

1. On considère l'équation (E): $62x - 5y = 2025$ où x et y sont des entiers.

a) Justifier que le couple $(35, 29)$ est solution de l'équation (E) puis en déduire l'ensemble de solutions de cette équation.

1 pt

b) Montrer que si $(x; y)$ est une solution de (E) alors x est un multiple de 5.

0,5 pt

2. Soit (F) l'équation : $62x^{10} - 5y^{10} = 2025$, où x et y sont des entiers.

a) Montrer que pour tout entier a , on a : $a^{10} \equiv 1[11]$ ou $a^{10} \equiv 0[11]$.

0,5 pt

b) Montrer que si $(x; y)$ est une solution de (F) alors $x \wedge 11 = 1$ ou $y \wedge 11 = 1$.

0,5 pt

c) Supposons que $(x; y)$ est une solution de (F). Déterminer le reste de la division euclidienne du nombre $62x^{10} - 5y^{10}$ par 11. En déduire que (F) n'a pas de solution.

0,5 pt

Exercice 2 (4 points)

On considère dans $\mathbb{C}$ le polynôme P défini pour tout

$$\alpha \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\text{ par } P(z) = z^3 - (6 + 4i \sin \alpha)z^2 + (8 + 16i \sin \alpha)z - 16i \sin \alpha.$$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$, sachant qu'elle admet une solution réelle z_0 .

1pt

2. Dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, M_1 et M_2 d'affixes respectives de $z_0, z_1 = 2 + 2e^{i\alpha}$ et $z_2 = 2 - 2e^{-i\alpha}$.

On note $G = \text{bar}\{(A; -12), (M_1; 21), (M_2; 3)\}$.

a) Justifier que $z_2 = 2 - e^{-i2\alpha}(z_1 - 2)$ puis caractériser la rotation R qui transforme M_1 en M_2 pour tout $\alpha \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.

0,75 pt

b) Déterminer α pour que le triangle AM_1M_2 soit équilatéral.

0,25 pt

c) Montrer que, si α varie, les points M_1 et M_2 restent sur un même cercle à préciser

0,5 pt

d) Montrer que, si α varie, la droite (M_1M_2) conserve une direction fixe.

0,5 pt

e) Vérifier que l'abscisse du point G est $z_G = 2 + 3 \cos \alpha + 4i \sin \alpha$. Justifier que G reste sur une ellipse dont on donnera l'équation réduite et l'excentricité.

1 pt

Exercice 3 (4 points)

ABC est un triangle rectangle isocèle direct en A et soient I, J, K, L et M les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AI]$, $[AB]$, $[BI]$ et $[AC]$

1. Faire une figure soignée.

0,5 pt

2. Montrer qu'il existe une rotation R transformant A en I et I en B. Caractériser R.

0,75 pt

3. a) Soit g l'antidéplacement qui transforme A en I et I en B.

Montrer que g est une symétrie glissante et donner sa forme réduite.

1pt

b) Déterminer la droite Δ telle que $g = S_{\Delta} \circ R$.

0,25 pt

4. Soit S la similitude directe qui transforme A en B et I en A.

a) Déterminer le rapport et une mesure de l'angle de S .

0,5 pt

b) Prouver que le centre Ω de S appartient aux cercles de diamètres $[AC]$ et $[IB]$.

0,5 pt

c) Justifier que $\Omega \in [CK]$ et que les points C, M, L et Ω sont cocycliques.

0,5 pt

Exercice 4 (4 points)

On considère la fonction f définie sur $] -1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1 + \ln(x+1)}{x+1}$ et soit C sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1.a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$ et calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, interpréter graphiquement. 0,75 pt

b) Montrer que pour tout x de $] -1, +\infty[$, $f'(x) = \frac{-\ln(x+1)}{(x+1)^2}$ 0,5 pt

c) Dresser le tableau de variation de f . 0,75 pt

2. Soit g la restriction de f sur $[0, +\infty[$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $g(x) = \frac{1}{n}$ admet une unique solution a_n sur $[0, +\infty[$ puis vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} > a_n$. 0,5 pt

3.a) Construire la courbe C et ses asymptotes. 0,25 pt

b) Déterminer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe C , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$. 0,25 pt

4. Pour tout entier naturel n , non nul, on pose $I_n = \int_0^1 t^n f(t) dt$.

a) Montrer que (I_n) est décroissante et déduire qu'elle est convergente. 0,5 pt

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \frac{1 + \ln 2}{2} \times \frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ puis déduire la limite de (I_n) . 0,5 pt

Exercice 5 (5 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}$ et soit C sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1.a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement. 1 pt

b) Calculer $f'(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (f' est la dérivée de f). Dresser le tableau de variation de f . 1 pt

c) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à préciser. 0,5 pt

2. Soit g la fonction réciproque de f .

a) Dresser le tableau de variation de g . 0,5 pt

b) Déterminer l'expression de $g(x)$ sur J puis montrer que $\forall x \in J$ $g'(x) = \frac{-2}{x(1-x^2)}$. 0,5 pt

3. Pour tout entier naturel non nul n , on pose $S_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} t^{2k-1}$ avec $t \in]0, 1[$.

a) Montrer que $S_n(t) = \frac{-1}{2} \cdot g'(t)(1-t^{2n})$. 0,5 pt

b) Déduire que $\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times 2^{2n}}\right) \ln \frac{3}{8} \leq \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} S_n(t) dt \leq \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times 3^{2n}}\right) \ln \frac{3}{8}$. 0,5 pt

c) Calculer $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} S_n(t) dt$ et en déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2k} \left(\frac{1}{4^k} - \frac{1}{9^k} \right) \right] = \ln \left(\frac{4}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} \right)$. 0,5 pt

Fin.