

Exercice 1 : (3 points)

Les statistiques montrent que 5% des candidats au bac national 2019 étaient en série C. On choisit, de façon aléatoire, de l'ensemble des candidats de 2019, un échantillon de n candidats ($n \geq 2$). On suppose que ce choix peut être assimilé à un tirage successif avec remise. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de candidats au bac C choisis dans cet échantillon.

1. Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance mathématique.
2. Calculer en fonction de n la probabilité de chacun des événements A et B suivants :
 A « Seulement deux candidats au bac C ont été choisis »
 B « Au moins un candidat au bac C a été choisi ».
3. Soit p_n la probabilité d'avoir choisi au moins un candidat au bac C donc $p_n = P(B)$.
 a) Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ et interpréter le résultat.
 b) Quel est le nombre minimal de candidats qu'il faut choisir pour que $p_n \geq 0,99$?

1 pt

0.5 pt

0.5 pt

0.5 pt

0.5 pt

Exercice 2 : (5 points)

1. Soit $P(z) = z^3 - (5 + 6i)z^2 + (-6 + 16i)z + 20 + 10i$, $z \in \mathbb{C}$

- a) Calculer $P(-1 + i)$ puis déterminer les complexes a et b tels que $P(z) = (z + 1 - i)(z^2 + az + b)$.
- b) En déduire les solutions de l'équation $P(z) = 0$.

1 pt

0.5 pt

On notera z_1 , z_2 et z_3 les solutions de cette équation avec $|z_1| < |z_2| < |z_3|$.

2. Dans le plan complexe, muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A , B et C d'affixes respectives z_1 , z_2 et z_3 .

1 pt

0.5 pt

- a) Placer les points A , B , C et I , où I est le milieu du segment $[AB]$.
- b) Soit D le barycentre du système $\{(A; 3), (B; 1)\}$. Vérifier que $z_D = i$ et placer D .

0.5 pt

0.5 pt

3. Soit H l'hyperbole de foyers A et B dont D est un sommet.

- a) Déterminer le centre et l'excentricité de H .
- b) Vérifier que l'équation réduite de H dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, s'écrit $(x-1)^2 - \frac{(y-1)^2}{3} = 1$.
- c) Déterminer le 2^e sommet, les directrices et les asymptotes de l'hyperbole H et la construire.

1 pt

Exercice 3 (4 points)

Soit ABC un triangle équilatéral direct de centre O et D le symétrique de O par rapport à (AC) . On note I , J et K les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$.

1. Faire une figure soignée illustrant les données précédentes.

0.5

0.5

0.5

2. a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui transforme B en C et O en D .
- b) Justifier que f est une rotation et préciser ses éléments caractéristiques.
- c) En utilisant une décomposition convenable, déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $t_{AB} \circ f$.

0.

0

3. a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement g qui transforme A en C et K en J .
- b) Prouver que g est une symétrie glissante et donner sa forme réduite.

4. On considère la transformation $S = h \circ f$ où h est l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{1}{2}$ et f

la transformation définie dans la question 2.

- a) Déterminer $S(O)$ puis caractériser S .

b) On considère la suite des points (M_n) définie par $M_0 = A$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $M_{n+1} = S(M_n)$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(\overrightarrow{OM_n}, \overrightarrow{OM_{n+1}}) = \pi$ puis en déduire que $M_{2021} \in [OA]$

Exercice 4 : (4 points)

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x - 3 - \frac{3 \ln x}{x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Soit u la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $u(x) = x^2 - 3 + 3 \ln x$.

a) Dresser le tableau de variations de la fonction u . 0.5pt

b) Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α et que $1.4 < \alpha < 1.41$. 0.5pt

c) En déduire le signe de $u(x)$ sur $]0; +\infty[$. 0.25pt

2. a) Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. 0.5pt

b) Montrer que la courbe (C) admet une asymptote oblique D et étudier sa position relative par rapport à (C) . 0.5pt

3. a) Montrer que $f'(x) = \frac{u(x)}{x^2}$ puis dresser le tableau de variation de f . 0.5pt

b) Construire la courbe (C) . 0.5pt

4. Calculer l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = e$. 0.25pt

5. Soit φ la restriction de f sur l'intervalle $I =]0; \alpha]$.

a) Montrer que φ réalise une bijection de I sur un intervalle J à déterminer. 0.25pt

b) Construire, dans le repère précédent, la courbe (C') de la réciproque φ^{-1} de φ . 0.25pt

Exercice 5 : (4 points)

Pour tout entier naturel n , non nul, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction g_n par $g_n(x) = x^n e^{-x}$.

1. a) Calculer, suivant la parité de n , $\lim_{x \rightarrow -\infty} g_n(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g_n(x)}{x}$. 1pt

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x)$. 0.5pt

2. a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $g'_n(x) = (n - x)x^{n-1}e^{-x}$. 0.5pt

b) Dresser le tableau de variation de g_n selon la parité de n . 0.5pt

3. On pose $I_0 = \int_0^1 e^{-x} dx$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^1 g_n(x) dx$.

a) Justifier que $I_1 = 1 - \frac{1}{e}$. 0.25pt

b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = (n+1)I_n - e^{-1}$. 0.25pt

4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{(n+1)e} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ et en déduire la limite de la suite (I_n) . 0.5pt

5. $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{1}{n!} I_n$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = -\frac{e^{-1}}{(n+1)!}$ et en déduire que $e(1 - u_n) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$. 0.5pt

Fin.