

Problème

On considère la fonction f dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ et définie par : $f(x) = \frac{1}{4}x - 1 + \frac{\ln x}{x}$.

(C) est la représentation graphique de f dans le repère orthonormé (O, I, J) . Unité graphique 2 cm.

Partie A

On considère la fonction u dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ et définie par : $u(x) = x^2 + 4 - 4\ln x$.

1. Étudier les variations de u .
2. Justifier que : $\forall x \in]0 ; +\infty[, u(x) > 0$.

Partie B

1. Calculer la limite de f en 0 et interpréter graphiquement le résultat.
2. a) Calculer la limite de f en $+\infty$.
b) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{4}x - 1$ est asymptote à (C) en $+\infty$.
3. a) Vérifier que : $\forall x \in]0 ; +\infty[, f'(x) = \frac{u(x)}{4x^2}$
b) En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
4. a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution α tel que $1 < \alpha < e$.
b) Déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près de α .
5. a) Démontrer qu'il existe un point unique A de (C) où la tangente (T) est parallèle à la droite (D).
b) Donner les coordonnées du point A.
6. a) Étudier la position relative de (0) par rapport à (C).
b) Construire (T), (D) et (C).

Partie C

On considère la suite numérique (a_n) définie pour tout entier $n \geq 1$ par : $a_n = \int_{e^{n-1}}^{e^n} \frac{2\ln t}{t} dt$

1. a) Hachurer sur le graphique le domaine du plan dont l'aire en unité d'aire est égale à a_1 .
b) Interpréter graphiquement le nombre a_n .
c) Calculer a_n puis étudier la convergence de la suite (a_n) .
2. Justifier que : $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = n^2$.