de $\mathbb{Z}^2$ tel que $nu + (p-1)v = 1$

(On rappelle que p est le plus petit diviseur premier de n)

0.25

b) Soient q et r respectivement le quotient et le reste dans la division euclidienne de u par $(p-1)$. Vérifier que $nr = 1 - (p-1)(v + nq)$

0.5

c) On pose, $v' = -(v + nq)$. Montrer que, $v' \geq 0$

0.5

d) Montrer que l'équation (E_n) n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}^2$

EXERCICE 4 (3.5 points)

On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire non commutatif d'unité

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et que $(\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau commutatif unitaire et intègre.

Soit $E = \left\{ M(a, b) = \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} / (a, b) \in \mathbb{Z}^2 \right\}$

0.25

1-a) Montrer que E est un sous-groupe de $(M_2(\mathbb{R}), +)$

0.25

b) Vérifier que pour tout a, b, c et d de $\mathbb{Z}$, on a :

$$M(a, b) \times M(c, d) = M(ac + 3bd, ad + bc)$$

0.5

c) Montrer que $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif et unitaire.

2- Soit φ l'application définie de E vers $\mathbb{Z}$ par :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2 ; \varphi(M(a, b)) = |a^2 - 3b^2|$$

0.5

Montrer que φ est un homomorphisme de $(E, \times)$ vers $(\mathbb{Z}, \times)$

3- Soit $M(a, b) \in E$

0.25

a) Montrer que $M(a, b) \times M(a, -b) = (a^2 - 3b^2) \cdot I$

0.5

b) Montrer que si $M(a, b)$ est inversible dans $(E, \times)$ alors $\varphi(M(a, b)) = 1$

0.5

c) On suppose que $\varphi(M(a, b)) = 1$.

Montrer que $M(a, b)$ est inversible dans $(E, \times)$ et préciser son inverse.

0.25

4-a) Montrer que, $\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2 ; \varphi(M(a, b)) = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$

0.25

b) En déduire que l'anneau $(E, +, \times)$ est intègre.

0.25

c) Est-ce que $(E, +, \times)$ est un corps ? justifier votre réponse.

FIN