

Exercice 1 (3 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère les points

M_n de coordonnées (x_n, y_n, z_n) définis par $M_0 (1, 1, 3)$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. a) Calculer A^2 et montrer par récurrence que $\forall n \geq 1, A^n = \begin{pmatrix} 1 & 3^n - 1 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix}$ 0,5pt

b) En déduire que $x_n = y_n = 3^n$ et que $z_n = 3 \times 5^n$ pour tout entier n . 0,5pt

2. On considère la droite (D) passant par le point B (0, 1, 2) et de vecteur directeur $\vec{u} (3, 5, 4)$. Dans cette question on se propose de déterminer l'ensemble (E) de points M (x, y, z) de coordonnées entières de la droite (D) vérifiant la condition (*): $z \equiv 0 [15]$

a) Donner une représentation paramétrique de la droite (D). 0,5pt

b) Soit M (x, y, z) un point de coordonnées entières de la droite (D).

Montrer que M vérifie la condition (*) si et seulement s'ils existent deux entiers t et k tels que $z = 2 + 4t$ et $15k - 4t = 2$ 0,5pt

3. Vérifier que le couple $(-2; -8)$ est solution de l'équation $15x - 4y = 2$ puis la résoudre dans $\mathbb{Z}^2$, et en déduire l'ensemble (E). 1 pt

Exercice 2 (4 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{2-x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement. 1,25 pt

2. Déterminer l'expression de $f'(x)$, où f' est la dérivée de f, puis dresser le tableau de variation de f. 0,75 pt

3. Montrer que (C) admet un point d'inflexion A à préciser. Construire (C). 1 pt

4. On considère la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $u_n = \int_0^1 x^{n-1} f(x) dx$

a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante et minorée. 0,5 pt

b) Montrer que pour tout entier $n \geq 1, \frac{e}{n+1} \leq u_n \leq \frac{e^2}{n+1}$ puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. 0,5 pt

Exercice 3 (5 points)

ABCD un carré direct de centre O. On construit les triangles AEB, BFC, CGD et DHA rectangles isocèles directs respectivement en E, F, G et H.

1. Faire une figure soignée correspondant aux données ci-dessus. 0,75 pt

2. Montrer qu'il existe une unique symétrie glissante f transformant B en D et E en O. Caractériser f. 0,75 pt

3. Montrer qu'il existe une unique rotation R transformant B en C et E en G. Caractériser R.	0,75 pt
4. Montrer qu'il existe une unique homothétie h qui transforme C en B et G en D. Déterminer le rapport de h et placer avec justification son centre I.	0,75 pt
5. On considère la similitude directe $S = h \circ R$. Déterminer $S(B)$ et caractériser S puis déterminer $S(A)$.	1,25 pt
6. On note $g = R \circ S$. Montrer que g est une homothétie. Préciser son rapport et écrire son centre J comme barycentre des points B et C.	0,75 pt

Exercice 4 (4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1. Soit $m \in \mathbb{R}$ et $\theta \in [0, 2\pi[$, On considère, dans l'ensemble de nombres complexes, l'équation d'inconnue z : $E_m : z^2 - 2(m + i)z + (m + i)^2 + 4e^{2i\theta} = 0$ et soient P et Q les points d'affixes z_1 et z_2 solutions de cette équation.

- | | |
|--|---------|
| a) Montrer que le discriminant de l'équation E_m est $\Delta = (4ie^{i\theta})^2$ puis la résoudre. | 1pt |
| b) Montrer que la distance PQ est égale à 4 et que le milieu I du segment [PQ] appartient à une droite fixe, à préciser. | 0,75 pt |

2. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives .

$z_A = 3 + i$, $z_B = -1 + i$, $z_C = 1 - \frac{3}{2}i$ et $z_D = 1 + \frac{5}{2}i$ et soit E l'ellipse dont A et C sont deux sommets et D un foyer.

- | | |
|--|---------|
| a) Reconnaître l'axe focale de E et en déduire que B est un sommet de E. | 0,75 pt |
| b) Déterminer les affixes du centre, du 2 ^e foyer et du 4 ^e sommet de E. | 0,75 pt |
| c) Ecrire une équation de E dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$, puis construire E. | 0,75 pt |

Exercice 5 (4 points)

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$.

On note Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Calculer et interpréter les limites suivantes $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

2.a) Soit x un réel strictement positive, et $t \in]0, x]$, montrer que :

$\frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{1+t} \leq 1$ puis déduire que $\frac{x}{1+x} \leq \ln(x+1) \leq x$.

b) Calculer $g'(x)$ et déduire de la question 2.a) que $g'(x)$ est négative.

3. On définit les deux suites (P_n) et (u_n) pour tout $n \geq 1$ par :

$$P_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}} = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^{\frac{1}{1}} \times \left(1 + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \times \dots \times \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \text{ et } u_n = \ln(P_n).$$

a) Montrer que $\forall n \geq 1, u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} g\left(\frac{1}{k}\right)$ et que (u_n) est croissante.

b) Déduire que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \leq u_n \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.

c) Vérifier que $\forall k > 1, \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ et montrer que $e \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n \leq e^2$.

Fin.