

REPUBLIQUE DU NIGER MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR, DE LA RECHERCHE ET DE L'INNOVATION TECHNOLOGIQUE OFFICE DU BACCALAUREAT, DES EQUIVALENCES ET DES EXAMENS ET CONCOURS DU SUPERIEUR (OBEECS)		
BACCALAUREAT SESSION 2026	EPREUVE : Mathématiques	DUREE : 4 H
SERIE/FILIERE : C, E	GROUPE : 1^{er} groupe	COEFFICIENT : 6

Exercice 1 (4 points)

Soit $b \in \mathbb{N}$ tel que $b \geq 2$.

- 1) Ecrire en base b suivant les valeurs de b : $(b+1)^2$, $(b+1)^3$, $(b+1)^4$.

(0,5 + 0,75 + 0,75 points)

- 2) Soient p et k deux entiers naturels tels que $0 \leq k \leq p$.

- a) Montrer que si pour $1 \leq k \leq p-1$, p divise C_p^k alors $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$
pour tous entiers naturels a et b . **(0,75 point)**

- b) Montrer par recurrence que pour tout entier naturel $n \neq 0$

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^p \equiv a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p \pmod{p}$$

où $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont des entiers naturels. **(0,75 point)**

- c) En déduire que pour tout entier naturel $n \neq 0$, $n^p \equiv n \pmod{p}$ **(0,5 point)**

Exercice 2 (4 points)

Soit (O, I, J, K) un repère orthonormé de l'espace $\mathcal{E}$. On considère l'application f de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ d'expression analytique :

$$\begin{cases} x' &= -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + 1 \\ y' &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + 1 \\ z' &= z \end{cases}$$

- 1) En utilisant l'expression analytique de f :

- a) Déterminer les images (O', I', J', K') respectivement de (O, I, J, K) **(0,5 point)**
b) Dire si le quadruplet (O', I', J', K') est un repère de $\mathcal{E}$. **(0,25 point)**

- 2) Déterminer l'image $\mathcal{E}'$ de $\mathcal{E}$ par f . **(0,5 point)**

- 3) a) Déterminer (Δ) l'ensemble des points invariants par f **(0,5 point)**
b) Donner un vecteur directeur $\vec{u}$ de (Δ) . **(0,25 point)**
c) Déterminer le point d'intersection de (Δ) avec le plan $((O, I, J))$. **(0,5 point)**

- 4) Soit M un point de $\mathcal{E}$ et M' son image par f .

- a) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonal à $\vec{u}$. **(0,5 point)**
b) Montrer que le milieu du segment $[MM']$ est un point de (Δ) . **(0,5 point)**

- c) Justifier que $f = S \circ P$ où S et P sont respectivement la symétrie orthogonale par rapport à un plan et une projection orthogonale sur un plan que l'on précisera. **(0,5 point)**

Problème (12 points)

- 1) Pour tout entier naturel $n \geq 2$ on note P_n la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$P_{n-2}(t) = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots + (-1)^{n-2}t^{n-2}$$

- a) Montrer que pour tout réel $t \neq -1$, $P_{n-2}(t) = \frac{1 - (-1)^{n-1}t^{n-1}}{1+t}$. **(0,75 point)**

- b) Dédurre que pour tout réel $t \neq -1$:

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \dots + (-1)^{n-2}t^{n-2} + (-1)^{n-1} \frac{t^{n-1}}{1+t} \quad \textbf{(0, 5point)}$$

- c) Justifier, par intégration, que pour tout $x \in [0, 1]$,

$$\ln(1+x) = Q_{n-1}(x) + (-1)^{n-1} \int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t} dt$$

$$\text{où } Q_{n-1}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-2} \frac{x^{n-1}}{n-1}. \quad \textbf{(0,75 point)}$$

- 2) On note f la fonction définie sur $[0, 1]$ par :
$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}, \text{ lorsque } x \neq 0 \end{cases}$$

- a) Montrer que pour tout réel $x \geq 0$, $x - \ln(1+x) \geq 0$. **(0,75 point)**

- b) En déduire que pour tout réel $x \in [0, 1]$, $f(x) \leq 1$. **(0,5 point)**

- c) i) Montrer que pour tout entier naturel $n \neq 0$, $0 \leq \int_0^{\frac{1}{n}} f(x) dx \leq \frac{1}{n}$. **(0,5 point)**

- ii) En déduire que lorsque $n \rightarrow +\infty$ le réel $\int_0^{\frac{1}{n}} f(x) dx$ tend vers 0. **(0,25 point)**

- iii) Justifier que lorsque $n \rightarrow +\infty$ le réel $\int_{\frac{1}{n}}^1 f(x) dx$ tend vers $\int_0^1 f(x) dx$ **(0,5 point)**

- iv) Retrouver le résultat de iii) en utilisant une primitive F de f (il est inutile de calculer F). **(0,5 point)**

- 3) a) Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$ et pour tout $n \geq 2$

$$\int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t} dt \leq \int_0^x t^{n-1} dt \quad \text{et en déduire} \quad \int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t} dt \leq \frac{1}{n}.$$

(0,5 + 0.25 point) .

- b) En utilisant la relation établie dans la question 1) c) montrer que pour tout $x \in]0, 1]$

$$-\frac{1}{nx} \leq f(x) - \frac{Q_{n-1}(x)}{x} \leq \frac{1}{nx}. \quad \textbf{(1 point)}$$

c) Montrer, par intégration, que

$$\int_{\frac{1}{n}}^1 f(x) dx + \frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n}\right) + S_n\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n(1) \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n}\right) + S_n\left(\frac{1}{n}\right)$$

où $S_n(x) = x - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} - \dots + (-1)^{n-2} \frac{x^{n-1}}{(n-1)^2}$. **(1 point)**

d-i) Montrer que pour tout entier naturel $p \geq 1$ et pour tout $x \in [0, 1]$

$$\frac{x^{p+1}}{(p+1)^2} \leq \frac{x^p}{p^2} \quad \textbf{(1 point)}$$

ii) Prouver que pour $n \geq 2$ et pour tout $x \in [0, 1]$ $S_n(x) \geq 0$

Indication : mettre S_3 et S_4 sous la forme $S_3(x) = x(1 - \frac{x}{2^2})$, $S_4(x) = S_3(x) + \frac{x^3}{3^2}$

et en discutant suivant les cas où $n = 2k$ et $n = 2k + 1$. **(1 point)**

e) Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$ $0 \leq S_n(x) \leq x$.

Indication : Ecrire $x - S_3(x), x - S_4(x), \dots, x - S_n(x)$ sous forme de somme

des $\frac{x^p}{p^2} - \frac{x^{p+1}}{(p+1)^2}$ **(1 point)**

f) Justifier que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ puis en déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(1) = \int_0^1 f(x) dx$

(0,75 + 0,5 point)