

|                                                                                                                                                                                                                                                    |                                     |                                                                               |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------|
| <b>REPUBLIQUE DU NIGER</b><br>MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT<br>SUPERIEUR, DE LA RECHERCHE ET DE<br>L'INNOVATION TECHNOLOGIQUE<br><b>OFFICE DU BACCALAUREAT, DES</b><br><b>EQUIVALENCES ET DES EXAMENS ET</b><br><b>CONCOURS DU SUPERIEUR (OBEECS)</b> | <b>BACCALAUREAT</b><br>SESSION 2025 | <b>EPREUVE :</b> Mathématiques<br><b>DUREE :</b> 4H<br><b>COEFFICIENT :</b> 6 |
|                                                                                                                                                                                                                                                    | <b>SERIE/FILIERE :</b> C, E         | <b>GROUPE :</b> 1 <sup>er</sup> groupe                                        |

**Exercice 1** (4 points)

Soit  $M = \{1; j; j^2\}$  l'ensemble des racines cubiques de 1 dans  $\mathbb{C}$  avec  $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$  et  $a$  et  $b$  deux nombres complexes fixés.

- 1) A l'aide de deux tableaux à double entrée avec  $\lambda$  en colonne et  $\mu$  en ligne montrer que  $\lambda^2\mu$  et  $\lambda\mu^2$  prennent exactement 3 valeurs différentes lorsque  $(\lambda; \mu)$  décrit  $M \times M$   
**(1 point)**
- 2) Soit  $\Delta$  l'ensemble des nombres complexes  $(\lambda a + \mu b)^3$  quand  $(\lambda; \mu)$  décrit  $M \times M$ .  
Démontrer que  $\Delta$  comporte au plus trois éléments. **(1 point)**
- 3) a) Vérifier que  $(a + b)^3$  est solution dans  $\mathbb{C}$  de l'équation  
(E):  $(z - a^3 - b^3)^3 - 27a^3b^3z = 0$ . **(0.5 point)**  
b) Prouver que tous les autres éléments de  $\Delta$  sont solutions de (E). **(0.5 point)**
- 4) On pose  $a^3 = 2 + 2i$  et  $b^3 = 8i$ . Déterminer une solution particulière de l'équation (E<sub>1</sub>):  $(z - 2 - 10i)^3 + 432(1 - i)z = 0$ ; puis en utilisant ce qui précède déduire les deux autres solutions de (E<sub>1</sub>).  
**(1 point)**

**Exercice 2** (5 points)

Soit P le plan affine rapporté à un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1. Soit  $\alpha, \beta$  deux réels et  $f_{(\alpha, \beta)}$  l'application de P qui à tout point  $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  associe le point  $M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  telle que : 
$$\begin{cases} x' = 3x + \alpha \\ y' = -3y + \beta \end{cases}$$
  - a) Démontrer que  $f_{(\alpha, \beta)}$  admet un seul point invariant  $\Omega$ . **(0.5 point)**
  - b) Montrer que  $f_{(\alpha, \beta)} = S \circ h$  où  $S$  est la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses et  $h$  une homothétie dont on déterminera le rapport et le centre.  
**(1 point)**
2. On prend  $(\alpha, \beta) = (6; 12)$  et  $f = f_{(6, 12)}$ 
  - a) Définir l'application réciproque  $f^{-1}$ . **(0.5 point)**
  - b) On définit la suite des points  $M_n$  par : 
$$\begin{cases} M_1 = O \\ M_{n+1} = f^{-1}(M_n), \text{ pour tout } n \geq 1 \end{cases}$$
    - (i) Exprimer  $x_{n+1}$  et  $y_{n+1}$  les coordonnées de  $M_{n+1}$  en fonction de  $x_n$  et  $y_n$  les coordonnées de  $M_n$ . **(0.5 point)**

- (ii) Déterminer les réels  $a$  et  $b$  tels que les suites définies par  $u_n = x_n - a$  et  $v_n = y_n - b$  soient des suites géométriques dont on précisera pour chacune sa raison et son premier terme. **(1 point)**
- (iii) En déduire les termes généraux  $x_n$  et  $y_n$  en fonction de  $n$ . **(0.5 point)**
- (iv) Calculer les limites de  $x_n$  et  $y_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . **(0.5 point)**
- (v) Justifier que la suite des points  $M_n$  converge vers une position limite. **(0.5 point)**

**Problème (11 points)**

On considère la fonction  $f_1$  définie sur  $[0; +\infty[$ ,  $f_1(x) = xe^{-x^2}$  et on appelle  $(C_1)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  unité graphique 4 cm.

**Partie A**

1. Etudier les variations de  $f_1$ . **(1 point)**
2. Calculer la limite de  $f_1$  en  $+\infty$ . Interpréter graphiquement le résultat. **(0.25 + 0.25 point)**
3. Dresser le tableau de variation de  $f_1$ . **(0.5 point)**
4. On appelle  $(\Delta)$  la droite d'équation  $y = x$ ; déterminer la position de  $(C_1)$  par rapport à  $(\Delta)$ . **(0.75 point)**
5. Tracer  $(C_1)$  et  $(\Delta)$ . **(1 point)**

**Partie B**

On considère la fonction  $f_3$  définie sur  $[0; +\infty[$   $f_3(x) = x^3 e^{-x^2}$  et on appelle  $(C_3)$  sa courbe représentative.

1. Montrer que pour tout  $x$  positif  $f'_3(x)$  a le même signe que  $3 - 2x^2$ . **(0.5 point)**  
En déduire le sens de variation de  $f_3$ . **(0.5 point)**
2. Calculer la limite de  $f_3$  en  $+\infty$ . Interpréter graphiquement le résultat. **(0.5 point)**
3. Déterminer la position relative de  $(C_1)$  et  $(C_3)$ . **(0.75 point)**
4. Tracer  $(C_3)$  dans le même repère que  $(C_1)$ . **(0.5 point)**

**Partie C**

On désigne par  $n$  un entier naturel non nul et on considère la fonction  $f_n$  définie sur  $[0; +\infty[$  par  $f_n(x) = x^n e^{-x^2}$ . On note  $(C_n)$  la courbe représentative de  $f_n$ .

1. Montrer que pour tout entier  $n \geq 1$ ;  $f_n$  admet un maximum en  $b_n = \sqrt{\frac{n}{2}}$ . On note  $\alpha_n$  ce maximum. **(0.5 point)**
2. On appelle  $S_n$  le point de  $(C_n)$  d'abscisse  $\sqrt{\frac{n}{2}}$ . Montrer que, pour tout  $n$ ,  $(C_n)$  passe par  $S_2$ . Placer  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_3$  sur la même figure. **(0.5 + 0.5 point)**
3. Soit la fonction  $g$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $g(x) = e^{\frac{x}{2}[-1 + \ln(\frac{x}{2})]}$ 
  - a) Etudier le sens de variation de  $g$ . **(1 point)**
  - b) Montrer que pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $\alpha_n = g(n)$ . **(1 point)**
  - c) En déduire que l'ordonnée de  $S_n$  est supérieure ou égale à celle de  $S_2$ . **(1 point)**